数理解析研究所講究録
第202巻 1974年 86-95

時間の入った問題に関して
――特に非適合法，ハイブリッド法――

東大 宇航研 菊地文雄

1. はじめに

有限要素法は初期の段階では主に境界値問題，固有値問題を扱ったが，現在は時間に関する微分項を直接含んだ形の初期値ー境界値混合問題としての取り扱いも盛んになっている。その数学的考察は主に熱方程式，波動方程式についてなされており，特に時間方向の離散化の手法とそれに伴う誤差，集中スキームの妥当性などについても論じられている。[1] また数学的にはほぼ自明のことであるが，有限要素法がかなり広い範囲の発展方程式に対して有効に適用し得ることを理論的，あるいは実験的に示したものに文献-(2),(3)がある。ここでは空間方向の作用素の近似に非適合法，ハイブリッド法などを用いた場合の有限要素法の妥当性について簡単に述べる。なおこの分野については半群理論を用いてある程度統一的な結果を得ることも可能かと思われる。

2. 原則論

最初に次の形の発展方程式

$$\frac{du}{dt} + Au = f \quad (0 \leqq t \leqq T), \quad u(0) = g \tag{1}$$

に対する有限要素法の原則的な点を述べておこう。ただし t は時間で $T < +\infty$ はその上限，$f = f(t)$ は各 t である Hilbert space X の元，g は X の元とし，A は境界条件も含んで線形で t に依存せず，その定義域 $D(A)$ は X で稠密とする。

もし $f = 0$ なら source term が無いわけで，しかも境界などからの流入もないわけである（境界条件は斉次）から，上記方程式が物理的に安定な現象を記述しており，それが X でのノルムの意味でと対応付けられるなら，次式が成立すべきである。

$$\|u(t)\|_X \leqq \|u(0)\|_X = \|g\|_X \quad \text{for } {}^\forall t \in (0, T] \tag{2}$$

$\|\cdot\|_X$ は X のノルムである。あるいは

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 \leqq 0 \tag{3}$$

このことと，(1) 式から $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = 2\mathrm{Re}\left(\frac{du}{dt}, u\right)_X = -2\mathrm{Re}(Au, u)_X$ が成立する $(f = 0)$ という事実とから

$$\mathrm{Re}\,(Au, u)_X \geqq 0 \quad \text{for } {}^\forall u \in D(A) \tag{4}$$

と考えられる。$(\ ,\ )_X$ は X の内積である。以下では X は省略し，また X は通常実 Hilbert space とする。通常の熱方程式，波動方程式，X が複素 H-space の場合を許せば Schrödinger 方程式も式 (4) を満足することは広く知られている。

さてXの有限次元部分空間S^hを考え，方程式(1)の解uを次のU_hの形で近似しよう。
$$U_h(t)=\sum_{\alpha=1}^{n(h)} a_{h\alpha}(t)\varphi_{h\alpha} \qquad (5)$$
ただし$a_{h\alpha}(t)$はtの関数，$\{\varphi_{h\alpha}\}_{\alpha=1}^{n(h)}$は$S^h$の basis である。なお，$h$は有限要素離散化の列を表すパラメタで，$h\downarrow 0$は離散化を極限まで実行することを意味する。ここでは簡単のため$S^h\subset D(A)$としておく。

いま$P_h: X\to S^h$を orthogonal projector とすると，式-(1)に対する Galerkin scheme は
$$dU_h/dt + P_hAU_h = P_hf \quad , t\in[0,T] \qquad (6)$$
となる。初期値は例えば$U_h(0)=P_hg$とする。式-(6)はtに関する常微分方程式系で，解の存在などは通常の方法で示せる。注意すべきことは$A_h=P_hA$と置けば式-(4)により
$$(A_hU_h, U_h)=(P_hAU_h, U_h)=(AU_h, U_h)\geqq 0 \qquad (7)$$
が成立することで，この事実から，$f=0$なら
$$\|U_h(t)\|\leqq\|U_h(0)\|=\|P_hg\|\leqq\|g\| \quad \text{for } {}^\forall t\in[0,T] \qquad (8)$$
が直ちに従う。$f\neq 0$の場合には簡単な微分不等式を解くことにより
$$\|U_h(t)\|^2\leqq\left\{\|U_h(0)\|^2+\int_0^t\|f(\tau)\|^2\exp(-\tau)\,d\tau\right\}\exp(t) \qquad (9)$$
を得る。これは有限要素解の初期値，荷重(source)項への一様依存性を意味する。(系が線形である)

