数理解析研究所講究録
第205巻 1974年 15-27

二階双曲型偏微分方程式に対する混合問題について

京大 理学部 宮武貞夫

§1 序

ここでは、二階双曲型偏微分方程式の混合問題が L^2-well posed であるための必要十分条件を、定数係数の場合に考えよう。これまでに単独高階偏微分方程式の混合問題の L^2-well posed については、R. Agemi - T. Shirota [1], R. Sakamoto [3] によって扱われているが、ここでは二階の場合に限って、より具体的なる characterization を行う。もちろん境界作用素の係数は複素数の範囲で考える。その理由は real 係数の場合には変数係数の範囲でも L^2-well-posed の問題はセミグループ的（発展方程式的）な解の存在定理までこめて解決されているのに対し、複素変係数に於ては、直接には同程度の解決が困難であると思われるからである。その解決にここで求めた具体的なる定数係数の場合の特徴付けが役立つのである。更に付加的な成果として、混合問

類とclassicalな数学の定理及び道具（特に函数論，代数学）との有機的な結合の有様が露呈され，又その時，Cauchy問題のL^2-well-posedの議論（Leray，Gårdingによってなされた）とは，そもそも何であったのかという事も認識されるであろう。議論の方向は専門化ではなく，普遍化を理想とする。

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} Pu = f(x,y,t) & x>0, \quad (t,y)\in R^{n+1}_{+} = \{(t,y)\ \ t>0,\ y\in R^n\} \\ Bu\Big|_{x=0} = g(y,t) & x=0, \quad \text{〃} \\ D_t^j u\Big|_{t=0} = u_j(x,y) & t=0.\ \ x>0.\ \ y\in R^n \end{cases}
$$

なる半空間の混合問題を考える。Pは強双曲型（t方向に）であり 後でのべる境界条件が一つである条件を仮定する．Bもx方向にnon-characteristicな形を考える。この混合問題のL^2-well posednessを

$$
(\mathrm{P})_0 \begin{cases} Pu = f & , x>0 \quad (t,y)\in R^{n+1} \\ Bu\Big|_{x=0} = g & , x=0 \quad (t,y)\in R^{n+1} \end{cases}
$$

なる形の境界値問題が，次の様な評価が成り立つ時．L^2-well posedと呼ぼう。 特に $g\equiv 0$ の場合に於て．

$$(1.1)\quad \gamma|u|^2_{1,\gamma} \le C\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0,\gamma}, \quad {}^\exists C>0,\ {}^\forall\gamma>0.$$

実際, real boundary 係数の場合には この評価と 発展方程式的な評価（即ち 強双曲型方程式の初期値問題と対応する

$$\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u\|^2_{1-j} + \sum_{j=0}^{1}\int\langle\Lambda_{y,1}^{-\frac{1}{2}} D_x^j u(s)\rangle^2_{1-j}\,ds$$

$$\le \mathrm{Const.}\left\{\sum\|u_j\|^2_{1-j} + \int_0^t\|f(s)\|_0^2\,ds + \int_0^t\langle\Lambda_{y,1}^{\frac{1}{2}}(Bg)(s)\rangle_0^2\,ds\right\}$$

for $0<t\le T$ Const. depends on T.

の評価）と同等である事が示されている。（[2]） ここで ノルム は

$$|u|^2_{k,\gamma} = \sum_{l+i+j+|\alpha|=k}\iiint|\gamma^l D_t^i D_x^j D_y^\alpha e^{-\gamma t}u|^2\,dt\,dy\,dx$$

$\|\cdot\|_k$ は空間方向の 内部 ソボレフ ノルム

$\langle\ \rangle_k$ は空間方向の 境界上の ソボレフ ノルム

$\Lambda_{y,1}^{\frac{1}{2}}$ は 境界上（空間方向のみの） Δ_y（ラプラシアン）$+1$ の $\frac{1}{2}$ 乗

§2 ロバチンスキ条件へ

$g\equiv 0$ の時の $(P)_0$ を Fourier-Laplace 変換（$(P)_0$ の両辺に $e^{-\gamma t}$, $\gamma>0$ をかけて t, y について Fourier 変換すると.

$$(P_0)' \begin{cases} P(D_x, \eta, \tau)\, \hat{u}(x, \eta, \tau) = \hat{f}(x, \eta, \tau) & , \ \tau = \sigma - i\gamma,\ \gamma > 0 \\ B(D_x, \eta, \tau)\, \hat{u}(x, \eta, \tau)\Big|_{x=0} \equiv 0 & (\text{かつ}\ \hat{u}(\infty, \eta, \tau) = 0) \end{cases}$$

