数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 72-83

Fermat型の超曲面の対称群による商空間について

東大 理 大学院　川崎徹郎

Brieskorn型の超曲面とは $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の方程式

$$z_0^{a_0} + z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n} = 0$$

で定義される超曲面である。これは原点に孤立特異点をもちその特異点の構造は詳細に調べられている。(Brieskorn [1], Pham [3], Sakamoto [4])

特に $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = d$ の時, Fermat型といい, この時は座標の置換によって, $(n+1)$-文字の置換の作る対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ が作用する。$\mathbb{C}^{n+1}$ の対称群による商空間は再び $\mathbb{C}^{n+1}$ であるから、Fermat型の超曲面の対称群による商空間は $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の超曲面と考えることができる。すぐにわかることであるが, この超曲面は原点に孤立特異点をもつ。この特異点の構造を調べてみよう。

Fermat型の多項式は斉次であるから、$P_n\mathbb{C}$ の超曲面を定義

する。この超曲面は特異点を持たない。そして座標の置換によって対称群が作用することもわかる。その商空間は特異点を持つ解析空間であるが、我々は有理ホモロジー多様体と考える。Zagier [5] による一般論から我々はその L-類を計算することができる。

§1. 予備的な注意

(n+1)-変数の対称函数は $\mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ から $\mathbb{C}$ への写像と考えることができる。σ_i を次数が i の基本対称式としよう。すると

$$\sigma : \mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1} \xrightarrow{(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1})} \mathbb{C}^{n+1}$$

は $\mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ から $\mathbb{C}^{n+1}$ への写像を定義する。

<u>命題</u>(1,1). σ は解析空間の間の同型を与える。

証明. σ_i は次の公式を満たす。

$$\prod_{i=0}^{n} (t + z_i) = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_i \, t^{n+1-i}$$

根と係数の関係は σ が同型であることを示している。

$\mathfrak{S}_{n+1}$ は座標の置換により $P_n\mathbb{C}$ や $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に作用する。

$b=(b_0,\cdots,b_n)$ を $(n+1)$-個の正の整数のつくる組とする。空間 $P'(b)$ を

$$P'(b) = \mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\sim$$

$$\left((z_0,\cdots,z_n) \sim (\lambda^{b_0}z_0,\cdots,\lambda^{b_n}z_n),\ \lambda\in\mathbb{C}^*\right)$$

と定義する。

命題 (1,2). 次の同相がある。

$$S^{2n+1}/\mathfrak{S}_{n+1} \cong S^{2n+1}$$

$$P_n\mathbb{C}/\mathfrak{S}_{n+1} \cong P'(1,2,\cdots,n+1)$$

証明. S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 上の線型な $\mathbb{R}^+$-作用による商空間と考える。すると

$$S^{2n+1}/\mathfrak{S}_{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\mathbb{R}^+)/\mathfrak{S}_{n+1}$$

$$P_n\mathbb{C}/\mathfrak{S}_{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\mathbb{C}^*)/\mathfrak{S}_{n+1}$$

ところが $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 上の $\mathfrak{S}_{n+1}$-作用は線型な $\mathbb{R}^+$- 又は $\mathbb{C}^*$-作用と交換するから

$$\left(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/(\mathbb{R}^{+}\text{又は }\mathbb{C}^{*})\right)/\mathfrak{S}_{n+1}$$
$$=\left(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\mathfrak{S}_{n+1}\right)/(\mathbb{R}^{+}\text{又は }\mathbb{C}^{*})$$

である。ところが命題(1,1)より $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}/\mathfrak{S}_{n+1}\cong\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 従って後の方の $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ に導入される $\mathbb{R}^{+}$－又は $\mathbb{C}^{*}$－作用を調べれば命題(1,2)は得られる。

整数 $d\geqq 2$ に対して $V_{d,t}$ $(t\in\mathbb{C})$, Σ_d, X_d を次の様に定義する。

$$V_{d,t}=\{(z_0,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^{n}\mid z_0^d+\cdots+z_n^d=t\}$$

$$\Sigma_d=V_{d,0}\cap S^{2n+1}$$

$$X_d=\{(z_0:\cdots:z_n)\in P_n\mathbb{C}\mid z_0^d+\cdots+z_n^d=0\}$$

これ等の空間にはすべて $\mathfrak{S}_{n+1}$ が座標の置換によって作用する。その商空間を $'$ をつけて表わす。

$$V'_{d,t}=V_{d,t}/\mathfrak{S}_{n+1},\quad \Sigma'_d=\Sigma_d/\mathfrak{S}_{n+1},\quad X'_d=X_d/\mathfrak{S}_{n+1}$$

