数理解析研究所講究録
第 205 巻 1974 年 60-73

退化した放物型作用素の基本解について

阪大 理　堤　千里

§1. 序

放物型擬微分作用素

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + p(t; x, D)$$

に対する基本解 $E(t)$ を擬微分作用素の表象の計算によって，t を助変数とする擬微分作用素として構成する．ここで，$p(t; x, D)$ は次の条件を満たすものとする．

<u>仮定</u>

(i) $p(t; x, \xi) \in \mathcal{E}_t^0(S^m_{\rho,\delta})$ $(m \geq 0,\ 0 \leq \delta < \rho \leqq 1)$ であって，$0 \leqq m' \leqq m$, $C > 0$ が存在して

$$\mathrm{Re}\, p(t; x, \xi) \geqq C \langle \xi \rangle^{m'}.$$

(ii) 任意の multi index $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ に対し，$C_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(t; x, \xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\, \mathrm{Re}\, p(t; x, \xi) \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

但し $p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)=(\partial/\partial\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial\xi_n)^{\alpha_n}(-i\partial/\partial x_1)^{\beta_1}\cdots(-i\partial/\partial x_n)^{\beta_n}p(x,\xi)$,
$\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$, かつ C, $C_{\alpha,\beta}$ は $x\in R^n$, $0\leqq t\leqq T$ ($T\leqq+\infty$) に対し一様にとれるものとする.

この仮定(i)(ii)は t を固定するごとに, Hörmander [2] による擬微分作用素 $p(x,D)$ が準楕円型であるための十分条件に相当するもので, L は放物型作用素 ($m'=m$) を含む作用素である.

さて, 基本解 $E(t)$ の構成は, $\Gamma(t,s;x,D)$ が与えられた時に次の形の積分方程式を解く事に帰着される.

$$\Gamma(t,s;x,D)+\varphi(t,s;x,D)+\int_s^t\Gamma(t,\sigma;x,D)\varphi(\sigma,s;x,D)\,d\sigma=0$$

この $\varphi(t,s;x,D)$ を求めるために, 擬微分作用素の多重積の表象を [4], [6] による oscillatory integral を使って正確に計算する事が必要となる.

二階の退化した放物型作用素に対する基本解については Matsuzawa [7] がある.

§2. 補題と定理

擬微分作用素の表象の topology として次の２つのものを考える.

定義 1. $S^m_{\rho,\delta}=\{\,p(x,\xi)\in C^\infty(R^n_x\times R^n_\xi)\,;\,|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$
$\forall\alpha,\beta\,\}$

$p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$，整数 $l\geqq 0$ に対し

$$|p|_{m,l} = \inf \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqq l \\ (x,\xi)\in R^n_x\times R^n_\xi}} \{|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)|\langle\xi\rangle^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|}\}$$

とする．この時 $S^m_{\rho,\delta}$ はこの semi-norms $|p|_{m,l}$ により Fréchet space となる．さらに $\mathcal{E}^0_t(S^m_{\rho,\delta})=\{p(t)\in S^m_{\rho,\delta};\ p(t)$ が t に関し連続$\}$ とする．

<u>定義 2.</u> 次の条件を満たす時 $\{p_j\}_{j=1}^\infty\in S^m_{\rho,\delta}$ が $p\in S^m_{\rho,\delta}$ に weak に収束するという；$\{p_j\}_{j=1}^\infty$ が $S^m_{\rho,\delta}$ の有界集合であって，任意の compact 集合 $K\subset R^n_\xi$ に対し $R^n_x\times K$ 上で一様に $p_j(x,\xi)\longrightarrow p(x,\xi)$ $(j\to\infty)$．　さらに $p(t)\in w-\mathcal{E}^0_t(S^m_{\rho,\delta})$ は $t\longrightarrow p(t)\in S^m_{\rho,\delta}$ が $S^m_{\rho,\delta}$ に weak topology を入れた時連続となるものとする．

