数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 90-100

Unitary cobordism と complex K-theory の関係についての注意

阪大 理　柴田 勝征

§1. 序

我々は [7] §7 において、ある種の equivariant map の非存在を証明する為に、unitary cobordism theory に値を持つ特性類の計算を行なった。同様の Cobordism 特性類は、さらに Munkholm-Nakaoka [4] による Borsuk-Ulam の定理の拡張、Nakaoka [5] による immersion と imbedding の問題への応用にと発展させられた。

ところが、[7] における我々の cobordism を用いた直接計算と、[4], Appendix における、同じ invariant を complex K-theory へ落としてから行なった計算とは、同じ数値を与えている。

この小論の目的は、上に述べた数値の一致の理由を明らかにし、合わせて、[4], [5], において complex K-theory を用いて得られた計算結果は、unitary cobordism theory を用いて計算してもそれ以上改良できない事を示す事である。

§2. Euler classes in $U^*(\ )$ and $K^*(\ )$

以下、我々はCW複体とそれらの间の連続写像の全体でつくるカテゴリーの中で考えてゆく事にする。

Quillen [6] によれば、Boardman map

$$B : U^*(\ ) \longrightarrow K^*(\ )[[t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n, \cdots]]$$

という stable, natural and multiplicative な functor が存在して、complex line bunde L の Euler class $e(L)$ に対しては

$$B(e(L)) = \gamma^1(L) + t_1\gamma^1(L)^2 + t_2\gamma^1(L)^3 + \cdots\cdots$$

となる。ここに $\gamma^1(L) = 1_{\mathbb{C}} - L$ である。従って

補題 2.1 (Hattori [3])

$$B(e(V)) = \gamma^{\dim V}(V)\cdot\gamma_t(V - \dim V)$$

但し、$\gamma^{\dim V}(V) = \sum(-1)^i\lambda^i(V)$

$$\gamma_t(V-\dim V) = \prod_{i=1}^{\dim V}(1 + t_1(1-V_i) + t_2(1-V_i)^2 + \cdots\cdots)$$

そして V は形式的に、$V = \sum_{i=1}^{\dim V} V_i$ と、line bundles の和に書けている。

さて次に、Conner-Floyd [2] によって定義された natural and multiplicative transformation

$$\mu_c : U^*(\ ) \longrightarrow K^*(\ )$$

について考えよう。

定理 2.2.

X が CW 複体で、Boardman map

$$B : U^*(X) \longrightarrow K^*(X)[[t]]$$

が単射になっていると仮定する。このとき、X 上の complex vector bundles $V_1, \cdots, V_k$ と任意の non-negative integers の列 $i_1, \cdots, i_k$ ($^\forall k \geqq 1$) に対して、次の2条件は同値である：

(1). $e(V_1)^{i_1} \cdots\cdots e(V_k)^{i_k} = 0$ in $U^*(X)$.

(2). $\mu_c(e(V_1)^{i_1} \cdots\cdots e(V_k)^{i_k}) = 0$ in $K^*(X)$.

（証明） (1) ⇒ (2) は明らか。 Conner-Floyd [2] により、$\mu_c(e(V)) = \gamma^{\dim V}(V)$ が知られているから、前の補題2.1を用いると、(2) ⇒ $B(e(V_1)^{i_1} \cdots\cdots e(V_k)^{i_k}) = 0$. ところが B は単射と仮定しているから、(1) を得る。 Q.E.D.