なる parameter を含む常微分方程式の解を次の如く表示しよう。

$$(2.1) \qquad \hat{u}(x) = \int_0^\infty G(x, x'; \eta, \tau)\, \hat{f}(x')\,dx' \equiv G\hat{f} \quad , \quad (\hat{u}(x) = \hat{u}(x, \eta, \tau)\ \text{等})$$

更に

$$G = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i(x-x')\xi}}{P(\xi, \eta, \tau)}\,d\xi + G_c \equiv G_0 + G_c$$

と書こう。$G_0\hat{f} \equiv \hat{u}_0$ に対応する項は $x<0$ まで考えた時の Cauchy 問題に対応しており，当然 (1.1) に於て u を u_0 におきかえた式は成り立っている (known fact). それ故に (1.1) と (1.1) に於て，$\hat{u}$ を $G_c\hat{f}$ におきかえたものとは同値である。G_c は留数計算の方法で R. Sakamoto [3] に計算されており，

$$(2.2) \qquad G_c = -B(\xi_+)^{-1}B(\xi_-)(\xi_- - \xi_+)^{-1}e^{ix\xi_+}e^{ix'\xi_-}.$$

(ここで，$B(\xi_+) = B(\xi_+, \eta, \tau)$ であり，ξ_+ は $P(\xi_+, \eta, \tau) = 0$. $\mathrm{Im}\,\xi_+ > 0$ for $\gamma > 0$.

今 次の (2.3) が成り立つ事に注意する

$$(2.3) \qquad B(\xi_+)^{-1}B(\xi_-) = 1 + (\xi_- - \xi_+)\,B(\xi_+)^{-1}$$

すると $\gamma G_c(x, x', \eta, \tau)$ は $\Sigma = \{(\eta, \sigma, \gamma),\ \gamma \geq 0,\ |\eta|^2 + \sigma^2 + \gamma^2 = 1\}$

上で連続である事がすぐ確かめられる。それ故、次式と

$$\gamma\,|u_c|^2_{1,\gamma} \le \frac{C}{\gamma}\,|f|^2_{0,\gamma} \qquad (\hat{u}_c = G_c\hat{f})$$

$$\text{(2.4)}\qquad \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \le \frac{Const.}{\gamma} \qquad \text{for all } (\eta,\sigma,\gamma)\in\Sigma$$

との同等性が localise して確かめられる。これは R. Agemi - T. Shirota [1] で論じられた事柄である。さて更に、G_cの形 (rank 1) に注意すると、

$\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = \|G_c\|_{L^2(x,x')}$ がわかるから (2.4) より (2.3)を使って、

$$\text{(2.5)}\qquad \left|\frac{1}{(\xi_+-\xi_-)} - \frac{1}{B(\xi_+)}\right| \left\{\frac{1}{|\mathrm{Im}\,\xi_+|\,|\mathrm{Im}\,\xi_-|}\right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{Const.}{\gamma}$$

が得られる。けれども上式はより簡単になるのである。即ち、

$$\text{(2.6)}\qquad \frac{1}{|\xi_+-\xi_-|}\left\{\frac{1}{|\mathrm{Im}\,\xi_+|\,|\mathrm{Im}\,\xi_-|}\right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{Const.}{\gamma}$$

が双曲性と関連して簡単に証明できる (ここでは略す) から (2.5)は

$$\text{(2.7)}\qquad {}^{\exists}(\text{positive constant})\cdot\gamma \le |\mathrm{Im}\,\xi_+|^{\frac{1}{2}}\,|\mathrm{Im}\,\xi_-|^{\frac{1}{2}}\,|B(\xi_+)| \quad \text{on } \Sigma$$

となる。即ち (1.1) と (2.7) は同値であり、この式は単にロパチンスキー determinant $|B(\xi_+)|$ のみならず、ξ_+, ξ_- の虚部も併せて考える必要がある事を意味する。即ち ellipticity と関連する。次に (2.7) を考察する。

§3. 具体的表現（波動方程式の場合）

$$\begin{cases} P = D_x^2 - D_t^2 + \sum^n D_{y_j}^2 \\ B = D_x - c D_t + \sum^n b_j D_{y_j} \end{cases}$$