擬微分作用素に対して，表象の topology と Sobolev space での作用素ノルムとの次の基本的関係がある．

<u>補題 1.</u>（Calderón and Vaillancourt [1]，Kumano-go and Nagase [3]）$p(x,\xi)\in S^0_{\rho,\delta}$ $(0\leqq\delta\leqq\rho\leqq 1)$ とすると $p(x,D)$ は $L^2(R^n)$ 有界作用素となる．$p(x,\xi)\in S^0_{1,\delta}$ $(0\leqq\delta<1)$ とすると $p(x,D)$ は $L^p(R^n)$ 有界作用素となる．$(1<p<\infty)$．

<u>補題 2.</u>（Kumano-go and Tsutsumi [5]）$\{p(x,\xi)\}_{j=1}^\infty\in S^m_{\rho,\delta}$ が $p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ に weak に収束すれば，任意の $u\in H_{s+m}$ に対し

$$p_j(x,D)u \xrightarrow[(j\to\infty)]{} p(x,D)u \qquad \text{in } H_s .$$

擬微分作用素の多重積　$p_1(x,D)p_2(x,D)\cdots p_\ell(x,D)$ の単純表象を　$[p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_\ell]$ で表わすものとする．この時，次の展開定理が成立する．

<u>補題　3.</u>　（Nagase and Shinkai [9]）．任意の自然数N に対して

$$[p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_\ell]-\sum_{k=0}^{N-1}[p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_\ell]_k \in S^{M-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}$$

が成立する．ここで　$p_j\in S^{m_j}_{\rho,\delta}$ $(1\leqq j\leqq \ell)$，$M=\sum_{j=1}^{\ell} m_j$，

$$[p_1\circ p_2\circ\cdots\circ p_\ell]_k$$

$$=\sum_{|\alpha_2^1|+|\alpha_3^1|+\cdots+|\alpha_\ell^{\ell-1}|=k}\frac{1}{\alpha_2^1!\,\alpha_3^1!\cdots\alpha_\ell^1!\,\alpha_3^2!\cdots\cdots\alpha_\ell^{\ell-1}!}\,p_1^{(\alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots+\alpha_\ell^1)}\,p_{2\,(\alpha_2^1)}^{(\alpha_3^2+\cdots+\alpha_\ell^2)}$$

$$\times\, p_{3\,(\alpha_3^1+\alpha_3^2)}^{(\alpha_4^3+\cdots+\alpha_\ell^3)}\cdots\qquad\cdots p_{\ell-1\,(\alpha_{\ell-1}^1+\cdots+\alpha_{\ell-1}^{\ell-2})}^{(\alpha_\ell^{\ell-1})}\,p_{\ell\,(\alpha_\ell^1+\cdots+\alpha_\ell^{\ell-1})}$$

<u>定理</u>　$p(t;x,\xi)\in \mathcal{E}_t^0(S^m_{\rho,\delta})$ が仮定(i)(ii)を満たすとする．この時，次の性質を持つ　$E(t,s)=e(t,s;x,D)\in w-\mathcal{E}^0_{t,s}(S^0_{\rho,\delta})$ が構成できる：

$$(2.1)\quad \begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+p(t;x,D)\right)E(t,s)=0 & \text{in } t>s\\ E(s,s)=I\end{cases}$$

$m-(\rho-\delta)N\leqq 0$ なる自然数N に対し，$e(t,s)$ は次の展開を

持つ.

$$e(t,s) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(t,s) + f_N(t,s) .$$

ここで

$$(2.2) \quad \begin{cases} e_j(t,s) \in w\text{-}\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{-(\rho-\delta)j}_{\rho,\delta}) & (0 \leqq j \leqq N-1), \\ f_N(t,s) \in w\text{-}\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}) . \end{cases}$$

より詳しく，任意の α, β に対し t, s に independent な定数 $C_{j,\alpha,\beta}$, $C'_{\alpha,\beta}$ が存在して，$e^{(\alpha)}_{j(\beta)}(t,s) = a_{j,\alpha,\beta}(t,s)\, e_0(t,s)$ と書くと

$$(2.3) \quad |a_{j,\alpha,\beta}(t,s)| \leqq C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-(\rho-\delta)j}\, \omega_{j,\alpha,\beta} ,$$

$$(2.4) \quad |f^{(\alpha)}_{N(\beta)}(t,s)| \leqq C'_{\alpha,\beta}\, (t-s) \langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

ここで，
$\omega_{0,0,0} = 1$, $\quad \omega_{0,\alpha,\beta} = \max\{\omega, \omega^{|\alpha|+|\beta|}\} \quad |\alpha|+|\beta| \neq 0$

$\omega_{j,\alpha,\beta} = \max\{\omega^2, \omega^{|\alpha|+|\beta|+2j}\} \quad (j \geqq 1)$,

$\omega = \mathrm{Re} \int_s^t p(\sigma; x, \xi)\, d\sigma$.