§3. Atiyah-Hirzebruch スペクトラル列

Atiyah-Hirzebruch [1] は

$$E_2^{p,q} \cong H^p(X;\, K^q(pt)) \Longrightarrow K^{p+q}(X)$$

となるスペクトル列 $\{E_2^{p,q},\, d_2^{p,q}\}$ を構成した。それと同様の構成により、

$$\hat{E}_2^{p,q} \cong H^p(X;\, U^q(pt)) \Longrightarrow U^{p+q}(X)$$

$$\tilde{E}_2^{p,q} \cong H^p(X;\, (K^*(pt)[[\mathbf{t}]])_q) \Rightarrow (K^*(X)[[\mathbf{t}]])_{p+q}$$

となるスペクトル列 $\{\hat{E}_2^{p,q}\}$, $\{\tilde{E}_2^{p,q}\}$ が得られる事はよく知られている。但し、$\dim t_i = -2i$ として、$(\quad)_q$ は、q 次元成分を表わしている。Conner-Floyd map μ_c と Boardman map B は、スペクトル列の準同型

$$\bar{\mu}_c : \{\hat{E}_2^{p,q}\} \to \{E_2^{p,q}\},\quad \bar{B} : \{\hat{E}_2^{p,q}\} \to \{\tilde{E}_2^{p,q}\}$$

を引き起こす。これらについて、tom Dieck は次の2つの命題を主張した([8])。証明の為には、Yoshimura [10] の様な厳密な議論が必要であるが、ここでは省略する。

命題 3.2.

次の3条件は同値である:

(1). スペクトル列 $\{E_2^{p,q}\} \Rightarrow K^*(X)$ は collapse する。

(2). スペクトル列 $\{\hat{E}_2^{p,q}\} \Rightarrow U^*(X)$ は collapse する。
(3). スペクトル列 $\{\hat{\hat{E}}_2^{p,q}\} \Rightarrow K^*(X)[[t]]$ は collapse する。

命題 3.3.

$K^*(X)$ に関するスペクトラル列 $\{E_2^{p,q}\}$ が collapse すれば、Boardman map $B : U^*(X) \longrightarrow K^*(X)[[t]]$ は単射である。

従って、2.2 と 3.3 から、次の系を得る。

系 3.4.

X が CW複体で $K^*(X)$（3.2により、$U^*(X)$ としても同値）に関する Atiyah－Hirzebruch スペクトラル列が collapse すると仮定する。X 上の complex vector bundles $V_1, \cdots, V_k$ と任意の non-negative integers の列 $i_1, \cdots, i_k$ に対して次の２条件は同値である：

(1). $e(V_1)^{i_1} \cdots e(V_k)^{i_k} = 0$ in $U^*(X)$.

(2). $\mu_c(e(V_1)^{i_1} \cdots e(V_k)^{i_k}) = 0$ in $K^*(X)$.

§4. 応用例

$\boxed{\text{例 4.1 (Vick [9], Shibata [7], Munkholm-Nakaoka [4])}}$

ある種の equivariant map の非存在に関する問題であるが、計算のポイントは、p を素数とし、$r \geqq 1$, $(p, r) = 1$, $a \geqq 1$, $k \geqq 0$ を整数とし、ρ を標準的被覆 $S^{2n+1} \longrightarrow L^n(p^{a+1}r)$ に associate された complex line bundle とする時に、

$$e(\rho^{p^a r})^{k+1} = 0 \quad in \quad U^*(L^j(p^{a+1}r)) \qquad 0 \leqq {}^\forall j \leqq n$$

となる様な n の最大値を求める事であった。系 3.4 によれば、これは

$$\gamma^1(\rho^{p^a r})^{k+1} = 0 \quad in \quad K^*(L^j(p^{a+1}r)) \qquad 0 \leqq {}^\forall j \leqq n$$

となる様な n の最大値を求める事と同値である。

$\boxed{\text{例 4.2 (Munkholm-Nakaoka [4])}}$

上の例と同じ記号を用いると、問題は、奇数 q と整数 $m, n \geqq 1$ に対して、$U^*(L^n(q))$ において

$$e(\rho)^j \left(\prod_{i=1}^{q-1/2} e(\rho^i) \right)^m = 0 \qquad {}^\forall j > d$$