$V'_{d,0}$, X'_d は Newton 多項式によって定義される $\mathbb{C}^{n+1}$, $P'(b)$ の超曲面である。

§2. $V'_{d,t}$ について

<u>命題</u>(2,1). $V'_{d,0}$ は原点以外に特異点を持たない。$t \neq 0$ の時 $V'_{d,t}$ は特異点を持たない。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1} \arrow[r, "z_0^d+\cdots+z_n^d"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \\
\mathbb{C}^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1} & \\
\mathbb{C}^{n+1} \arrow[u, "\cong", "\sigma"'] \arrow[uur, "f_d\ (\text{Newton 多項式})"'] &
\end{tikzcd}$$

多項式函数 $z_0^d+\cdots+z_n^d$ は原点のみに特異点をもつ。σ は原点を原点に写す。従って f_d が特異点をもつとすれば原点だけである。

$t \neq 0$ のとき $V_{d,t}$ はすべて $\mathfrak{S}_{n+1}$-作用も含めて同型である。それを V_d と表わす。$\mathfrak{S}_{n+1}$ による商空間を V'_d と記す。

<u>定理</u>(2,2). V'_d は $(d-1)$-単体の n-切片と同じホモトピー型をもち、写像 $\pi: V_d \longrightarrow V'_d$ はホモロジー群の全射

を与える。

証明。 V_d は

$$U_d = \{ z \in V_d \mid z_i^d \text{ は実数で } \geqq 0 \}$$

を変位レトラクトにもつ。そして U_d は d-点の $(n+1)$-個の結に同相である。この変位レトラクションは $\mathfrak{S}_{n+1}$ の作用に関して同変である。従って

$$V_d' \simeq \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d / \mathfrak{S}_{n+1}$$

が得られる。($\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d$ 上 $\mathfrak{S}_{n+1}$ は因子の置換として作用する) 純粋に組合せ論的な議論により $(\Delta^{d-1})^n$ が $\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d / \mathfrak{S}_{n+1}$ の変位レトラクトであることがわかる。この議論でホモロジー群の対応を見れば後半が得られる。

Brieskorn 型の超曲面の研究により、各 $r = (r_0, \cdots, r_n)$ $(0 < r_i < d)$ に対して $H_n(V_d)$ の元 L_r があって $\{L_r\}$ が $H_n(V_d)$ の基底を与えていることがわかる。(記号は Zagier [5] に従った)。今 $0 < r_0 < \cdots < r_n < d$ なる r に対して R を集合 $\{r_0, \cdots, r_n\}$ とする。その時 $L'_R \in H_n(V_d')$ を $L'_R = \pi_* L_r$ $(\pi_* : H_n(V_d) \longrightarrow H_n(V_d'))$ で定義す

ると $\{L'_R\}$ は $H_n(V'_d)$ の基底を与えている。

<u>定理</u>(2.3). $H_n(V'_d)$ の交わり形式は

$$L'_R \circ L'_S = \begin{cases} (-1)^t(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } 1 \text{ 残りが } 0 \\ (-1)^{n-t}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } -1 \text{ 残りが } 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。さらに V'_d の指数は

$$I(V'_d) = \#\{R \mid 0 < r_0 + \cdots + r_n < d \mod 2d\} - \#\{R \mid d < r_0 + \cdots + r_n < 2d \mod 2d\}$$

で与えられる。

多項式函数 f_d の Milnor-ファイブレイション

$$\varphi' : S^{2n+1} - V'_{d,0} \xrightarrow{f_d/|f_d|} S^1$$

を考え, $e^{2\pi i t}$ 上のファイバーを F'_t とおく。すると $F'_t \cong V'_d$ である。φ' を $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ $(t \longmapsto e^{2\pi i t})$ によって引戻そう。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S^{2n+1}-V'_{d,0}} & \longrightarrow & S^{2n+1}-V'_{d,0} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \exp^*\varphi'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & S^1 \end{array}$$

$\exp^*\varphi'$ は自明だから，同型

$$\theta' : V'_d \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{S^{2n+1}-V'_{d,0}}$$

が得られる。$\theta'_t : V'_d \longrightarrow F_t$ を θ' の $V'_d \times \{t\}$ への制限とする。f_d の Seifert 形式とは双線型写像 $\gamma : H_n(V'_d) \otimes H_n(V'_d) \longrightarrow \mathbb{Z}$ で

$$\gamma(x, y) = L_{S^{2n+1}}(\theta_{0*}x, \theta_{\frac{1}{2}*}y)$$

（$\theta_{0*}x$ と $\theta_{\frac{1}{2}*}y$ の S^{2n+1} の中でのまつわり数）

なるもののことである。

<u>定理</u> (2.4). f_d の Seifert 形式は

$$\gamma(L'_R, L'_S) = \begin{cases} (-1)^{n+t+1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_k - r_k \text{ のうち } t \text{ 個が } -1 \text{、残りが } 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。