<u>系</u>　(2.3),(2.4) の評価より，

$\rho = 1$ の時　$E(t,s)u \xrightarrow[(t \downarrow s)]{} u$ in $L_p(R^n)$ $\forall u \in L_p$ $(1 < p < \infty)$

$0 \leqq \delta < \rho \leqq 1$ の時　$E(t,s)u \xrightarrow[(t \downarrow s)]{} u$ in $L_2(R^n)$ $\forall u \in L_2$

系は $e(t,s) \xrightarrow[(t\downarrow s)]{} 1$ weakly in $S^{0}_{\rho,\delta}$ と補題2より明らかである.

例 1. $L = \frac{\partial}{\partial t} + a(t)|x|^{2\mu}(-\Delta)^{\nu} + 1$,$\mu > \nu \geqq 0$ なる integer.

$a(t) \geqq 0$ は連続関数. $(m' = 0,\ \rho = 1,\ \delta = \frac{\nu}{\mu})$

例 2. $L = \frac{\partial}{\partial t} + b(t,x)(-\Delta) + \psi(x,D)$, $b(x,t) \in \mathcal{E}^{0}_{t}(\mathcal{B}_x)$,

$C\langle\xi\rangle^{2} \geqq \psi(x,\xi) \geqq c\langle\xi\rangle^{\alpha}$. $(1 < \alpha \leqq 2)$ $(m' = \alpha,\ \rho = 1,\ \delta = 2-\alpha)$

§ 3. 定理の証明

Shinkai [10] による擬微分作用素系の場合にも適用出来る方法によって述べる.

まず, 形式的に L に対する基本解は

$$I + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\int_{s}^{t}ds_1\int_{s}^{s_1}ds_2 \cdots \int_{s}^{s_{j-1}} p(s_1)\circ p(s_2)\circ \cdots \circ p(s_j)\, ds_j$$

と書ける. そこで

(3.1) $$e_0(t,s) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\int_{s}^{t}ds_1\int_{s}^{s_1}ds_2 \cdots \int_{s}^{s_{j-1}}[p(s_1)\circ p(s_2)\circ \cdots \circ p(s_j)]_0\, ds_j$$

$k \geqq 1$ に対し

(3.2) $$e_k(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j}\int_{s}^{t}ds_1\int_{s}^{s_1}ds_2 \cdots \int_{s}^{s_{j-1}}[p(s_1)\circ p(s_2)\circ \cdots p(s_j)]_k\, ds_j$$

と定義する．この時 $e_k(t,s)$ は次の微分方程式を満たす事に注意する．(cf. [8], [7], [11])

$$(3.3)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt}+p(t;x,\xi)\right] e_0(t,s)=0 & \text{in } t>s \\ e_0(s,s)=1 \end{cases}$$

$$(3.4)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt}+p(t;x,\xi)\right] e_k(t,s)=-\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|+j=k}\dfrac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(t)e_{j(\alpha)}(t,s) & \text{in } t>s \\ e_k(s,s)=0 \end{cases}$$

(3.1) より

$$e_0(t,s)=1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int_s^t ds_1\int_s^{s_1}ds_2\cdots\int_s^{s_{j-1}}p(s_1;x,\xi)p(s_2;x,\xi)\cdots p(s_j;x,\xi)\,ds_j$$

