数理解析研究所講究録
第206巻 1974年 92-128

Riemann面上のHardy class

茨城大 理　安達謙三

§1. 序

開Riemann面Ω上に定数でない有界正則函数が存在するためにはいかなる条件がなければならないかということについて，Widom([10])はΩ上のvector bundleの理論を使って次のことを示した。$g(z,\zeta)$をΩのGreen函数，$\Omega(\alpha,\zeta)=\{z;g(z,\zeta)>\alpha\}$，$B(\alpha,\zeta)$を$\Omega(\alpha,\zeta)$の才一Betti数とするとき，$\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha<\infty$ ならば，すべてのvector bundleは$\mathcal{H}_\infty(\Phi)$におけるnon-trivial sectionをもち，$\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha=\infty$ ならば$\mathcal{H}_1(\xi)=\{0\}$であるline bundle ξが存在する。(定理3)。更にこの結果を利用して $\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha<\infty$ ならば定数でない有界正則函数が存在することを示した。§2でvector bundleとvector bundleのsectionの定義を述べ，§3で境界のあるコンパクトなRiemann面についてGreen函数とvector bundleのsectionとの関係を考察し，§4で一般のRiemann面へ§3の結果を拡

張する。§5 で主定理である定理3の証明を行う。最後に §6 で定理4（Hasumi[4]）における条件(A), (B), (C) のうち (B) から (C) が出ることを Widom が指摘したことを注意しておく。

§ 2

定義 1. Φ が Ω 上の flat vector bundle であるとは $\Phi \in H^1(\Omega, A(V))$ のことである。ここで V は n 次元ベクトル空間で $A(V)$ は V から V への automorphism である。すなわち Ω のある開被覆 $\{U_\alpha\}$ があって $\Phi = (\{U_\alpha\}, \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ と表わされる。ここで $\Phi_{\alpha\beta} \in A(V)$ でかつ $\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\gamma}$ である。二つの被覆 $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ に付随した $(\{U_{\alpha_1}\}, \{\Phi_{\alpha_1\beta_1}\})$ と $(\{U_{\alpha_2}\}, \{\Phi_{\alpha_2\beta_2}\})$ が同値であるのは細分 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ と $\psi_\alpha \in A(V)$ が存在して $\Phi_{\alpha_2\beta_2} = \psi_\alpha \Phi_{\alpha_1\beta_1} \psi_\beta^{-1}$ $(U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi)$ となるときである。

定義 2. f が代表元 $(\{U_\alpha\}, \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ をもつ vector bundle の section であるとは $f = (\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\})$ と表わされ，f_α は U_α における正則 V 値函数で $U_\alpha \cap U_\beta$ で $f_\alpha = \Phi_{\alpha\beta} f_\beta$ をみたすものである。

V をユニタリー空間とすると $|f_\alpha|$ は U_α 上の劣調和函数になる。

定義 3 Φ がユニタリー vector bundle であるとは $A(V)$ が V のユニタリー変換のときをいう。このとき $|f_\alpha|$ は α に無関係である。これを $|f|$ で表わすと $|f|$ は Ω 上の劣調和函数にな

る。

以下すべての vector bundle はユニタリーであると仮定する。

定義 4. $\mathcal{H}_p(\Phi)$ $(1 \leqq p < \infty)$ を vector bundle Φ の section f で $|f|^p$ が harmonic majorant をもつものの全体とする。同様に $\mathcal{H}_\infty(\Phi)$ は $|f|$ が有界な Φ の section f の全体である。

定義 5. I が trivial line bundle であるとは $V = \mathbb{C}$ で，$\Phi_{\alpha\beta}$ = 恒等写像となるものである。

定義 6. 連結開集合 Ω_0 $(\subset \Omega)$ が正則 (regular) であるとは，

i) $\overline{\Omega}_0$ はコンパクトである。

ii) $\partial\Omega_0$ は交わらない解析曲線からなる。

iii) $\Omega - \Omega_0$ の各成分はコンパクトでない。

のときをいう。

Ω_0 を Ω の開部分集合とすると，Ω 上の vector bundle $\Phi = (\{U_\alpha\}, \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ は Ω_0 への制限 $\Phi_0 = (\{U_\alpha \cap \Omega_0\}, \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ をもつ。逆に，

補題 1. Ω_0 が Ω の正則部分領域ならば Ω_0 上のすべての vector bundle は Ω への拡張をもつ。

証明. まず，

$$H^1(\Omega, U(V)) \cong \mathrm{Hom}(\pi(\Omega), U(V)) / U(V) \tag{1}$$

となることを示す。一般に任意の群 G に対して，$H^1(\Omega, G) \cong \mathrm{Hom}(\pi(\Omega), G)/G$ が成立する。$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ を Ω の開被覆とする。今次の定義をする。

$(*)_1$ γ が U_0 を base とする $\mathfrak{U}$ の chain であるとは $\gamma = \{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}\}$ であり，$U_{\alpha_0} = U_0$，$U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}} \neq \phi$ $(i=1,\ldots,m)$，となるものである。$U_{\alpha_m} = U_0$ のとき γ を closed chain という。

$(*)_2$ chain γ の simple jerk とは連続する元 $U_{\alpha_i}, U_{\alpha_{i+1}}$ を3つの元 $U_{\alpha_i}, U_\beta, U_{\alpha_{i+1}}$ $(U_{\alpha_i} \cap U_\beta \neq \phi \neq U_\beta \cap U_{\alpha_{i+1}})$ でおきかえるか，又はこれと逆の操作をすることである。