今式(5)と同じ形の$\hat{v}_h(t)$を適当(適切)に選んで厳密解uに対し

$$e_1^h(t) = \hat{v}_h(t) - u(t), \quad e_2^h(t) = \frac{d\hat{v}_h}{dt}(t) + A\hat{v}_h(t) - f(t) \tag{10}$$

と置いたとき，$\Delta v_h = v_h - \hat{v}_h$ (v_hは式(6)の解) を考えると容易にわかるように

$$\left(\frac{d\Delta v_h}{dt}, v_h\right) + (A\Delta v_h, v_h) = -(e_2, v_h) \quad \text{for } {}^\forall v_h \in S^h \tag{11}$$

が成立するから式(9)を得たのと全く同様にして

$$\|\Delta v_h(t)\|^2 \leqq \left\{\|\Delta v_h(0)\|^2 + \int_0^t \|e_2(\tau)\|^2 \exp(-\tau)\,d\tau\right\}\exp(t) \tag{12}$$

が導びける。よってe_1^h，e_2^hが評価できれば有限要素法の一つの誤差評価式を与えることができる。

以上に述べたことはある意味で一般論ではあるが，実際に用いる有限要素法では必ずしも$S^h \subset D(A)$などという条件は満足されないので，上記手法は直ちには使えない。次に熱方程式の場合について，特に非適合法の場合も含んで，一つの誤差評価手法を示そう。

3. 非適合要素法などの非定常問題への適用の妥当性

結論を大ざっぱにいえば，基本となる定常問題

$$Au = f \quad ; \quad f \in X \tag{13}$$

に対する非適合モデルやハイブリッドモデル

$$A_h v_h = f_h \tag{14}$$

が適切で収束解を与えてくれるなら，対応する非定常問題

$$du/dt + Au = f(t) \tag{15}$$

に対する近似スキーム

$$\frac{d\bar{v}_h}{dt} + A_h \bar{v}_h = f_h \tag{16}$$

も収束してくれるということである。これは直観的には動力学的項 $d\bar{v}_h/dt$ には大まかに言って不適切な近似が入っていないためであろう。*) なおここでは A としては例えば $A = -\Delta$ with the Dirichlet B.C. (斉次) を考えればよい。

最初に定常問題の場合について非適合要素法について得られる結果をまとめておくことにしよう。式(13)の A は自己共役，正定値であるものとする。すなわち次式が成立する。

$$(Au, v) = (u, Av) \ \text{for} \ {}^\forall u, v \in \mathcal{D}(A) \ ; \ (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \ \text{for} \ {}^\forall u \in \mathcal{D}(A) \tag{17-1 \& 17-2}$$

γ は u に依存しない正定数である。次に非適合有限要素空間を $N^h \subset X$ で記す。この時，非適合性による要素間境界での変位の不連続性に目をつぶり強引に計算した非適合エネルギ積を $\langle\ ,\ \rangle_h$，対応する非適合エネルギノルムを $|||\ \ |||_h$ で記す。このとき $A_h : N^h \to N^h$ は次式で定義される。

$$(A_h \bar{v}_h, \bar{v}_h) = \langle \bar{v}_h, \bar{v}_h \rangle_h \quad \text{for} \ {}^\forall \bar{v}_h, \bar{v}_h \in N^h \tag{18}$$

式(13)に対する非適合スキームは

$$A_h \bar{v}_h = Q_h f \quad , \quad f \in X \tag{19}$$

である。ただし $Q_h : X \to N^h$ は orthogonal projector である。

*) さらに lumping の効果を考えることも可能である。

また式(17.2)に対応して　$|||v_h|||_h \geqq \gamma^* \|v_h\| \quad \text{for } {}^\forall v_h \in N^h$　(20)

を要請する。γ^*はv_hにもhにも依存しない正定数である。このとき，非適合性の影響がおだやかであれば，各厳密解uに対して$\hat{v}_h \in N^h$を適切に選んで

$$\lim_{h \downarrow 0} |||\hat{v}_h - u|||_h = 0 \ ^{*)}, \quad \lim_{h \downarrow 0} \|\hat{v}_h - u\| = 0 \qquad (21)$$

