数理解析研究所講究録
第 205 巻 1974 年 49-54

Navier-Stokes 方程式の定常解の安定性について

東大 理　増田 久弥

ある物体 Ω の外部 $\mathcal{E}$ を流れる非圧縮性粘性流体の定常流は、(仮定によって) Navier-Stokes 方程式 (N-S 方程式)

$$(1)\quad \begin{cases} -\nu\Delta w-(w\cdot\nabla)w+\nabla p=0 & (x\in\mathcal{E}) \\ \operatorname{div} w=0 \end{cases}$$

を満たす。ここで、ν は、粘性係数 (正定数)、w は、3次元 (速度) ベクトル、p は (スカラーの) 圧力である。
物体の表面 Σ で

$$(2')\qquad w=0\qquad (x\in\Sigma)$$

Ω から十分離れたところで一定の流れ w_∞ になるという条件

$$(2'')\qquad w(x)\longrightarrow w_\infty\qquad (|x|\longrightarrow\infty)$$

を満たすとする。このような流れの存在は、Leray, R. Finn, H. Fujita 等によって研究された。
R. Finn は、"もし w_∞ が十分小さいならば、(1) (2) を

満たす w は存在し

(3) $\quad | w(x) \longrightarrow w_\infty | < C/|x| \quad (x \in \mathcal{E})$

を満たす”ことを示した。

これに関係して、彼は (1) (2) のPR解 (physically reasonable) という概念を導入した。それは、ある $\varepsilon > 0$ が存在し

$$| w(x) - w_\infty | < C / |x|^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \quad (x \in \mathcal{E})$$

を満たす (1) (2) の解のことである。

さて、“上の如き定常流の場 $w(x)$ に、disturbance u_0 を与えたとき、乱された場は、時刻 t と共にどう変化するか”という問題を考える。乱された場は、次の N−S 方程式によって、その行動が支配される。

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v - (v \cdot \nabla) v + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} v(x, t) = 0 \quad (\text{on } \Sigma) \\ v \longrightarrow w_\infty \quad (|x| \longrightarrow \infty) \\ v(x, 0) = w(x) + u_0(x) \end{cases}$$

この問題を、Heywood が Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970), 48 − 60 の中で初めて扱った。

［有界領域の場合は、J. Serrin の仕事がある］ 彼は、次の事を示した。

“w を (3) を満たす (1) (2) の解とする。そこで、$C < \nu/2$ と仮定する。十分小さい u_0 に対し、(4) (5) の解 v は、

$$\int_{\mathcal{E}} |\nabla_x (v - w)|^2 dx \longrightarrow 0$$

$$\int_{K} |(v - w)|^2 dx \longrightarrow 0 \qquad (t \to \infty)$$

（K は、$\mathcal{E}$ の任意のコンパクト集合）

を満たす”.

問題は依然として残る。① C が大きいときはどうか？ ② 大きい u_0 に対してはどうか。③ 各点で $v(x, t)$ は $w(x)$ に近ずくか。④ 近ずく order は何か？

得られた結果は次の通り。

定理　$C < \nu/2$ と仮定する。任意の (4) (5) の解 v は、

$$\int_{\mathcal{E}} |\nabla_x (v(x,t) - w(x))|^2 dx \leq \frac{M}{t}$$

$$\sup_{x \in \mathcal{E}} |v(x,t) - w(x)| \leq M t^{-\frac{3}{8}} \qquad (t \to \infty)$$

を満たす。ここで、M は、正の定数。

（証明の方針）

$u = v - w$ とおくと、u は、

$$\begin{cases} u_t = \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + (w \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) w + \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{\Sigma} = 0 \qquad u \longrightarrow 0 \ (|x| \longrightarrow \infty) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

を満たす。$J(\mathcal{E})$ を $C_0^\infty(\mathcal{E})$ で $\operatorname{div} \varphi = 0$ なる関数の完備化（$L^2(\mathcal{E})$での）とする。P を $L^2(\mathcal{E})$ から $J(\mathcal{E})$ への projection とする。B を Dirichlet 条件をもつ作用素

$$Bu = -\nu \Delta u - P(w \cdot \nabla) u - P(u \cdot \nabla) w$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

なる $J(\mathcal{E})$ の中での realization とする。（厳密には、form で定義する）。すると、B は、maximal accretive operator であることがわかり、更に、holomorphic semi-group を生成する。この時、上の方程式を、$J(\mathcal{E})$ での方程式に移す．

$$\frac{du}{dt} = -Bu + P(u \cdot \nabla) u \qquad \text{（形式的）}$$

積分方程式に移すと、（形式的に）

$$u(t) = e^{-tB} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)B} F[u(s)]\, ds$$

となる。ここで、 $F[u(s)] = P[(u\cdot\nabla)u]$ である。これを評価するのである。その際、Fractional power に関する T. Kato 先生の仕事が基本的となる。

（注意） 上の解の減衰より、u は、ある t_0 からさき、ある sector : $|\,\mathrm{Im}\, t\,| < M(\mathrm{Re}\, t - t_0)$ まで、t につき解析的に延長されることがわかる。

（注意） ここで述べる方法は、その他の非線型方程式 e.g. $u_t = \Delta u - u^3$ に適用できるが、これは別の機会にゆずる。

［質 問］

Q 1 伊藤先生 「一般的に一意性は成立しないが、定理に述べられている T_0 は、個々の弱解によるのか、それとも同じデータ u_0 をもつすべての弱解に共通にとれるのか？」

答 「T_0 は初期値のみできまり、定性的にキッテリ与えられる。」

Q 2、藤田先生　「$|w(x) - w_\infty| < C/|x|$ なる解は、
存在するか？」

答　「R. Finn によると、w_∞ が小のとき存在する。」

未解決な問題

$\int_E |\nabla w(x)|^2 dx < C$　なる解 に対し、

定理は成立するか？