$(*)_3$ 2つの chain がホモトープであるとは有限回の simple jerk をほどこすことによって一方が他方から得られることをいう。

$(*)_4$ $\pi(\mathfrak{U}, U_0)$ は U_0 を base とする closed chain の同値類の集合である。自然な演算の下に群をなす。

$(*)_5$ $\mathfrak{V}$ を $\mathfrak{U}$ の細分とする。$\mu : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ は細分写像で，$\mu(V_0) = U_0$ とする。すると自然な写像 $: \pi(\mathfrak{U}, V_0) \to \pi(\mathfrak{V}, U_0)$ が存在する。

$(*)_6$ $p \in \Omega$ を固定する。base をもつ被覆 $\{\mathfrak{U}, U_0\}$，$p \in U_0$，のみを考える。細分写像 $\mu : \mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$，$\mu(V_0) = U_0$，が存在するならば，$(\mathfrak{V}, V_0) < (\mathfrak{U}, U_0)$ とする。すると $\{\{\mathfrak{U}, U_0\}, <\}$ は有向集合を作る。

$(*)_7$ $\pi(\Omega, p) \equiv \underset{\{\mathfrak{U}, U_0\}}{\text{inverse lim}}\ \pi(\mathfrak{U}, U_0)$

$(*)_8$ $\chi \in \mathrm{Hom}(\pi(\Omega, P), G)$，$g \in G$，に対して，$\chi^g(\pi) \equiv g^{-1}\chi(\pi)g$，$\pi \in \pi(\Omega, P)$，と定義する。$\chi, \tilde{\chi} \in \mathrm{Hom}(\pi(\Omega, P), G)$ が同値であ

るとは，ある$g\in G$に対して$\tilde{x}=x^g$となることをいう。この同値類の集合を$\mathrm{Hom}(\pi(\Omega,p),G)/G$で表わす。

$\varphi\in H^1(\mathfrak{U},G)$とし，$\varphi$の代表元を$\{\varphi_{\alpha\beta}\}\in Z^1(\mathfrak{U},G)$とする。$\mathfrak{U}$のchain $\{U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m}\}$に対して，$\tilde{\varphi}(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m})\equiv\varphi_{\alpha_0\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m-1}\alpha_m}$と定義する。これから写像$\varphi^*:\pi_1(\mathfrak{U},U_0)\longrightarrow G$が定義される。$\{\psi_{\alpha\beta}\}$を$\varphi$の別の代表元とすると，$\psi_{\alpha\beta}=\theta_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\theta_\beta^{-1}$となる$\theta_\alpha\in G$が存在するから，$\tilde{\psi}(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m})=\theta_{\alpha_0}\tilde{\varphi}(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m})\theta_{\alpha_m}$となる。$U_0$をbaseとするclosed chainに対しては，$\tilde{\psi}=\theta_0\tilde{\varphi}\theta_0^{-1}$となるから$\psi^*=\theta_0\varphi^*\theta_0^{-1}=(\varphi^*)^{\theta_0}$となる。故に$\varphi$は$\mathrm{Hom}(\pi(\mathfrak{U},U_0),G)/G$における元を定義する。それを$x_\varphi$で表わす。$\varphi\longrightarrow x_\varphi$が一対一対応であることを示す。$(\varphi_{\alpha\beta}),(\psi_{\alpha\beta})\in Z^1(\mathfrak{U},G)$が$\mathrm{Hom}(\pi(\mathfrak{U},U_0),G)$の同じ元に行ったとする。すると$U_0$をbaseとする$\mathfrak{U}$の任意のchainに対して，$\tilde{\psi}(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m})=\tilde{\varphi}(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_m})$となる。任意の$U_\alpha\in\mathfrak{U}$に対して，chain $\pi_\alpha=(U_{\alpha_0},U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_{m-1}},U_\alpha)$をえらぶ。$\theta_\alpha\equiv\tilde{\psi}(\pi_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\pi_\alpha)$とおくと$\theta_\alpha$は$\pi_\alpha$の選び方に依らない。これをみるためにもう一つのchain $\tilde{\pi}_\alpha=(U_{\alpha_0},\ldots,U_\alpha)$を取る。すると$\tilde{\psi}(\tilde{\pi}_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{\pi}_\alpha)=\tilde{\psi}(\pi_\alpha^{-1})\tilde{\psi}(\pi_\alpha\tilde{\pi}_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\tilde{\pi}_\alpha\pi_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\pi_\alpha)$
$=\tilde{\psi}(\pi_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\pi_\alpha)$. 従って$\psi_{\alpha\beta}=\psi(U_\alpha,U_\beta)=\psi(U_\alpha,U_{\alpha_{m-1}},\ldots,U_{\alpha_1},U_{\alpha_0},U_{\alpha_0},U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_{m-1}},U_\alpha,U_\beta)=\tilde{\psi}(\pi_\alpha^{-1})\tilde{\psi}(\pi_\beta)=\theta_\alpha\tilde{\varphi}(\pi_\alpha^{-1})\tilde{\varphi}(\pi_\beta)\theta_\beta^{-1}$
$=\theta_\alpha\varphi_{\alpha\beta}\theta_\beta^{-1}$. 故に$\{\varphi_{\alpha\beta}\}$と$\{\psi_{\alpha\beta}\}$は$H^1(\mathfrak{U},G)$において同じ元を与える。従って$\varphi\to x_\varphi$は単射である。次に$\varphi\to x_\varphi$は全射で

