数理解析研究所講究録
第 203 巻 1974 年 101-108

Problem session のまとめ

（川久保）

1. Oriented（または weakly almost complex）manifold M と、M 上の orientation-（weakly almost complex structure-）preserving な $Z_{p^{r_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p^{r_k}}$ action に対して、この action の fixed point set の次元を、多様体 M の次元によって評価する不等式を導け。同様の問題を S^1-action について考察せよ。

2. Z_{p^2}-action に関する G-signature theorem を、Atiyah-Singer の理論を用いずに、幾何学的に与えよ。

（c.f. Kawakubo-Uchida : J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 351-355.
Hattori-Taniguch : 〃 〃 24 (1972) 701-731.）

（内 田）

1. $n \geqq 3$ に対して、U_* のイデアル $SF_*(SU(n))$ を決定したい。そのため、まず $P_3(\mathbb{C})$, $P_4(\mathbb{C})$ 上に不動点をもたない $SU(3)$ 作用が存在するかどうかを判定せよ。

(注、線型作用によっては実現できない。)

2. 球面の直積 $S^m \times S^n$ $(0<m\leq n)$ 上の involution の不動点集合 F のコホモロジー環 $H^*(F;Z_2)$ は、次の空間のコホモロジー環のいずれかと一致することが知られている。

(i) $S^p \times S^q$, $(0\leq p\leq m,\ 0\leq q\leq n)$

(ii) $P^2(q)\# P^2(q)$, $m\geq q$ $(=1,2,4,8)$

(iii) $P^3(q)$, $m>q$ $(=1,2,4,8)$

(iv) $(\mathrm{point})+P^2(q)$, $m>q$ $(=1,2,4,8)$

(v) S^p+S^q, $(0\leq p\leq q\leq n)$

(vi) S^p

但し $H^*(P^k(q);Z_2)=Z_2[t]/(t^{k+1})$, $\deg t=q$.

この中で、(iV) の場合を除いては、存在が知られているが、(iV) の型の不動点集合については、まだ存在が知られていない。その後の Bredon の研究によって、(iV) の型の不動点集合の存在の可能性が残されているのは、

$q=2$, $(m,n)=(3,4)$;

$q=4$, $(m,n)=(5,8),(6,8),(6,9),(7,8),(7,9),(7,10)$

の場合のみである。このような事態が起こり得るかどうか判定せよ。

(注)、この問題は Bredon の一連の研究から生じたものであるが、これについては

G.E. Bredon : Cohomological aspects of transformation groups, Proc. Conf. on Transf. Grs. (1967), Springer

" " : Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press (1972)

を参照せよ。

（井 本）

球面の直積の上の involutions に関する Bredon の諸結果（上の内田氏の問題の項参照）が、球面上の球面 bundle の場合に拡張できるかどうか調べよ。例えば不動点集合のタイプが (v) $S^p + S^q$ または (vi) S^p の場合に、$2^{\phi(m)} \mid q-p$ が成り立つか？

（及 川）

Regular $O(n)$-manifolds の(コ)ボルディズム群 $\mathfrak{N}_*^{O(n)}(X)$ の構造を調べよ。例えば $n=2$, $X = S^1$ とすると $\mathfrak{N}_*^{O(2)}(S^1) \cong \mathfrak{N}_*^{O(1)}(pt)$. $\mathfrak{N}_*^{O(n)}(X)$ の定義や基本的性質、重要なスペクトル列などについては、

Wasserman–Lazarov : Cobordism of regular $O(n)$-manifolds, Ann. of Math. (2) 93 (1971), 229–251

を参照せよ。

(阿部)

Cyclic group Z_k のある表現 $\alpha: Z_k \to O(m)$ をひとつ固定する。ホモトピー球面 Σ^m 上の smooth semi-free Z_k-action $\varphi: Z_k \times \Sigma^m \longrightarrow \Sigma^m$ が α-球面である、とは φ の不動点 $F(\varphi)$ が、また或るホモトピー球面 Σ^n $(m > n \geq 1)$ となっており、$\forall x \in \Sigma^n$ に対して $(d\varphi)_x: T_x(\Sigma^m) \longrightarrow T_x(\Sigma^m)$ が与える Z_k の表現が α と同値である事を言う。α-spheres の equivariant diffeomorphism による同値類の全体に、connected sum によって和が定義でき、この semi-group を $D_m(\alpha)$ と書く。$n \geq 4$, $m-n > 2$ のとき、$D_m(\alpha)$ は群になる事が示されるが、この群の構造を決定せよ。

(小宮)

1. Oriented bordism module $\Omega_*^{SO}((Z_2)^k; \text{All subgroups})$ の構造を決定せよ。特に、予想として、

① $\Omega_*^{SO}((Z_2)^k; \text{All}) \otimes Z_{(2)}$ は偶数次元生成元による free $\Omega_*^{SO} \otimes Z_{(2)}$-module