を考えよう。(2.7) よりすぐ次の事柄がわかる。

$$(3.1)\quad \begin{cases} (1)\quad \gamma > 0 \text{ なら } \quad |B(\xi_+)| \neq 0. \\ (2)\quad \{(\sigma, \eta),\ \sigma^2 - |\eta|^2 > 0\} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ なら } |B(\xi_+)| \neq 0 \\ (3)\quad \{(\sigma, \eta),\ \sigma^2 - |\eta|^2 < 0\} \text{ かつ } \gamma = 0 \text{ では } |B(\xi_+)| = 0 \text{ は} \\ \qquad \text{許される。} \end{cases}$$

けれども最も複雑な所は $\sigma^2 = |\eta|^2$ の近傍であり そこでは (2.7) を直接考えて処理する。即ち適切な変換を導入する。今

$$(3.2)\quad B(\xi_+) = \sqrt[+]{\tau^2 - |\eta|^2} + \sum b_j \eta_j - c\tau = 0$$

（但し $\sqrt[+]{\ }$ は $\mathrm{Im} \sqrt[+]{\ } > 0$ for $\gamma > 0$ の根）

を考えよう。同次性に注意して

$$(3.3)\quad \begin{cases} (1)\quad \sqrt[+]{\mu^2 - 1} = c\mu - \sum b_j \eta_j / |\eta| \equiv c\mu - b(\eta), \quad \mu = \dfrac{\tau}{|\eta|} \\ (2)\quad \sqrt[+]{\mu^2 - 1} = -c\mu + \sum b_j \eta_j / |\eta| \equiv -c\mu + b(\eta), \quad \mu = \dfrac{-\tau}{|\eta|} \end{cases}$$

の二式が (3.2) 一つと対応する。何故ならば 2乗による符号の自由度が半分になるからである。(1) では $\mu = \frac{\tau}{|\eta|}$ であるが (2) では 便宜上 η を $-\eta$ にしておいてから $\mu = \frac{-\tau}{|-\eta|} = \frac{-\tau}{|\eta|}$ とおいた。$\tau = \sigma - i\gamma$ を考慮すると (3.1)・(3.3) より

(3.4) { (1) (3.3) の (1) は $-\mathrm{Im}\,\mu > 0$ に根を持たない ((3.1) の (1) より)

(2). (3.3)の(2)は $+\mathrm{Im}\,\mu>0$ に根を持たない（(3.1)の(1)より）

(3) μ の real 軸上では．$|\mu|>1$ の根は(3.3)(1)(2)とも持たない。（(3.1)の(2)より）

(4) μ の real 軸上で $|\mu|\leq 1$ なる根は持ってない（(3.1)の(3)より）．

(3.4)の事実を一つの代数方程式が根をすべて上半平面（軸を除いて）に持つという条件に帰着させう。そのために次の様に変換する。

$$\mu \longrightarrow z \longrightarrow v$$

(3.5) $$\mu=\frac{1-z}{z+1}$$

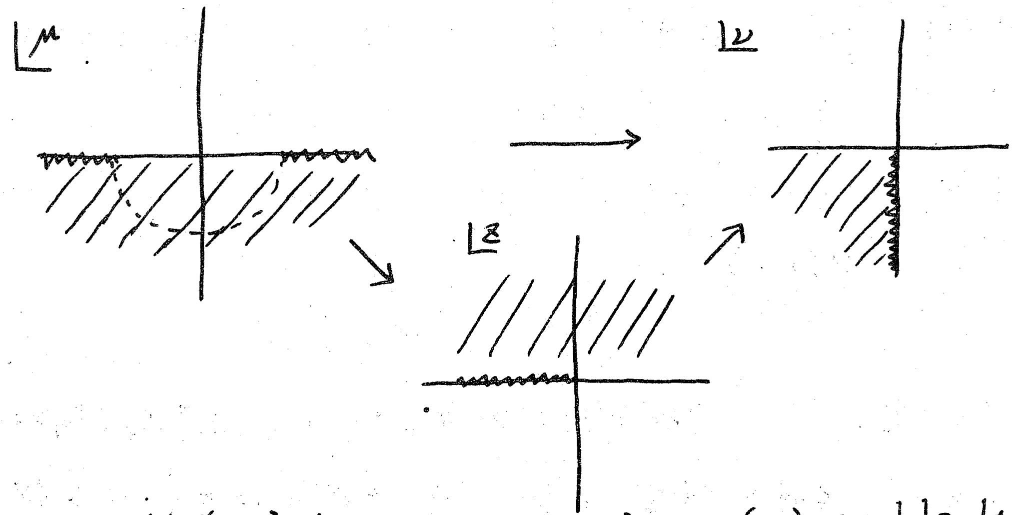
(3.6) $$z=v^2$$ v；下半平面中心に (3.4)の(1),(2)で別々に blanch をとる。