あることを示す。任意に $\chi \in Hom(\pi(\mathfrak{U}, U_0), G)$ を取る。各 $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ に対して chain $\pi_\alpha \equiv (U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_{m-1}}, U_\alpha)$ を選ぶ。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき $\varphi_{\alpha\beta} \equiv \chi(\pi_\alpha, U_\alpha, U_\beta, \pi_\beta^{-1})$ とおく。すると $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$ ならば $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \chi(\pi_\alpha, U_\alpha, U_\beta, \pi_\beta^{-1}, \pi_\beta, U_\beta, U_\gamma, \pi_\gamma^{-1}) = \chi(\pi_\alpha, U_\alpha, U_\gamma, \pi_\gamma^{-1}) = \varphi_{\alpha\gamma}$. 故に $\{\varphi_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$ となる。$(\chi) = \chi_\varphi$ となるから $\varphi \longrightarrow \chi_\varphi$ が全射であることが示された。$H^1(\Omega, G) \cong Hom(\pi(\Omega, P), G)/G$ となることは極限を取ることによって成立する。一方 $\pi(\Omega)$ と $\pi(\Omega_0)$ は高々可算個の生成元上の自由加群をなし，$\pi(\Omega_0)$ の生成元は $\pi(\Omega)$ の生成元の部分集合と一対一対応がつく。従って $\pi(\Omega) \cong \pi(\Omega_0) \oplus$(自由加群) と表わせる (Massey[6]) から，$Hom(\pi(\Omega_0), U(V))$ の元は $Hom(\pi(\Omega), U(V))$ の元に拡張される。従って (1) から $H^1(\Omega_0, U(V))$ の元は $H^1(\Omega, U(V))$ の元へ拡張される。

§ 3

この章では境界のあるコンパクトな Riemann 面 $\bar{\Omega}$ を考える。

補題 2. $\bar{\Omega}$ を境界のあるコンパクトな Riemann 面とする。すると $\Omega\,(=\mathring{\bar{\Omega}})$ 上の任意の vector bundle は non-trivial H_∞ section をもつ。

証明 $\bar{\Omega}$ は Ω が正則部分領域であるように開 Riemann 面 Ω' に埋めこまれる。すると補題 1 より Ω 上の bundle Φ は

Ω' 上の bundle Φ' に拡張される。Grauert ([2]) より Ω' 上の任意の bundle は analytic trivial であるから Φ' の代表元 $(\{U_\alpha\}, \{\Phi'_{\alpha\beta}\})$ と U_α 上で定義された正則 $A(V)$ 値函数 K_α が存在して，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上で $K_\alpha = \Phi'_{\alpha\beta} K_\beta$ となる。単位ベクトル $v \in V$ に対して $K_\alpha(z) \cdot v$ は U_α 上の V 値正則函数であるから $(\{U_\alpha\}, \{K_\alpha(z) \cdot v\})$ は Φ' の non-trivial section である。故に Ω 上の vector bundle は non-trivial H_∞ section をもつ。

定義 7. $\Phi^* = (\{U_\alpha\}, \{\Phi^*_{\beta\alpha}\})$ が vector bundle $\Phi = (\{U_\alpha\}, \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ の dual bundle であるとは V^* を V の dual とするとき $\Phi^*_{\beta\alpha} \in U(V^*)$, で $\Phi^*_{\beta\alpha}$ は $\Phi_{\beta\alpha}$ の adjoint であるときをいう。V の元に対する V^* の元の作用を・で表わす。

$\xi = (\{U_\alpha\}, \{\xi_{\alpha\beta}\})$ を line bundle とし，$\Phi = (\{U_\alpha\}; \{\Phi_{\alpha\beta}\})$ を vector bundle とすると，$\xi\Phi = (\{U_\alpha\}, \{\xi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\})$ は vector bundle である。

定義 8. ω が line bundle ξ に付随した Prym differential であるとは，ξ の section において函数 f_α の代りに differential ω_α を置いたものである。

定義 9. ω が meromorphic Prym differential であるとは ω_α は Ω の有限個の点を除いて正則で極をもってもよいものである。line bundle ξ に付随した meromorphic Prym differential の全体を $P(\xi)$ で表わす。$\partial\Omega$ の近傍で C^1 級な $\omega \in P(\xi)$ の全体を $P^1(\xi)$

で表わす。

Cを解析曲線の有限個の和で$\bar{\Omega}-C$が単連結になるようなものとすると，Ω上のvector bundle Φの$\Omega-C$への制限は(1)よりtrivialである。従ってΦのsectionの$\Omega-C$への制限は一価V値函数によって表わされる。$\mathcal{H}_p(\Phi)$のsectionの$\Omega-C$への制限の集合を$\widetilde{\mathcal{H}}_p(\Phi)$によって表わす。同様に$\widetilde{\mathcal{P}}(\xi)$, $\widetilde{\mathcal{P}'}(\xi)$を定義する。特に$\widetilde{\mathcal{P}'}(\xi)$は$\partial\Omega-$($C$の端点)で$C^1$級のdifferentialからなる。

補題3. $\omega\in\mathcal{P}'(\xi)$は$\bar{\Omega}$のどの点でも0でなく，$\zeta$でだけ留数が絶対値1の単純極をもつものとする。すると任意のvector bundle Φと$v\in V$に対して次の等式が成立する。

$$(2)\qquad \inf\{\|\tilde{f}\|_\infty\ ;\ \tilde{f}\in\widetilde{\mathcal{H}}_\infty(\Phi),\ \tilde{f}(\zeta)=v\}$$
$$= \sup\{|v\cdot\tilde{h}(\zeta)|\ ;\ \tilde{h}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*),\ \int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\omega|=2\pi\}$$