注意。 孤立特異点のまわりの可微分的な構造は Seifert 形式によって完全に決定される。(Kato [2])

定理(2.3) の証明. 次の補題による。

補題. M をコンパクト $(2n)$-次元向き付き多様体、G を M に作用している有限群で、その作用は向きを保存し、有効であるとする。その時 $x \in H_n(M;\mathbb{Q})^G$, $y \in H_n(M;\mathbb{Q})$ $\pi_* : H_n(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_n(M/G;\mathbb{Q})$ に対して

$$\pi_* x \circ \pi_* y = \frac{1}{|G|} x \cdot y$$

が成立つ。

証明. M/G は有理ホモロジー多様体であるから、基本類 $[M/G, \partial M/G] \in H_{2n}(M/G, \partial M/G)$ があって Poincaré 双対

$$D' : H^k(M/G, \partial M/G;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2n-k}(M/G;\mathbb{Q})$$

を定義し, 同型である。この時 $\pi_*[M, \partial M] = |G|\,[M/G, \partial M/G]$ だから M の双対と M/G の双対は $|G|$-倍だけ違う。交わりは双対を通して定義されるから, 上の結果が成立つ。

定理(2.4)の証明。 まつわりは Alexander 双対を通して定義されるから、定理(2.3)の証明と同様のことが成立つ。

§3. X'_d について

$\overline{V_d}$ を V_d へ(大きな円板)とすると

$$V_d \cong \mathrm{int}\,\overline{V_d}, \quad \partial \overline{V_d} = \Sigma_d$$

また X_d は Σ_d を自由な S^1-作用で割ったものである。このことを $\mathfrak{S}_{n+1}$ で割ると

$$V'_d \cong \mathrm{int}\,\overline{V'_d}, \quad \partial \overline{V'_d} = \Sigma'_d, \quad \Sigma'_d / S^1 = X'_d$$

となる。但し最後の S^1-作用は固定点はないが、自由ではない。V'_d の交わりについての考察から次の命題が得られる。

<u>命題</u>(3.1). Σ'_d の Betti 数は

$$\mathrm{rank}\ H^i(\Sigma'_d) = \begin{cases} 1 & i = 0,\ 2n-1 \\ \mathrm{corank}\, S & i = n-1,\ n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。但し S は V'_d の交わり行列でその余階数は

$$\operatorname{corank} S = \#\{R \mid r_0 + \cdots + r_n \equiv 0 \mod d\}$$

で与えられる。

Σ_d 上の S^1-作用は固定点をもたないから、有理係数のGysin-系列が得られる。よく行われる完全性の議論から次の命題が得られる

<u>命題</u> (3.2). X_d' の有理コホモロジーは

$$H^*(X_d'; \mathbb{Q}) \cong H^*(P_{n-1}\mathbb{C}) \oplus \left((\operatorname{corank} S)\cdot \mathbb{Q}, \underset{のところ}{次数 = n-1}\right)$$

で与えられる。(後の因子については環構造はわからない。)

<u>定理</u>(3.3). X_d' の L-類は次の式で表わされる。

$$L(X_d') = \frac{\tanh dx}{dx} \sum_{0 \le \xi < \pi} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{kx}{\tanh k(x + i\xi)}$$

但し x は X_d 上のHopf-バンドルのEuler-類の符号を変えたもの。(写像 $X_d \longrightarrow X_d'$ により $H^2(X_d'; \mathbb{Q})$ の元と考える。)

証明。 $P_n\mathbb{C}/\mathfrak{S}_{n+1} \cong P'(1,2,\cdots,n+1)$ で $P'(1,\cdots,n+1)$ のL-類は計算されている（Zagier [5]）

$$L(P'(1,2,\cdots,n+1)) = \sum_{0\le \zeta<\pi} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{kx}{\tanh k(x+i\zeta)}$$

一方 X_d の $P_n\mathbb{C}$ における法ベクターバンドルのL-類はわかっているから上の結果を得る。この時各 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ による固定点集合 $(P_n\mathbb{C})^\sigma$ と X_d とが t-正則に交わっていることを確かめる必要がある。

参考文献

1. E. Brieskorn: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Inventiones Math. 2 (1966) 1-14.
2. M. Kato: A classification of simple spinnable structures on S^{2n+1} to appear in J. Math. Soc. Japan.
3. F. Pham: Formules de Picard-Lefschetz generalisees et ramifications integrales, Bull. Soc. Math. France 93 (1965) 333-367
4. K. Sakamoto: Milnor fibrings and their characteristic maps, to appear in J. Math Soc. Japan.
5. D. B. Zagier: Equivariant Pontrjagin classes and applications to orbit spaces, Lec. Note in Math. 290, Springer, 1972.