(3.5)の性質
(i) 逆も同じ形 $z=\frac{1-\mu}{\mu+1}$
(ii) 実軸→実軸．$i\to -i$ ∴ 上半 ⟶ 下半．
(iii) 虚軸⟷単位円，$0\to 1$．∴円の内部 ⟶ 右半平面

(3.6)は
(3.3)の(1)の場合，z：上半平面 ⟶ v 第3象限，
(2)の場合 z．下半平面 ⟶ v 第4象限．

なる写像を考える。

(3.3)の(1)について 対応する写像を図示しよう



斜線の部分及び ~~~ の部分に(3.3)の(1)は根を持たない.

他方 $\mu^2-1 = \dfrac{-4\nu^2}{(\nu^2+1)^2}$

であるが 個々に符号を吟味すれば

(3.7) $\sqrt[+]{\mu^2-1} = \dfrac{\mp 2i\nu}{\nu^2+1}$ (−は(1)の場合, +は(2)の場合).

故に(3.3)の(1),(2)共に

(3.8) $\dfrac{-2i\nu}{\nu^2+1} = c\left(\dfrac{1-\nu^2}{\nu^2+1}\right) - b(\eta)$

になり ここで 分~~母~~ ν^2+1 をかけると(これは丁度前に(3.2)から(3.3)を出す時に $|\eta|$ で割り算をした事に対応する。)

(3.9) $\alpha\nu^2 - 2i\nu - \beta = 0$, $\alpha = c + b(\eta)$, $\beta = c - b(\eta)$

がすべての根を実軸までこめての上半平面に持つことになる。

これを記述するために次の Hermite の定理。

n次多項式 $f(z) = 0$ の根がすべて上半平面にあるための必要十分条件は次の二つの別々の表現がある。

(I). $-i\dfrac{f(x)\bar{f}(y) - f(y)\bar{f}(x)}{x-y} = \sum_{i,k}^{0,n-1} A_{ik}\, x^i y^k$ とした時

$A = (A_{ik})$ (は symmetric であるが) その正定値.

(II). $f(x) = p(x) + i\,g(x)$. $p(x)$, $g(x)$ 実係数とした時.

$p(x)$, $g(x)$ はそれぞれ real の根のみを持ち互いに相分つ。

Hermite の定理の Corollary

$f(z) = 0$ の根が non real な複素共役の根を持たないという仮定のもとに、$f(z) = 0$ の根が実軸までこめての上半平面にすべての根を持つ必要十分条件は $A \geq 0$ である。

今 $f(\nu)$ を (3.9) の左辺とする。 A は.

$$A = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha & \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) \\ \mathrm{Im}(\bar{\alpha}\beta) & 2\,\mathrm{Re}\,\beta \end{pmatrix}$$ となる 結果を整理すると.

Hermite の Th の Corollary より

$$
(3.9)\begin{cases} \mathrm{I} & \mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta = 0 \text{ ならば} \quad 1+\alpha_2\beta_2 \geq 0 \qquad \alpha_2 = \mathrm{Im}\,\alpha,\ \beta_2 = \mathrm{Im}\,\beta \\ \mathrm{II}. & |\mathrm{Re}\,\alpha| + |\mathrm{Re}\,\beta| \neq 0 \text{ ならば}. \quad A \geq 0. \end{cases}
$$

更に具体的に変換を follow していくことにより．(1.8) と (3.9) の (I) における ≥ 0 を >0 にしたものとが同値であることが示せる．

§4. generalization

この節では波動方程式の代りに二階の双曲型方程式を考えよう．この場合にも §3 と同様に議論が進められる．その時の前のものとの対応を明らかにするのみにとどめよう．

$$P = -aD_t^2 + 2\Big(\sum^n a_i D_{y_i} + a_n D_x\Big) D_t + \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{y_i} D_{y_j} + 2\sum^n a_{nj} D_{y_j} D_x + D_x^2\Big)$$

に於て t 方向に強双曲性を仮定する．即ち．アインシュタイン風の記号で

$$P = -a\tau^2 + 2(a_i\eta_i + a_n\xi)\tau + (a_{ij}\eta_i\eta_j + 2a_{nj}\eta_j\xi + \xi^2)$$

とした時．$a \neq 0$ で．τ に関する判別式が正である．これを ξ についての二次式に整理すると

$$(a + a_n^2)\xi^2 + 2(a_n a_i\eta_i + a\,a_{nj}\eta_j)\xi + \{(a_i\eta_i)^2 + a\,a_{ij}\eta_i\eta_j\} > 0.$$

となるが これは 次の二つと同値である.