従って (3.3) が成立する．次に (3.4) については補題3による表現より

$$\begin{aligned}
&[p(s_1)\circ p(s_2)\circ\cdots\circ p(s_j)]_k \\
&= p(s_1)[p(s_2)\circ\cdots\circ p(s_j)]_k+\sum_{|\alpha|=1}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(s_1)[p(s_2)\circ\cdots\circ p(s_j)]_{k-1,(\alpha)} \\
&\quad +\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(s_1)[p(s_2)\circ\cdots\circ p(s_j)]_{k-2,(\alpha)}+\cdots \\
&\quad \cdots+\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(s_1)[p(s_2)\circ\cdots\circ p(s_j)]_{0,(\alpha)}
\end{aligned}$$

の成立する事に注意すればよい．

$e_j(t,s)$ に対する評価は (3, 3), (3, 4) と仮定(ii)を使って，帰納的に証明できる．

さて，上記の様に $e_j(t,s)$ を定義すると展開定理より

$$\Big[p(t)\circ\sum_{j=0}^{N-1}e_j(t,s)\Big]=\sum_{j=0}^{N-1}p(t)e_j(t,s)+\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{|\alpha|+k=j}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(t)e_{k(\alpha)}(t,s)\Big)$$
$$+r_N(t,s) \qquad \text{in } t>s$$

但し $r_N(t,s)\in S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}$．

$\sum_{j=0}^{N-1}e_j(t,s;x,D)=K_N(t,s)$，$r_N(t,s;x,D)=R_N(t,s)$ とおくと $e_j(t,s)$ が (3. 3) (3. 4) を満たす事より

$$(3.5)\quad\begin{cases} L\,K_N(t,s)=R_N(t,s) & \text{in } t>s\\ K_N(s,s)=I\end{cases}$$

が得られる．

基本解 $E(t,s)$ を次の形で求める．

$$E(t,s)=K_N(t,s)+\int_s^t K_N(s,\sigma)\Phi(\sigma,s)\,d\sigma$$

(3. 5) より $\Phi(t,s)$ は次の積分方程式を満たさねばならない．

$$(3.6)\qquad R_N(t,s)+\Phi(t,s)+\int_s^t R_N(t,\sigma)\Phi(\sigma,s)\,d\sigma=0$$

$\Phi_1(t,s)=-R_N(t,s)$，

$j\geqq 2$ に対して．

$$\Phi_j(t,s) = \int_s^t \Phi_1(t,\sigma)\Phi_{j-1}(\sigma,s)\,d\sigma$$
$$= \int_s^t\int_s^{s_1}\cdots\int_s^{s_{j-2}} \Phi_1(t,s)\Phi_1(s_1,s_2)\Phi_1(s_2,s_3)\cdots\Phi_1(s_{j-1},s)\,ds_{j-1}\cdots ds_1$$

とおくと，その表象 $\varphi_j(t,s;x,\xi)$ に対し次の補題を得る.

補題 4. N を $m-(\rho-\delta)N \leqq 0$ を満たす自然数とすると，任意の α, β に対して $A_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$|\varphi_{j\,(\beta)}^{(\alpha)}(t,s;x,\xi)| \leqq (A_{\alpha,\beta})^j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}\langle\xi\rangle^{m-(\rho-\delta)N-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

が成りたつ. 但し $A_{\alpha,\beta}$ は j に independent な定数.

補題により $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t,s) = \varphi(t,s) \in w\text{-}\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta})$ が求められ，(3.6) を満足する. $f_N(t,s) = \int_s^t k_N(t,\sigma)\circ\varphi(\sigma,s)\,d\sigma$ が (2.4) を満たす事は $k_N(t,s) \in w\text{-}\mathcal{E}^0_{t,s}(S^0_{\rho,\delta})$ より明らか.

以下，補題 4. の証明をする.

Kumano-go and Taniguchi [4] による oscillatory integral を使うと，まず $\varphi_j(t,s)$ については

$$\varphi_j(t,s;x,\xi) = \int_s^t\int_s^{s_1}\cdots\int_s^{s_{j-2}} ds_{j-1}\cdots ds_1 \Big\{ O_s\text{-}\iint\cdots\int e^{-i\sum_{l=1}^{j-1}\eta_l\cdot y_l}$$

$$\times \varphi_1(t, s; x, \xi+\eta_1) \prod_{k=1}^{j-2} \varphi_1(s_k, s_{k+1}; x+\sum_{l=1}^{k} y_l, \xi+\eta_{k+1})$$
$$\times \varphi_1(s_{j-1}, s; x+\sum_{l=1}^{j-1} y_l, \xi)\, dy_1 đ\eta_1 \cdots dy_{j-1} đ\eta_{j-1} \Big\}$$