と出来るとき，式(19)の有限要素解v_hは　$\lim_{h \downarrow 0} |||v_h - \hat{v}_h|||_h = 0$　を満足する。式-(20)によりこれは　$\lim_{h \downarrow 0} \|v_h - \hat{v}_h\| = 0$　も意味する。$|||\ \ |||_h$，$\|\ \ \|$に対する三角不等式と式-(21)を合わせれば

$$\lim_{h \downarrow 0} |||v_h - u|||_h = \lim_{h \downarrow 0} \|v_h - u\| = 0 \qquad (22)$$

を得る。特に式-(20)のみでなく

$$|||v_h - u|||_h \geqq \gamma^* \|v_h - u\| \quad \text{for } {}^\forall v_h \in N^h,\ u \in \mathcal{D}(A) \qquad (23)$$

が成立していれば，式(21)の前半のみで同じ結論が従う。問題の非適合性により生ずる項の評価法，criteriaについては文献(4)，(5)を参照されたい。

次に式-(15)に対するnon-conforming Galerkin scheme

$$dv_h/dt + A_h v_h = Q_h f \qquad (24)$$

について考えよう。v_hの初期値については

$$\lim_{h \downarrow 0} |||v_h(0) - u(0)|||_h = \lim_{h \downarrow 0} \|v_h(0) - u(0)\| = 0 \qquad (25)$$

を要請しておく。

さて，式-(24)に対する補助関数として次の$\hat{v}_h(t)$を導入する。

---

*) $|||\hat{v}_h - u|||$，$|||v_h - u|||$などは意味を持つことに注意。

$\hat{v}_h$は各tでN^hの元で
$$A_h\tilde{v}_h = Q_h(f-\frac{du}{dt})\left(=Q_hAu\right) \tag{26}$$
を満す。式(25)はいわばD'Alembertの原理に対応して動力学的力の分も含めて力をすべて右辺に持ってきたものである。この$\hat{v}_h$は要するに$f-du/dt$なる力が作用したときの"定常問題" $Au=f-du/dt$ に対する有限要素解であるから，定常問題の手法を用いて
$$\sup_{t\in[0,T]}\lim_{h\downarrow 0}|||\tilde{v}_h(t)-u(t)|||_h = \sup_{t\in[0,T]}\lim_{h\downarrow 0}\|\tilde{v}_h(t)-u(t)\|=0 \tag{27}$$
を示せる。ただしuについてt方向にもある程度なめらかさを要請した。さらに$d\tilde{v}_h/dt$は$A\frac{du}{dt}=df/dt-d^2u/dt^2$の有限要素解であるから$du/dt$が$t$についてなめらかとして
$$\sup_{t\in[0,T]}\lim_{h\downarrow 0}\left\|\frac{d\hat{v}_h(t)}{dt}-\frac{du}{dt}(t)\right\|=0 \tag{28}$$
も示せる。

次に式-(24)と(26)との差をみると
$$\frac{d\Delta v_h}{dt}+A_h\Delta v_h = Q_h\left(\frac{du}{dt}-\frac{d\tilde{v}_h}{dt}\right) \tag{29}$$
を得る。ここに$\Delta v_h = v_h-\hat{v}_h$である。式-(9)を得たのと全く同様にして　$(A_hv_h, v_h)=|||v_h|||_h^2 \geqq \gamma^{*2}\|v_h\|$　を用いて
$$\|\Delta v_h(t)\|^2 \leqq \left\{\|\Delta v_h(0)\|^2+\int_0^t\left\|\frac{du}{dt}-\frac{d\tilde{v}}{dt}\right\|^2\exp(-\tau)d\tau\right\}\exp(t) \tag{30}$$
を得る。式-(30)の右辺はすでに与えた仮定により0に収束することを示せる。これはXでの収束である(tについて一様)。