となる様な d の最小値を求める事であった。系 3.4 により、これは、$K^*(L^n(q))$ において

$$\gamma^1(\rho)^j \left(\prod_{i=1}^{q-1/2} \gamma^1(\rho^i) \right)^m = 0 \qquad {}^\forall j > d$$

となる様な d の最小値を求める事と同値である。

$\boxed{\text{例 4.3 (Nakaoka [5])}}$

[5] において示された、写像 $f: M \longrightarrow N$ が topological immersion と homotopic になり得るための integrality condition は、[5] における証明の中で明らかな様に、invariant $\psi_f = i^* \tau^{-1}(e((id \times f)^* \nu_1'))$ が消える事 ($\psi_f = 0$) と同値である。但し、ここに

$$U^*(B_G \times N) \xrightarrow{(id \times f)^*} U^*(B_G \times M) \underset{\cong}{\overset{\tau}{\longleftarrow}} U^*(E_G \underset{G}{\times} W)$$

$$\xrightarrow{i^*} \varinjlim U^*(E_G \underset{G}{\times} (W - M))$$

であって、G は order k の cyclic group, W は $M = \Delta M$ の M^k における equivariant neighbourhoods の族を動き、ν_1' は $B_G \times N$ の上の、ある complex vector bundle である。さて、

$$\underrightarrow{\mu_c} = \varinjlim \{ \mu_c : U^*(E_G \underset{G}{\times} (W - M)) \longrightarrow K^*(E_G \underset{G}{\times} (W - M)) \}$$

$$\underrightarrow{B} = \varinjlim \{ B : U^*(E_G \underset{G}{\times} (W - M)) \longrightarrow K^*(E_G \underset{G}{\times} (W - M))[[t]] \}$$

と定義しよう。いままでの例と同様に、我々は次の命題を証明する。

多様体 M が (i) $H^{2j+1}(M; Z) = 0 \quad (\forall j \geq 0)$

(ii) $\mathrm{Torsion}(H^{2j}(M; Z)) = 0 \quad (\forall j \geq 0)$

を満足する時、次の2条件は同値である：

$$\boxed{\begin{array}{l}(1).\ \ \psi_f = 0 \quad \text{in} \quad \varinjlim U^*(E_G \times_G (W-M)).\\ (2).\ \ \underrightarrow{\mu_c}(\psi_f) = 0 \quad \text{in} \quad \varinjlim K^*(E_G \times_G (W-M)).\end{array}}$$

上の条件(2)は、K-theory における Nakaoka の integrality と同値になっている事は容易にわかる。

（命題の証明）

(1) ⇒ (2) は明らか。従って、$\underrightarrow{\mu_c}(\psi_f)=0$ を仮定する。

$$0 = \underrightarrow{\mu_c}(\psi_f) = i^* \tau^{-1} \mu_c(e((id \times f)^* \nu_1')),$$

$$\begin{aligned}\underrightarrow{B}(\psi_f) &= i^*\tau^{-1} B(e((id\times f)^*\nu_1'))\\ &= i^*\tau^{-1}\{\mu_c(e((id\times f)^*\nu_1'))\}\cdot i^*\tau^{-1}\{\gamma_t((id\times f)^*\nu_1' - \dim \nu_1')\}\end{aligned}$$

だから $\underrightarrow{B}(\psi_f)=0$ 。故に、$\underrightarrow{B}$ が単射である事を言えばよい。

Exact 列（[5]参照）

$$\xrightarrow{\cup e(\nu_1)} H^{2p}(B_G \times M, U^{2q}(pt)) \xrightarrow{i^*\tau^{-1}} \varinjlim H^{2p}(E_G \times_G (W-M), U^{2q}(pt))$$

$$\xrightarrow{\delta} H^{2p+1-2(k-1)m}(B_G \times M, U^{2q}(pt))$$

を考えると、我々の仮定(i)(ii)によって、偶数次元では、$i^*\tau^{-1}$ は全射になっている。また条件(i)(ii)は、スペクトル列 $\{\hat{E}_2^{p,q} \Rightarrow U^*(B_G \times M)\}$ が collapse する事をも意味す