証明. $\tilde{h}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*)$とする。$\tilde{h}$は$h\in\mathcal{H}_1(\xi^*\Phi^*)$の制限とする。すると$|v\cdot\tilde{h}(z)|=|v\cdot h(z)|$は$\Omega$上で劣調和である。$d\nu$を$\partial\Omega$上の$\zeta$での調和測度とする。すると

$$|v\cdot\tilde{h}(\zeta)|\leqq\int_{\partial\Omega}|v\cdot h(z)|d\nu(z)\leqq|v|\max_{\partial\Omega}\frac{d\nu}{|\omega|}\int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\omega|$$

となる。これは汎函数$\tilde{h}\to v\cdot\tilde{h}(\zeta)$がノルム$\|\tilde{h}\|=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\omega|$に関して$\widetilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*)$上連続であることを示している。この汎函数のノルムをMとするとMは(2)の右辺に等しい。$\widetilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*)$は$L^1(\partial\Omega;V^*)$に埋めこまれる。Hahn-Banachの定理によって$\partial\Omega$上の有界V値函数Fが存在して，任意の$\tilde{h}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*)$に対して，

$\|F\|_\infty = M, \qquad v\cdot\hat{h}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} F\cdot\hat{h}|\omega|$

となる。任意の$\tilde{h}\in\tilde{\mathcal{H}}_\infty(\Phi^*)$に対して，$\tilde{\omega}$はζで留数1をもつと仮定すると，$F\cdot\tilde{h}|\omega|\tilde{\omega}^{-1}$ はζで値$v\tilde{h}(\zeta)$をとるΩ上の$\mathcal{H}_\infty$函数の境界函数である。なぜならφをζで留数1をもつ単純極を除いて$\bar{\Omega}$で正則な*differential* とすると，$\frac{\tilde{h}\varphi}{\tilde{\omega}}\in\tilde{\mathcal{H}}_\infty(\xi^*\Phi^*)\subset\tilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*)$ かつ $\frac{\tilde{h}\varphi}{\tilde{\omega}}(\zeta)=\tilde{h}(\zeta)$ となる。従って $v\cdot\hat{h}(\zeta)=v\cdot\frac{\tilde{h}\varphi}{\tilde{\omega}}(\zeta)=$ $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}F\,\frac{\tilde{h}\varphi}{\tilde{\omega}}|\omega|$ となる。φは任意であるから，*Cauchy-Read* の定理から従う。Φ^*を$\Omega'(\supset\bar{\Omega})$上の*vector bundle* Φ'に拡張する。するとΦ'の代表元$(\{U'_\alpha\},\{\Phi'_{\alpha\beta}\})$と$\Phi^*$の代表元$(\{U_\alpha\},\{\Phi^*_{\beta\alpha}\})$で$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ ならば $U_\alpha=U'_\alpha\cap\Omega$，かつ $\Phi'_{\alpha\beta}=\Phi^*_{\beta\alpha}$ となるものが存在する。*Grauert*([2]) によりΦ'は*analytic trivial* であるから，正則$A(V^*)$値函数K_αが存在して，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ならば，$K_\alpha=\Phi'_{\alpha\beta}K_\beta$ となる。他方$\Phi^*|\Omega-C$は*trivial*であるから$\{U_\alpha\cap(\Omega-C)\}$の細分$\{V_\lambda\}$と$\Psi_\lambda\in A(V^*)$が存在して，$V_\lambda\cap V_\mu\neq\phi$ならば $I=\Psi_\lambda\Phi^*_{\alpha(\mu)\alpha(\lambda)}\Psi_\mu^{-1}=\Psi_\lambda\Phi'_{\alpha(\lambda)\alpha(\mu)}\Psi_\mu^{-1}$ となる。故に函数$\tilde{K}(z)=\Psi_\lambda K_{\alpha(\lambda)}(z)$ $z\in V_\lambda$，はΩ−C上で定義される。任意の$v^*\in V^*$に対して，$\tilde{K}v^*\in\tilde{\mathcal{H}}_\infty(\Phi^*)$となる。故に$(F\cdot\tilde{K}v^*)|\omega|\tilde{\omega}^{-1}=(\tilde{K}^*F|\omega|\tilde{\omega}^{-1}\cdot v^*)$はζで値$v\cdot\tilde{K}(\zeta)v^*$をとるΩ上の$\mathcal{H}_\infty$函数の境界函数である。これはすべての$v^*$に対して正しいから，$\tilde{K}^*F|\omega|\tilde{\omega}^{-1}$はζで値$\tilde{K}^*(\zeta)v$を取る*fibre* Vをもつ*trivial bundle* の$\mathcal{H}_\infty$函数の境界函数である。故に$F|\omega|\tilde{\omega}^{-1}=\tilde{K}^{*-1}(\tilde{K}^*F|\omega|\tilde{\omega}^{-1})$はζで値$v$を取る，