熱方程式の性質を更に生かすと，式-(29)から

$$\left\| \frac{d\Delta v_h}{dt} \right\|^2 + \left\langle \Delta v_h, \frac{d\Delta v_h}{dt} \right\rangle_h = \left(\frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{v}_h}{dt}, \frac{d\Delta v_h}{dt} \right)$$
$$\leqq \left\| \frac{d\Delta v_h}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{4} \left\| \frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{v}_h}{dt}\right\|^2 \qquad (31)$$

を得る。従って $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |||\Delta v_h|||_h^2 = \left\langle \Delta v_h, \frac{d\Delta v_h}{dt}\right\rangle_h$ により，

$$|||\Delta v_h(t)|||_h^2 \leqq |||\Delta v_h(0)|||_h^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \left\| \frac{du}{dt} - \frac{d\tilde{v}_h}{dt}\right\|^2 d\tau \qquad (32)$$

も得られる。

混合法やハイブリッド応力法では X の他にひずみ，応力，あるいは熱勾配，熱流束のHilbert空間 Y も使用して A を $A = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$; $\mathcal{T}: D(\mathcal{T})\subset X \to Y$, $\mathcal{T}^*: D(\mathcal{T}^*)\subset Y\to X$ と分解する。$\mathcal{T}^*$ は $\mathcal{T}$ のdual operatorである。有限要素法で解く際は有限要素空間 $X^h \times Y^h$ $(X^h\subset X,\ Y^h\subset Y)$ を用意して $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$ の近似作用素 $\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_h^*$ をしかるべき変分原理で求め，式-(16)の代りに

$$\begin{cases} \mathcal{T}_h v_h = V_h \\ \mathcal{T}_h^* V_h = P_h f - \dfrac{dv_h}{dt} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} v_h \in X^h \\ V_h \in Y^h \end{pmatrix} \qquad (33)$$

として解く。$\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_h^*$ は変分原理で導びく限りは X^h, Y^h でみれば互にdualの関係にある。また $P_h: X\to X^h$ は orthogonal projector である。この場合には極めて大ざっぱな表現をするなら，$A_h = \mathcal{T}_h^* \mathcal{T}_h$ と置いて，対応する定常問題

$$A_h U_h = P_h f \tag{24}$$

に対して好ましい性質が得られているなら，先に非適合要素法で用いたのと類似な議論により，非定常問題に対する情報が得られるわけである。

以上と同様な考察は共通の形式の定常問題を有する波動方程式やSchrödinger方程式に対しても成立する．ただしそれぞれに応じて用いるtechniqueに多少の差が存在する。またハイブリッド変位法などについても何らかの結果が得られるものと思う。

4. 結　言

時間の入った問題の誤差評価手法について多少の考察を述べた。すなわちある種の発展方程式では対応する定常問題に対する有限要素スキームに対して得られた結果を有効に使用できる。ここではGalerkin schemeについて考察したが，それはt方向の離散化に関する誤差を知る基礎にもなるであろう。また最初に述べたように，半群の近似の理論を用いればある程度統一的な理論が展開できるものと期待できよう。また非線形問題に対しても今後いろいろな考察が可能になろう。ただ注意すべきは有限要素法は原則としてHilbert spaceでの近似理論であり，例えば連続関数の空間などでの取り扱いにはいろいろ不便が多いと思われることである。こ

の点について userの不満，誤解，不信，etc.が満ち満ちていることを忘れてはなるまい。

《文献》

(1) H. Fujii "Finite Element Schemes: Stability and Convergence" in 'Advances in Computational Methods in Structural Mechanics' UAH Press (1972)

(2) B. Swartz & B. Wendroff "Generalized Finite Difference Schemes" Math. of Comp. 23 37-49 (1969)

(3) F. Kikuchi & Y. Ando " A Finite Element Method for Initial Value Problems" Proc. 3rd Conf. Matrix Methods Struct. Mech. (1971)

(4) T. Miyoshi "Convergence of Finite Element Solutions Represented by a Non-Conforming Basis", Kumamoto J. Sci. (Math.) 9. 11 (1972)

(5) F. Kikuchi & Y. Ando "Convergence of Simplified Hybrid Displacement Method for Plate Bending" J. Fac. Eng. Univ. Tokyo. (B) 31 693 (1972)

(6) M. Schultz " Spline Analysis" Prentice-Hall (1973)

本文 3. の手法は (6) のものを発展させたものである。2. は (2), (3) の手法である。