数理解析研究所講究録
第203巻 1974年 84-89

7次元ホモトピー球面の上のSO(3)作用について

津田塾大　　吉田朋好

§1. 序

7次元ホモトピー球面の上に、どのようなSO(3)の作用があり得るか？を調べるのが目的である。SO(3)の球面への作用の研究としては、R.W. RICHARDSON [4], MONTGOMERY-SAMELSON [3] 等がある。[4] では、5次元球面上には、同変位相同型を除いて、線形な作用しか存在しないことが示されている。又、[3] では S^7 への微分可能な作用に於ては、必ず次元が2より小さい軌道(orbit)の存在が示されている。これは言い換えれば SO(2)(⊂SO(3)) の固定点が必ず存在するということである。この定理の証明は、微分可能性とホモロジーの性質しか用いないので、ホモトピー球面についても、そのまま通用する。我々は、この定理を基礎にして、7次元ホモトピー球面へのSO(3)の微分可能な作用を調べてみようと思う。

§2、SO(3)作用の構成

この§では、軌道型(orbit type)の数が2又は3の$SO(3)$作用を若干構成してみる。それらは、3つのタイプにわかれる。

タイプ(I)

Xを5次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。D^3を3-胞体とし、$X \times D^3$に$SO(3)$作用を、Xには自明に且つD^3には3次元実既約表現(以下、αと記す)によって入れる。$\partial(X \times D^3)$はh-同境定理により7次元標準球面S^7に微分同相である。従って、我々は、S^7の上の$SO(3)$作用を得る。

とくに$X = D^5$とすれば、この作用は$\alpha \oplus 5\theta$(θは1次元自明表現)となる。

タイプ(II)

Xを4次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。又、$S^2 \subset \partial X$を埋め込まれた2次元球面とする。我々は、Xに次の軌道構造を入れる。

$$(SO(3)/D_2) \quad \text{on} \quad X - \partial X$$

$$(SO(3)/N) \quad \text{on} \quad \partial X - S^2$$

$$(\text{固定点}) \qquad \text{on} \quad S^2$$

ここにD^2は位数4の2面体群、Nは$SO(2)$の正規化群。同変位相同型を除いて、このような軌道構造をもつ$SO(3)$-空間は2種類、存在する[　　]。しかし、そのうちの一つだけが、微分可能作用をもつ微分可能多様体となる。とくに、それは、7次元標準球面S^7に微分同相となることがわかる。(これは証明を要するが、はぶく。)

$X = D^4$とすれば、この作用は、$\beta \oplus 3\theta$となる。(βは5次元実既約表現)

タイプ(Ⅲ)

Xを4次元、コンパクト、可縮で境界のある微分可能多様体とする。$S^1 \subset \partial X$を埋めこまれた1次元球面とする。$\tilde{\mathbb{Z}}$を、$\pi_1(\partial X - S^1) \longrightarrow H_1(\partial X - S^1) \approx \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}$によって、ねじった$\mathbb{Z}$をファイバーとするねじれ係数とする。($\mathbb{Z}$は整数環をあらわす)。我々は$H^2(\partial X - S^1 ; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$の仮定をおく。

Xに次の軌道構造を入れる。

$$(SO(3)\ ) \qquad \text{on} \quad X - \partial X$$

$$\left(\, SO(3)/SO(2) \,\right) \quad \text{on} \ (\partial X - S^1)$$

$$(\text{固定点}) \quad \text{on} \ S^1$$

同変位相同型を除いて、このような軌道構造をもった $SO(3)$-空間は、2種類ある([　])。しかし そのうちの一つだけが、微分可能作用をもった、微分可能多様体となる。とくに それは、ホモトピー球面となる。(証明略)

$X = D^4$, $S^1 \subset S^3 = \partial D^4$ を自明な結び目 とすれば S^7の上の作用 $2\alpha \oplus 2\theta$ を得る。

§3. 主定理

我々の主定理は 次のように述べられる。

定理:(Σ, φ) を ホモトピー7-球面の上のなめらかな $SO(3)$-作用とし、それは軌道型の数が 2ないしは3であるとする。この時、(Σ, φ) は §2で構成されたもののうちの一つとなる。とくに、Σが異種球面の場合には、タイプ(III)に限る。

§4、定理の証明の概略、

まず、A. BOREL の定理(　　　　)から、次のことがわかる。

$$7 - \dim F(D_2) = 3\dim F(\mathfrak{D}_2) - 3\dim F(D_1)$$

ここに $F(H)$ は H による固定点集合(それは部分多様体)をあらわす。これより、$\dim F(\mathfrak{D}_2) = 5$, $\dim F(D_2) = 4$ 又は $\dim F(\mathfrak{D}_2) = 3$, $\dim F(D_2) = 1$ となる。次の4つの場合にわける。

CASE 1. $\dim F(\mathfrak{D}_2) = 5$ かつ $F(D_2) = F(N)$

CASE 2. $\dim F(\mathfrak{D}_2) = 5$ かつ $F(D_2) \supsetneqq F(N)$

CASE 3. $\dim F(\mathfrak{D}_2) = 3$ かつ $F(\mathfrak{D}_2) = F(SO(2))$

CASE 4. $\dim F(\mathfrak{D}_2) = 3$ かつ $F(\mathfrak{D}_2) \supsetneqq F(SO(2))$

このそれぞれの場合に、まず軌道型を決定し、相互の関連を見てゆけば、CASE 1 は §2 のタイプ(I)に、CASE 2 はタイプ(II)に CASE 3 はタイプ(III)に帰着することがわかる。又、CASE 4 の場合には、軌道型の数は4つ以上ある。

CASE 4 の場合は線形なものとしては、$\alpha \oplus \beta$ と $\gamma \oplus \theta$ (γ は7次元実既約表現)とがあるが、軌道型はこのいずれかに一致することがわかる。又、この場合も、構成の仕方はわかるが、CASE 1〜3 まで

のように、はっきりした形では得られていない。

Reference.

[1]. A. Borel et al. ; Seminar on Transformation Groups ; Ann. of Math. Studies No. 46.

[2]. G. E. Bredon ; Introduction to Compact Transformation Groups ; Academic Press.

[3]. D. Montgomery - H. Samelson ; Action of SO(3) on S^n ; Pacific J. Math 12 (1962) p 649 - 659

[4] R. W. Richardson ; Actions of the rotation group on the 5-sphere . Ann. of Math. 74 (1961) p. 414 - 423