数理解析研究所講究録
第 205 巻 1974 年 55-59

定数係数偏微分方程式系に対するLiouvilleの定理

都立大 理数　村田　實

§1. 序

この講演の目的は、整関数に対する古典的なLiouvilleの定理を定数係数偏微分方程式論の枠の中で見なおすことにある。

我々は、次の方程式系

$$P(D)u = \left\{\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(D)u_j\right\}_{i=1,\dots,M} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad M \geqq N \qquad \text{—— (1)}$$

を考察する。ここで、Pの実特性多様体

$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^n ;\ \operatorname{rank}\{P_{ij}(\xi)\} < N\}$$

は $\mathbb{R}^n$ に等しくないものとする。

Vの構造に関しては次の命題が成り立つ。

命題 0.（H. Whitney [4]）。実特性多様体Vは

$$V = \bigcup_{k=0}^{n-1} V^k, \quad \bigcup_{j=0}^{k} V^j \text{ は代数多様体.}$$

と分解される。ここで V^0 は有限集合又は空集合であり、V^k は k-次元の滑らかな多様体又は空集合である。

我々はこの命題を用いて V の次元を

$$d = \begin{cases} -1 , & V = \phi \\ \max\{k ; 0 \leq k \leq n-1 , V^k \neq \phi\} , & V \neq \phi \end{cases}$$

と定義する。

定理 1. P の実特性多様体の次元を d とする。このとき方程式 (1) の解 $u \in (L_{2,loc}(\mathbb{R}^n))^N$ が条件:

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = o\left(R^{\frac{n-d}{2}}\right) \quad \text{as } R \to \infty$$

を満たすならば、$u \equiv 0$ である。

定理 2. P の実特性多様体の次元を d とする。このとき方程式 (1) の解 $u \not\equiv 0$ で、次の条件:

$$\left(\int_{R \leq |x| \leq 2R} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(R^{\frac{n-d}{2}}\right) \quad \text{as } R \to \infty$$

を満たすものが存在する。

§2. 定理の証明の概略

定理は次の2つの命題から容易に導かれる。

命題1　$f \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$ とする

a) $\|f\|_R = O(R^{-s}) \iff \hat{f} \in Lip(s, r, \infty; 2)$

b) $\|f\|_R = o(R^{-s}) \iff \hat{f} \in lip(s, r, \infty; 2)$

ここで，$\|f\|_R = \left(\int_{R \le |x| \le 2R} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$，

$$Lip(s, r, \infty; 2) = \{ f \in L_2(\mathbb{R}^n) ;\ \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-s} \| \Delta_h^r f \|_{L_2} < \infty \}$$

$$lip(s, r, \infty; 2) = \{ f \in Lip ;\ \| \Delta_h^r f \|_{L_2} = o(|h|^s) \}$$

$$0 < s \le r$$

$s \le 0$ のときは $s > 0$ の場合の微分としてLipschitz空間を定義する。

命題2.　$M^k \subset \mathbb{R}^n$ を k 次元の C^∞-多様体とし，開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は ∂M^k と交わらないものとする。

a) $f \in lip(-\frac{n-k}{2}, 0, \infty; 2)$ かつ $Supp(f) \cap U \subset M^k$

$\Rightarrow$ $f = 0$ in U.

b) $\psi \in C_0^\infty(U)$ とする。このとき

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{M^k} \psi \varphi \, dS \ , \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

で定義されるdistributionを T とすると，

$$T \in Lip(-\tfrac{n-k}{2}, 0, \infty; 2).$$

定理1の証明．u は方程式(1)を満たしている

から. $\mathrm{Supp}(\hat{u}_j) \subset V$, $j=1,\cdots,N$.

従って スカラー関数 u について 次の命題を示せばよい。

$$\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset V \quad \text{かつ} \quad \|u\|_R = o(R^{\frac{n-d}{2}})$$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0.$$

まず $\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-1} V^k$ を示そう。

任意の点 $p \in V^d$ に対し p の近傍 U で $V \cap U \subset V^d$ なるものが存在するから、命題0より

$$U \cap \partial V^d = \phi, \quad \mathrm{Supp}(\hat{u}) \cap U \subset V^d$$

しかも命題1より

$$\hat{u} \in lip(-\tfrac{n-d}{2}, 0, \infty; 2).$$

従って命題2より $\hat{u} = 0$ in U.

次に $\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-2} V^k$, その次に $\mathrm{Supp}(\hat{u}) \subset \bigcup_{k=0}^{d-3} V^k$ を示す。以下この操作を続けて、結局 $\hat{u} = 0$ を得る。 q.e.d.

定理2の証明はほぼ明らかであろう。

Reference.

[1] W. Littman, Decay at infinity to higher

order partial differential equations, Israel J. Math. 8, 1970, 403 – 407.

[2] J. Peetre, Estimates for eigenfunctions, Studia Math. 28, 1967, 169 – 182.

[3] L. Schwartz, Theorie des Distributions, Hermann, 1966.

[4] H. Whitney, Elementary structure of real algebraic variety, Ann. of Math. 66, 1957, 545 – 556.