るから、スペクトル列の準同型

$$\tau^*\iota^{-1} : \{\hat{E}_r^{p,q} \Rightarrow U^*(B_G \times M)\} \longrightarrow \{\hat{E}_r'^{p,q} \Rightarrow \varinjlim U^*(E_G \underset{G}{\times} (W-M))\}$$

を考えると、$\{\hat{E}_r'^{p,q} \Rightarrow \varinjlim U^*(E_G \underset{G}{\times} (W-M))\}$ も偶数次元では collapse している。従って系 3.4 により $\underline{B}$ は $\varinjlim U^{ev}(E_G \underset{G}{\times} (W-M))$ の上では単射であり、$\underline{\mu_c}(\psi_f) = 0 \Rightarrow \psi_f = 0$ が言えた。Q.E.D.

$\boxed{\text{例 4.4 (Nakaoka [5])}}$

Null homotopic な写像 $f : M \longrightarrow N$ が embedding と homotopic になるための必要条件 $\varphi_f = 0$ ([5] 参照) は、ある integrality condition を導くが、その逆は成り立たない。

前例 4.3 と同様にして、

多様体 M が (i) $H^{2j+1}(M; Z) = 0$ $(\forall j \geq 0)$ (ii) $\mathrm{Torsion}(H^{2j}(M; Z)) = 0$ $(\forall j \geq 0)$ を満足する時、次の 2 条件は同値である。 (1). $\varphi_f = 0$ in $U^*(E_G \underset{G}{\times} (M^k - \Delta M))$. (2). $\mu_c(\varphi_f) = 0$ in $K^*(E_G \underset{G}{\times} (M^k - \Delta M))$.

が証明できる。また、embedding に関する [5] の integrality condition は $\psi_f = 0$ (前例 4.3 参照) プラス $\Omega_0^*(e(-\nu_1)e(\eta)^n)$

$=0$ in $U^*(M^k)$ と同値である。但し、$\pi_0 : B_G \times M^k \to M^k$ は projection で、$-\nu_1$ と η は $B_G \times M^k$ 上の、ある complex vector bundles である。従って、前例と系3.4から、次の命題が得られる。

多様体Mが (i) $H^{2j+1}(M;Z)=0$ $(\forall j \geqq 0)$
(ii) $\mathrm{Torsion}(H^{2j}(M;Z))=0$ $(\forall j \geqq 0)$
を満足する時、下の2条件は同値である：
(1). Embedding に関する[5]の integrality condition
(2). その K-theory version

参考文献

[1] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch : Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symposium in Pure Math., AMS, 3 (1961), 7−38.

[2] P.E. Conner and E.E. Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Math., 28, Springer Verlag, Berlin, 1964.

[3] A. Hattori : Equivariant characteristic numbers and integrality theorem for anitary T^n-manifold, to appear.

[4] H. J. Munkholm and M. Nakaoka : The Borsuk-Ulam theorem and formal group laws, Osaka J. Math. 9 (1972), 337–349.

[5] M. Nakaoka : Characteristic classes with values in complex cobordism, Proc. Int. Conf. Manifolds, Tokyo, 1973.

[6] D. Quillen : Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Adv. in Math. 7 (1971), 29–56.

[7] K. Shibata : Oriented and weakly complex bordism algebra of free periodic maps, Trans. AMS, 177 (1973), 199–220.

[8] T. tom Dieck : Bordism of G-manifolds and integrality theorems, Topology 9 (1970), 345–358.

[9] J.W. Vick : An application of K-theory to equivariant maps, Bull. AMS, 75 (1969), 1017–1019.

[10] Z. Yoshimura : On cohomology theories of infinite CW-complexes, I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ, vol. 8 no. 2, 4 (1972).