$\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty(\Phi)$ の境界函数である。$\|\tilde{f}\|_\infty = \|F\|_\infty = M$ だから,

$$(2) \text{ の左辺} \leqq (2) \text{ の右辺}$$

が成立する。最後に, $\hat{f}$ と $\hat{h}$ がおのおのの条件を満たすとする。すると $\hat{f} \cdot \hat{h}\hat{\omega}$ は Ω 上の一価な *differential* へ拡張される。故に

$$|v \cdot \hat{h}(\zeta)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \hat{f} \cdot \hat{h}\hat{\omega}\right| \leqq \|\hat{f}\|_\infty$$

となり, ((2) の左辺) $\geqq$ ((2) の右辺) が示された。

定義 10. 任意の *Riemann* 面上の *vector bundle* の *section* f に対して,

$\|f\|_{p,\zeta} \equiv |f|^p$ の最小の調和優函数の ζ での値の p 乗根,

と定義する。境界のある *Riemann* 面のときは,

$\|f\|_{p,\zeta}^p = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} |f|^p |d\tilde{g}(\cdot,\zeta)|$ となる。ここで $g(\cdot,\zeta)$ は ζ に極をもつ Ω の *Green* 函数で $\tilde{g}$ は g の共役である。

$z_k = z_k(\zeta)$ を $g(z,\zeta)$ の *critical point* とする。すると次の定理が成立する。

定理 1. 任意の $\zeta \in \Omega$ に対して,

$$(3) \quad \sup_\Phi \inf\{\|f\|_\infty ; f \in \mathcal{H}_\infty(\Phi), |f(\zeta)| = 1\} = \sup_\Phi \inf\{\|h\|_{1,\zeta} ; h \in \mathcal{H}_1(\Phi), |h(\zeta)| = 1\}$$
$$= \exp\left(\Sigma g(z_k,\zeta)\right),$$

が成立する。ここで Φ は $H^1(\Omega, \mathcal{U}(V))$ のすべての元を動くものとする。

証明. $d[g(\cdot,\zeta) + i\tilde{g}(\cdot,\zeta)]$ は ζ で留数が 1 の単純極をもち,

z_k で 0 になる。$\{U_\alpha\}$ を単連結集合による Ω の被覆とすると，各 U_α で $\exp[g(\cdot,z_k)+i\tilde{g}(\cdot,z_k)]$ の一価な分枝 $G_{\alpha k}$ が定義される。$\xi_{\alpha\beta k} \equiv G_{\alpha k}/G_{\beta k}$ とおくと，$\xi_{\alpha\beta k}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で定数である。$\xi_k \equiv \{\xi_{\alpha\beta k}\}$ は line bundle であり，$\{G_{\alpha k}\}$ は ξ_k の meromorphic section を表わす。$\xi \equiv \prod_k \xi_k$ とすると，$\omega_\alpha \equiv \prod_k G_{\alpha k}\, d[g(\cdot,\zeta)+i\tilde{g}(\cdot,\zeta)]$ は $\omega \in \mathcal{P}^1(\xi)$ を定義する。ω_α は到る所 0 にならない。ω は ζ で留数の絶対値が $r = |\prod_k G_{\alpha k}(\zeta)| = \prod_k \exp g(\zeta, z_k)$ である単純極をもつ。$\omega' \equiv r^{-1}\omega$ とおく。すると ω' は補題 3 の仮定をみたす。故に任意の Φ と任意の $v \in V$ に対して，

$$(*)\quad \inf\{\|\tilde{f}\|_\infty ; \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}_\infty(\Phi),\ \tilde{f}(\zeta)=v\} = \sup\{|v\cdot\tilde{h}(\zeta)| ; \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*),\ \int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\omega'| = 2\pi\}$$

が成立する。$v \in V$ を単位ベクトルとすると，

$$(**)\quad |v\cdot\tilde{h}(\zeta)| \leqq |v||\tilde{h}(\zeta)| \leqq |v| r = r$$

となる。なぜなら，

$$2\pi r = \int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\omega| = \int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||\prod_k G_{\alpha k}||d[g(\cdot,\zeta)+i\tilde{g}(\cdot,\zeta)]| = \int_{\partial\Omega}|\tilde{h}||d\tilde{g}(\cdot,\zeta)|$$
$$= 2\pi\, L.H.M.(|\tilde{h}|)(\zeta) = 2\pi \|\tilde{h}\|_{1,\zeta}$$

となるから，$r = \|\tilde{h}\|_{1,\zeta}$ となる。I を fibre V をもつ trivial bundle とし，$\Phi = \xi^* I$ とする。すると $\Phi^* = \xi I^*$ となる。$v^* \in V^*$ で $v v^* = 1$ となるものを取る。$\tilde{h} = r v^*$ とおく。すると $\|\tilde{h}\|_{1,\zeta} = r$，$\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*) = \tilde{\mathcal{H}}_1(I^*)$，$|v\cdot\tilde{h}(\zeta)| = r$ となる。(*) と (**) によって任意の固定した単位ベクトル v に対して

$$r = \sup_\Phi \sup\{|v\cdot\tilde{h}(\zeta)| ; \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\xi^*\Phi^*),\ \|\tilde{h}\|_{1,\zeta} = r\} =$$

$= \sup_{\Phi} \inf \{ \|\hat{f}\|_{\infty} ; \hat{f} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\infty}(\Phi), \hat{f}(\zeta) = v \} = \sup_{\Phi} \inf \{ \|\hat{f}\|_{\infty} ; \hat{f} \in \tilde{\mathcal{H}}_{\infty}(\Phi), |\hat{f}(\zeta)| = 1 \}$

となる。(*) において Φ を $\xi^*\Phi^*$, v を $v^* \in V^*$ におきかえると，$\xi^*\Phi^*$ は Φ となる。故に