0) $a + a_n^2 > 0$

1) $-D(\eta) = (a_n a_i \eta_i + a\, a_{nj}\eta_j)^2 - (a+a_n^2)\{(a_i\eta_i)^2 + a\, a_{ij}\eta_i\eta_j\} < 0$

更に boundary condition についての条件より

2) $a > 0$

を仮定する. これは boundary condition の数が一つという条件である

0) は不用となる. 我々は 1) 2) を仮定する その時.

(4.1) $$P = -a\{\tau - a^{-1}(a_i\eta_i + a_n\xi)\}^2 + a^{-1}(a+a_n^2)\{\xi + (a+a_n^2)^{-1}(a_n a_i\eta_i + a\, a_{nj}\eta_j)\}^2 + a^{-1}(a+a_n^2)^{-1}D(\eta)$$

と完全平方の形にした時. 1) 2) の条件はみやすい。

完全平方の順序を交換した時 第3項の剰余項を $D'(\eta)$ と書くと,

(4.2) $$P = (\xi + a_n\tau + a_{nj}\eta_j)^2 - (a+a_n^2)\{\tau - (a+a_n^2)^{-1}(a_i\eta_i - a_n a_{nj}\eta_j)\}^2 + D'(\eta)$$

この時 我々は $D'(\eta) = a^{-1}(a+a_n^2)^{-1}D(\eta)$ を示せる.

何故ならば $\dfrac{\partial P}{\partial \xi} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial \tau} = 0$ を ξ と τ についての

連立一次方程式とみて その根を $\xi = \xi(\eta)$, $\tau = \tau(\eta)$ と一つ

持ってくると (4.1) (4.2) に代入する事により.

$$P(\xi(\eta), \tau(\eta), \eta) = D(\eta) = a^{-1}(a+a_n^2)^{-1}P(\eta)$$

となるからである。それ故に我々は境界値問題に対えて、(4.2)の形を波動方程式 $\xi^2-(\tau^2-|\eta|^2)$ に対応させる。即ち、

$$\hat{\xi} = \xi + a_n\tau + a_{nj}\eta_j$$

$$\hat{\tau} = (a+a_n^2)^{\frac{1}{2}}\{\tau - (a+a_n^2)^{-1}(a_i\eta_i - a_n a_{nj}\eta_j)\}$$

$$d(\eta) = a^{-\frac{1}{2}}(a+a_n^2)^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}(\eta) \quad (>0.)$$

とおけば (4.2) は $\hat{\xi}^2-(\hat{\tau}^2-d(\eta)^2)$ の形となる。その時 $d(\eta)$ での割り算を考慮して議論を進めていけば、前と同様である。但し boundary condition の方も、

$$B = \hat{\xi} - \hat{c}\hat{\tau} + \hat{b}(\eta)d(\eta)$$

という形にして、

$$\hat{\alpha} = \hat{c} + \hat{b}(\eta), \quad \hat{\beta} = \hat{c} - \hat{b}(\eta)$$

を α, β のかわりに使えば良い。

終わりに ここで述べた事は [5] で述べた事の多次元への又、方程式の形を一般形への拡張であることをお断りしておきます。なお [5] の3頁目の下から6行目に「発展方程式 type の」とありますのは「dual の問題に対しても (2) の形の」のあやまりであり、この紙面をかりて訂正します。

References

[1]. R. Agemi – T. Shirota ; On necessary and sufficient

condition for L^2-well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations. J. Fac. Sci. 21. Hokkaido Univ. No.2. ('70) 133-151.

[2]. S. Miyatake ; Mixed problem for hyperbolic equation of second order J. Math. Kyoto Univ vol.13. No.3 ('73) 435 - 487.

[3]. R. Sakamoto ; L^2-well-posedness for hyperbolic mixed problem. P.R.I.M.S. Kyoto Univ. vol.8. No.2. ('72) 266 - 293.

[4]. R. Agemi ; Remarks on L^2-well-posed mixed problem for hyperbolic equation of second order. Hokkaido M. J. vol. II. No.2. p 214 - 230.

[5]. S. Miyatake ; 波動方程式に対する混合問題について. シンポジウム '超函数と擬微分作用素' 講究録. 数理研.