と書ける。（$đy = (2\pi)^{-n} dy$）

$n_0 > n/2$ を固定して

$$e^{-iy_k\cdot\eta_k} = (1+\langle\xi+\eta_k\rangle^{2\delta n_0}|y_k|^{2n_0})^{-1}(1+\langle\xi+\eta_k\rangle^{2\delta n_0}(-\Delta_{\eta_k})^{n_0})\, e^{-iy_k\cdot\eta_k}$$

として部分積分と変数変換 $z_k = \sum_{l=1}^{k} y_l$（$1 \leqq k \leqq j-1$）をすると

$$\text{(3.7)} \qquad \varphi_j(t, s; x, \xi) = \int_s^t \int_s^{s_1} \cdots \int_s^{s_{j-2}} ds_{j-1} \cdots ds_1 \Big\{ O_s\text{-}\iint \cdots \int e^{-i\sum_{l=1}^{j-1} z_l(\eta_l-\eta_{l+1})}$$
$$\times \prod_{k=1}^{j-1} r_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k)\, dz_1 đ\eta_1 \cdots dz_{j-1} đ\eta_{j-1} \Big\}.$$

但し、$r_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k) = r(s_{k-1}, s_k; x, \xi;\ z_{k-1}, z_k, \eta_k)$

$$= \left[1+\langle\xi+\eta_k\rangle^{2\delta n_0}(-\Delta_{\eta_k})^{n_0}\right](1+\langle\xi+\eta_k\rangle^{2\delta n_0}|z_k-z_{k-1}|^{2n_0})^{-1}$$
$$\times \varphi_1(s_{k-1}, s_k; x+z_{k-1}, \xi+\eta_k), \quad (1 \leqq k \leqq j-1)$$

$s_0 = t$, $s_j = s$, $z_0 = 0$, $\eta_j = 0$ とする。

$\varphi_1 \in w\text{-}\mathcal{E}^0_{t,s}(S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta})$ より、任意の α, β, γ に対し

$$|\partial_{z_{k-1}}^{\alpha}\partial_{z_k}^{\beta}\partial_{\eta_k}^{\gamma}r_k(z_{k-1},z_k,\eta_k)| \leqq C'_{\alpha,\beta\gamma}\langle\xi+\eta_k\rangle^{m-(\rho-\delta)N+\delta|\alpha+\beta|}$$

(3.8)

$$\times\ (1+\langle\xi+\eta_k\rangle^{2\delta n_0}|z_k-z_{k-1}|^{2n_0})^{-1}$$

が成りたつ．

(3.7) より補題の証明については，任意の l について

$$\left|O_s-\iint\cdots\int e^{-i\sum_{k=1}^{l-1}z_k(\eta_k-\eta_{k+1})}\prod_{k=1}^{l-1}r_k(z_{k-1},z_k,\eta_k)\,dz_1\cdots d\eta_{l-1}\right|$$

(3.9)

$$\leqq (A_0)^l\langle\xi+\eta_l\rangle^{m-(\rho-\delta)N}$$

を示せば十分

$C_0>0$ が存在して

$|\eta_1-\eta_2|\leqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle$ ならば $\frac{1}{2}\langle\xi+\eta_1\rangle\leqq\langle\xi+\eta_2\rangle\leqq 2\langle\xi+\eta_1\rangle$

$|\eta_1-\eta_2|\geqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle$ ならば $\langle\xi+\eta_1\rangle\leqq C_1|\eta_1-\eta_2|$

が成りたつ事に注意する．

まず $l=2$ の時に (3.9) を示す．η_1 に関する積分を次の 3 つに分ける； $I_1=\{\eta_1;\ |\eta_1-\eta_2|\leqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle^{\delta}\}$，
$I_2=\{\eta_1;\ C_0\langle\xi+\eta_2\rangle^{\delta}\leqq|\eta_1-\eta_2|\leqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle\}$，$I_3=\{\eta_1;\ |\eta_1-\eta_2|\geqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle\}$