$\sup \{ |\hat{h}(\zeta) \cdot v^*| ; \hat{h} \in \mathcal{H}_1(\Phi), \|h\|_{1,\zeta} = 1 \} = \inf \{ r^{-1} \|\hat{f}\|_{\infty} ; \hat{f} \in \mathcal{H}_{\infty}(\xi^*\Phi^*), \hat{f}(\zeta) = v^* \}$

となる。$|v^*| = 1$ だから $r^{-1} \|\hat{f}\|_{\infty} \geqq r^{-1}$ となる。ところが，$\Phi = \xi^* I$，$\hat{f} = v^*$ とおくと $r^{-1} \|\hat{f}\|_{\infty} = r^{-1}$ となる。故に

$$\inf_{\Phi} \sup \{ |\hat{h}(\zeta) \cdot v^*| ; \hat{h} \in \mathcal{H}_1(\Phi), \|\hat{h}\|_{1,\zeta} = 1 \} = r^{-1}$$

となる。h は $|\hat{h}(\zeta) \cdot v^*| = |h(\zeta)|$ となる代表元をもつから，

$\inf_{\Phi} \sup \{ |h(\zeta)| ; h \in \mathcal{H}_1(\Phi), \|h\|_{1,\zeta} = 1 \} = r^{-1}$ となる。これは

$\sup_{\Phi} \inf \{ \|h\|_{1,\zeta} ; h \in \mathcal{H}_1(\Phi), |h(\zeta)| = 1 \} = r$ と同値である。

§4

この章では前章の結果を一般の Riemann 面へ拡張する．例として境界のあるコンパクトな Riemann 面の内部になっていない Riemann 面 $\Omega = \{ 0 < |z| < 1 \}$ を考えてみよう。この場合には $H^1(\Omega; U(\mathbb{C})) \cong Hom(\pi(\Omega), U(\mathbb{C})) \cong \{ S \in \mathbb{C} ; |S| = 1 \}$ となる。なぜなら $\pi(\Omega) = \{ a^n ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \}$, a は生成元，$U(\mathbb{C}) = \{ |S| = 1 \}$ となるから，$\varphi \in Hom(\pi(\Omega), U(\mathbb{C}))$ に対して，$\varphi(a)$ と φ とは一対一に対応するから φ を $|S| = 1$ の点と同一視できるからである。ξ_S を S に対応する line bundle とする。ξ_S の section $f = \{ f_\alpha \}$ は一価な絶対値をもつ多価正則函数

である。$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ に対して $(U_\alpha, U_{\alpha_1}, \ldots, U_\beta)$ を 0 点を一周する chain とすると $(\xi_s)_{\alpha\beta} = (\tilde{\xi}_s)(U_\alpha, U_{\alpha_1}, \ldots, U_\beta) = s$ となるから，$f_\alpha = s f_\beta$ となる。$s = e^{2\pi i}a$ $(0 \leqq a < 1)$ とおく。すると z^a は $s = e^{2\pi i a}$ に対応する line bundle ξ_s の section である。

$\inf\{\|f\|_\infty ; f \in \mathcal{H}_\infty(\xi_s), |f(\zeta)| = 1\} = |\zeta|^{-a}$ となる。なぜなら $f \in \mathcal{H}_\infty(\xi_s)$ とすると，$\frac{f(z)}{z^a}$ は一価である。さらに $|z \cdot \frac{f(z)}{z^a}| = |z|^{1-a}|f(z)| \longrightarrow 0\ (z \longrightarrow 0)$，だから $z^{1-a} f(z)$ は正則で $z=0$ で 0 となる。故に $\frac{f(z)}{z^a}$ は $z=0$ で正則である。最大値の原理により，$|\frac{f(z)}{z^a}| \leqq \|f\|_\infty$. 故に $|f(\zeta)| \leqq |\zeta|^a \|f\|_\infty$ が成立する。故に $|f(\zeta)|=1$ のとき $\|f\|_\infty \geqq |\zeta|^{-a}$ となる。$f(z) = |\zeta|^{-a} z^a$ とおくと，$|f(\zeta)|=1$, $\|f\|_\infty = |\zeta|^{-a}$ となる。故に $\sup_\xi \inf\{\|f\|_\infty ; f \in \mathcal{H}_\infty(\xi), |f(\zeta)| = 1\} = |\zeta|^{-1}$ となる。

(*) Ω の Green 函数を $g(z, \zeta)$ とすると，$g(z,\zeta) = \log\left|\frac{1-\bar{\zeta}z}{z-\zeta}\right|$ である。なぜなら，u を Ω 上の有界調和函数とする。v を u の共役調和函数とする。すると $\frac{exp(u+iv)}{z^a}$ はある $0 \leqq a < 1$ に対して $|z|<1$ で正則である。$|z|^a \longrightarrow 0\ (a>0)\ (|z| \to 0)$，だから $|exp(u+iv)| = e^u \to 0\ (z \to 0)$ とならねばならない。故に $a=0$ でなければならない。故 e^{u+iv} は $|z|<1$ で一価正則である。故に u は 0 点で調和である。u は Ω 上で調和で $0 \leqq u \leqq g(z,\zeta)$, $z \in \Omega$, とすると u は境界値 0 をもつ $|z|<1$ 上の有界調和函数である。故に $u \equiv 0$. 故に g は Ω の Green 函数である。$\frac{d}{dz}(g(z,\zeta) + i\tilde{g}(z,\zeta))$ は Ω 内に 0 点をもたない。故に $e^{\Sigma g(z_k,\zeta)} = 1$ となり (3) 式