② $\Omega_{odd}^{SO}((Z_2)^k; \text{All})$ は 2-torsion group

(注、これらの予想は、研究集会のあとで、小宮氏自身により肯定的に解決された。)

2. さらに、もっと一般に、有限アーベル群 G で、全射：$G \to \mathbb{Z}_2$ が存在するようなものに対して、oriented manifold 上の orientation-preserving な G-action の不動点集合は、一般には orientable とは限らない。このことに注意して、G-action の oriented bordism group $\Omega_*^{SO}(G, All)$ の Ω_*^{SO}-module としての構造を決定せよ。

（吉田）

ホモトピー7次元球面上の smooth $SO(3)$-actions を分類せよ。たとえば isotropy type が3個の場合には、$\partial(X^5 \times D^3$, (trivial)×(standard)) など、3種類の構成法のうちどれかで作られる。（但し、X は contractible manifold。）

（北田）

次の Spin bordism module の構造をしらべよ：

$\Omega_*^{Spin}(S^1 ; \text{All subgroups})$, $\Omega_*^{Spin}(S^1 ; \text{Semi-free})$,

$\Omega_*^{Spin}(\mathbb{Z}_k ; \text{All})$.

（川崎）

リーマン多様体 M 上で定義された波動方程式 $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} = \Delta f$

の固有値によって．Mの振動はどのように表わされるのか？

（柴田）

Metacyclic group $Z_{q,p}=\{x^q=y^p=1,\ yxy^{-1}=x^r\}$ の U^*-cobordism 環の構造を定めよ。

（注、$(p,q)=1$，pまたはqが素数の場合については、研究集会のあとで、提出者自身によって解決された。）

（鎌田）

1. D. Quillen は "Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations", Adv. in Math. 7 (1971), 29-56 の中で、Atiyah-Poincaré 双対性を利用して、コボルディズム群 $U^*(X)$ の幾何学的な定義を与えた。これの equivariant version として、Quillen type の G-コボルディズム群 $U_G^*(X)$ が定義される。$U_G^*(X)$ の性質を調べよ。

2. Kamata-Minami "Bordism groups of dihedral groups" J. Math. Soc. Jap., 25 (1973), 334-341 において定義された微分多様体 $S^{2m+1}\times S^n/D_p=D_p(m,n)$ （D_p は dihedral 群）の tangent bundle を調べよ。

（中岡）

1. 球面上の有限群の自由作用に関する一連の問題

(1) $Z_2 \times Z_{p,3}$ は S^5 に自由に作用するか？（但し $Z_{p,3}$ は metacyclic 群）

(2) $\begin{cases} SL(2,17) \text{ は } S^{2^\nu-1}\ (\nu\geqq 4) \text{ に自由に作用するか？} \\ SL(2,257) \text{ は } S^{2^\nu-1}\ (\nu\geqq 8)\ \text{〃} \\ SL(2,65537) \text{ は } S^{2^\nu-1}\ (\nu\geqq 16)\ \text{〃} \end{cases}$

さらに、一般に、$2^{2^m}+1$ が素数のとき、$SL(2, 2^{2^m}+1)$ は $S^{2^\nu-1}$ ($\nu \geqq 2^m$) に自由に作用するか？

(3) $(n, q(q^2-1)) = 1$ のとき、$SL(2,q)\times Z_n$ は $S^{2^\nu-1}$ に自由に作用するか？（注、$q=5$ ならよい。$q\geqq 7$ だと線型には作用しない。）

(4) $Z_{73,9}$ は S^{17} に自由に作用するか？

2. T_1, T_2 を S^n 上の 2 つの free involutions とすると、$T_1(x) = T_2(x)$ となる点 $x \in S^n$ が必ず存在する。（Dress の結果，Topology）さらに、$T_2 = A$：antipodal map のときは、T_1 は free でなくてもよい。さて、これを一般化して、T_2 が勝手な free involution の時でも、T_1 が free でなくても上の結果が成り立つか？

（服部）

M^{2m}が compact complex manifold ならば、Chern class

$$c_i(M) \in H^{2i}(M;Z) \cong H_{2m-2i}(M;Z)$$

が定義されるが、Deligne は、complex analytic space に対しても、Chern class と類似の性質をもつ invariant が定義されるのではないかと予想した。ここでは、その予想をもう少し特別の場合に限って、M を compact smooth G-manifold, $V \longrightarrow M$ を complex G-vector bundle（但し G は有限群）とする時、complex vector bundle $V/G \rightarrow M/G$ に対して、"Chern class（の Poincaré dual）" $c_i(V/G) \in H_{2m-2i}(M/G) \cong H^{2i}(M/G, \mathcal{S})$ のようなものが定義できないか？（但し $\mathcal{S}$ はある sheaf）そして、$c_i(V/G)$ の $H^{2i}(M/G, \mathcal{S})$ の中への image は、通常の Chern class のように、vector bundle に関する何らかの "obstruction" になっているのではないか？