(3.8) より $\displaystyle\iint_{\eta_1\in I_1}|r_1(z_0,z_1,\eta_1)|\,dz_1d\eta_1\leqq C\langle\xi+\eta_2\rangle^{m-(\rho-\delta)N}$．

I_2 の部分は $-2M+n<0$ なる整数 M を選んで，部分積分をすると

$$\left|\iint_{C_0\langle\xi+\eta_2\rangle\geqq|\eta_1-\eta_2|\geqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle^\delta} e^{-iz_1(\eta_1-\eta_2)}|\eta_1-\eta_2|^{-2M}(-\Delta_{z_1})^M r_1(z_0, z_1; \eta_1)\,dz_1 d\eta_1\right|$$

$$\leqq C\langle\xi+\eta_2\rangle^{m-(\rho-\delta)N}$$

I_3 は $(2M-n)(1-\delta)>m-(\rho-\delta)N$ なる整数 M を選べば，I_2 の場合と同様に，

$$\left|\iint_{\eta_2\in I_3} e^{-iz_1(\eta_1-\eta_2)}|\eta_1-\eta_2|^{-2M}(-\Delta_{z_1})^M r_1(z_0, z_1; \eta_1)\,dz_1 d\eta_1\right|$$

$$\leqq C\int_{|\eta_1-\eta_2|\geqq C_0\langle\xi+\eta_2\rangle} |\eta_1-\eta_2|^{-2M}\langle\xi+\eta_1\rangle^{m-(\rho-\delta)N+2\delta M-n\delta}\,d\eta_1$$

$$\leqq C\ \langle\xi+\eta_2\rangle^{m-(\rho-\delta)N}$$

ここで C は $|\varphi|_{m-(\rho-\delta)N,\,M}$ による定数である事に注意する．

$l\geqq 3$ についても，同様に η_k $(1\leqq k\leqq l-1)$ の積分を

$I_1^k=\{\eta_k;\ |\eta_k-\eta_{k+1}|\leqq C_0\langle\xi+\eta_k\rangle^\delta\}$，$I_2^k=\{\eta_k;\ C_0\langle\xi+\eta_k\rangle^\delta\leqq|\eta_k-\eta_{k+1}|$ $\leqq C_0\langle\xi+\eta_k\rangle\}$，$I_3^k=\{\eta_k;\ |\eta_k-\eta_{k+1}|\geqq C_0\langle\xi+\eta_k\rangle\}$

と分けて評価すればよい．

$\varphi_{j(\beta)}^{(\alpha)}(t,s;x,\xi)$ についても $\varphi_j(t,s;x,\xi)$ と同様にすればよい．

文献

[1] Calderón A. and Vaillancourt R. : On the boundedness of pseudo-differential operators, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 374-378.

[2] Hörmander L. : Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Singular Integrals, Proc. Symposia Pure Math., 10, (1967), 138-183.

[3] Kumano-go H. and Nagase M.: Lp-theory of pseudo-differential operators; Proc. Japan Acad., 46, (1970), 138-142.

[4] Kumano-go H. and Taniguchi K.: Oscillatory integrals of symbols of pseudo-differential operators on R^n and operator of Fredholm type, Proc. Japan Acad., 49, (1973), 397-402.

[5] Kumano-go H. and Tsutsumi C.: Complex powers of hypoelliptic pseudo-differential operators with applications, Osaka J. Math., 10, (1973), 147-174.

[6] Kumano-go H.; Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderón-Vaillancourt theorem (to appear).

[7] Matsuzawa T.: On some degenerate parabolic equations II (to appear).

[8] Mizohata S.: Hypoellipticité des équation paraboliques, Bull. Soc. Math. France, 85, (1957). 15-50.

[9] Nagase M. and Shinkai K.: Complex powers of non-elliptic operators, Proc. Japan Acad., 46, (1970), 779–783.

[10] Shinkai K.; On symbols of fundamental solutions of parabolic system (to appear).

[11] Tsutsumi C.: The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator, Proc. Japan Acad., 50, (1974), 11–15.