は成立しない。

今，$\bar{\Omega}$を境界のあるRiemann面とし，ΩのGreen函数$g(z,\zeta)$のcritical pointの数をNとする。BをΩの才一Betti数とすると$N=B$となる。従って$g(z,\zeta)$のcritical valueと異なるαに対して，$\Omega(\alpha,\zeta)=\{z\in\Omega,\ g(z,\zeta)>\alpha\}$はGreen函数$g(z,\zeta)-\alpha$をもつ境界のあるRiemann面となる。従って　$B(\alpha,\zeta)=$ $g(z,\zeta)$のαをこえるcritical valueの数，　となるから，

$$(4)\qquad \Sigma g(z_k,\zeta)=\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha$$

が$\Omega=(\bar{\Omega})^\circ$に対して成立する。

定理２．　任意の開Riemann面Ωに対して，

$$(5)\ \sup_\Phi \inf\{\|f\|_\infty;\ f\in\mathcal{H}_\infty(\Phi),\ |f(\zeta)|=1\}=\sup_\Phi \inf\{\|h\|_{1,\zeta};\ h\in\mathcal{H}_1(\Phi),\ |h(\zeta)|=1\}$$
$$=\exp\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha$$

が成立する。ここでΦは$H^1(\Omega,U(V))$のすべての元を動く。

証明．　Ωを正則部分領域の増加列$\{\Omega_n\}$で近似する。$\zeta\in\Omega_1$と仮定してさしつかえない。$g_n(z,\zeta)$をΩ_nのGreen函数とし，

$\Omega_n(\alpha,\zeta)\equiv\{z;\ g_n(z,\zeta)>\alpha\}$, $B_n(z,\zeta)\equiv\Omega_n(\alpha,\zeta)$のBetti数，

$M(\Phi,\zeta)\equiv\inf\{\|f\|_\infty;\ f\in\mathcal{H}_\infty(\Phi),\ |f(\zeta)|=1\}$, $M(\zeta)\equiv\sup\{M(\Phi,\zeta);\ \Phi\in H^1(\Omega,U(V))\}$,

$M_n(\Phi,\zeta)\equiv\inf\{\|f\|_\infty;\ f\in\mathcal{H}_\infty(\Phi),\ |f(\zeta)|=1\}$　$(\Phi\in H^1(\Omega_n,U(V)))$,

$M_n(\zeta)\equiv\sup\{M_n(\Phi,\zeta);\ \Phi\in H^1(\Omega_n,U(V))\}$,

とおく。ΦをΩ_{n+1}上のvector bundleとすると，

$M_n(\Phi|\Omega_n,\zeta)\leqq M_{n+1}(\Phi,\zeta)\leqq M_{n+1}(\zeta)$　となる。Ω_n上のvector bundle Φ_n は Ω_{n+1} 上の vector bundle Φ_{n+1} の制限であるから，$M_n(\Phi_n,\zeta)=M_n(\Phi_{n+1}|\Omega_n,\zeta)\leqq M_{n+1}(\zeta)$ となる。故に $M_n(\zeta)\leqq M_{n+1}(\zeta)$ となる。同様に $M_n(\zeta)\leqq M(\zeta)$ がいえる。$\lim_{n\to\infty}M_n(\zeta)=M(\zeta)$ となることを次に示す。$\lim M_n(\zeta)<\infty$ と仮定する。$\Phi\in H^1(\Omega,U(V))$ とする。各 n に対して，$|f_n(\zeta)|=1$，$\|f_n\|_\infty=M_n(\Phi|\Omega_n,\zeta)$ となる $f_n\in\mathcal{H}_\infty(\Phi|\Omega_n)$ が存在する。$\{U_\alpha\}$ を Ω の可算被覆とし，$\bar{U}_\alpha$ はコンパクトで，$\bar{U}_\alpha\subset U'_\alpha$ かつ U'_α, $U'_\alpha\cap\Omega_n$ は単連結になるものとする。$\{f_{\alpha n}\}$ を f_n の $U'_\alpha\cap\Omega_n$ に対する代表元とする。$\|f_n\|_\infty\leqq M_n(\zeta)$ であるから，$f_{\alpha n}$ は一様有界である。従って部分列 n_k が存在して $\{f_{\alpha n_k}\}$ は U'_α 上一様収束する。極限函数を f_α とすると $f\equiv\{f_\alpha\}\in\mathcal{H}_\infty(\Phi)$，$|f(\zeta)|=1$ となる。$\|f\|_\infty\leqq\lim M_n(\zeta)$ だから $M(\Phi,\zeta)\leqq\lim M_n(\zeta)$，従って $M(\zeta)\leqq\lim M_n(\zeta)$ となり，$M(\zeta)=\lim M_n(\zeta)$ が証明された。次に α はどの $g_n(z,\zeta)$ の critical value でもないとする。$\Omega_n(\alpha,\zeta)\subset\Omega_{n+1}(\alpha,\zeta)$ であるから 写像 $\varphi:H_1(\Omega_n(\alpha,\zeta))\to H_1(\Omega_{n+1}(\alpha,\zeta))$ が存在する。$\Omega_n(\alpha,\zeta)$ のサイクル σ が $\Omega_{n+1}(\alpha,\zeta)$ で 0 にホモローグであるとする。すると σ は Ω_{n+1} において 0 にホモローグである。Ω_n は Ω_{n+1} で正則であるから σ は Ω_n で 0 にホモローグである。$\Omega_n(\alpha,\zeta)$ は Ω_n で正則であるから，σ は $\Omega_n(\alpha,\zeta)$ で 0 にホモローグである。故に φ は単射である。故に $B_n(\alpha,\zeta)\leqq B_{n+1}(\alpha,\zeta)$ となる。同様に $B_n(\alpha,\zeta)\leqq B(\alpha,\zeta)$ となる。$g(z,\zeta)=\lim g_n(z,\zeta)$ であるから，$\Omega(\alpha,\zeta)=\bigcup_n\Omega_n(\alpha,\zeta)$ となる。

従って $\Omega(\alpha,\zeta)$ の任意のサイクルはある $\Omega_n(\alpha,\zeta)$ の中にあるから，$B(\alpha,\zeta)=\lim B_n(\alpha,\zeta)$ となる。故に $M(\zeta)=\lim M_n(\zeta)=\lim_n \exp(\sum_k g_n(z_k,\zeta))=\lim \exp\int_0^\infty B_n(\alpha,\zeta)d\alpha=\exp\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)d\alpha$ となり定理の前半は証明された。後半を証明する。

$M'(\Phi,\zeta)\equiv\inf\{\|f\|_{1,\zeta};f\in\mathcal{H}_1(\Phi),|f(\zeta)|=1\}$, $M'(\zeta)\equiv\sup\{M'(\Phi,\zeta);\Phi\in H'(\Omega,U(V))\}$ とおく。$M_n'(\Phi,\zeta)$, $M_n'(\zeta)$ も同様に定義される。$\Phi\in H'(\Omega_{n+1},U(V))$ ならば，$M_n'(\Phi|\Omega_n,\zeta)\leqq M_{n+1}'(\Phi,\zeta)\leqq M_{n+1}'(\zeta)$ となり補題1より $M_n'(\zeta)\leqq M_{n+1}'(\zeta)$ となる。同様に $M_n'(\zeta)\leqq M'(\zeta)$ となる。$M'(\zeta)=\lim_n M_n'(\zeta)$ となることを示す。$\lim M_n'(\zeta)<+\infty$ と仮定する。$\Phi\in H'(\Omega,U(V))$ とする。各 n に対して $|h_n(\zeta)|=1$, $\|h_n\|_{1,\zeta}\leqq M_n'(\Phi|\Omega_n,\zeta)+\frac{1}{n}$ となる $h_n\in\mathcal{H}_1(\Phi|\Omega_n)$ が存在する。$\{h_{\alpha n}\}$ を h_n の代表元とする。$h_{\alpha n}$ は $U_\alpha'\cap\Omega_n$ 上で正則である。u_n を $|h_n|$ の最小調和優函数とすると，$\|h_n\|_{1,\zeta}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_n}|h_n|d\tilde{g}(\cdot,\zeta)=u_n(\zeta)$ となる。任意のコンパクト集合 $F(\subset\Omega_n)$ に対して，定数 $K>0$ が存在して，Ω_n 上の任意の正調和函数 v と $z\in F$ に対して $v(z)\leqq Kv(\zeta)$ となる。故に $z\in F$ に対して $|h_n(z)|\leqq u_n(z)\leqq Ku_n(\zeta)=K\|h_n\|_{1,\zeta}\leqq K(\lim_{n\to\infty}M_n'(\zeta)+1)$ となる。$\{U_\alpha\}$ を Ω の開被覆で $\overline{U_\alpha}$ がコンパクト，$\overline{U_\alpha}\subset U_\alpha'$ となるものとする。すると正規族の議論から，部分列 $\{h_{\alpha n_k}\}$ で U_α 上一様収束するように選べる。h_α を $h_{\alpha n_k}$ の極限函数とすると，$h=\{h_\alpha\}\in\mathcal{H}_1(\Phi)$，かつ $|h(\zeta)|=1$ となる。$h\in\mathcal{H}_1(\Phi)$ となることを次に示す。

$v_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_m} |h||d\tilde{g}_m(\cdot, z)|$ とおく。すると $|v_m(z)| \geqq |h(z)|$,

$v_m(z) \leqq v_{m+1}(z)$, $z \in \Omega_m$, が成立する。任意の $\varepsilon > 0$ と m_0 に対して, $n_k > m$ ならば $|h(z) - h_{n_k}(z)| < \varepsilon$, $z \in \partial\Omega_{m_0}$ が成立する。故に $v_{m_0}(z) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_0} |h_{n_k}||d\tilde{g}_{m_0}(\cdot, \zeta)| + \varepsilon \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_{n_k}} |h_{n_k}||d\tilde{g}_{n_k}(\cdot, \zeta)| + \varepsilon$

$$\leqq M_{n_k}(\xi|\Omega_{n_k}, \zeta) + \frac{1}{n_k} + \varepsilon \leqq M_{n_k}(\zeta) + \frac{1}{n_k} + \varepsilon,$$

となる。故に $v_{m_0}(\zeta) \leqq \lim_k M_{n_k}(\zeta)$ となる。$v = \lim v_m$ は Ω で調和で $v \geqq |h|$ をみたすから, $\|h\|_{1,\zeta} \leqq v(\zeta) \leqq \lim_n M_n(\zeta)$ が成立する。故に $M(\zeta) \leqq \lim M_n(\zeta)$ となる。以下は前半の証明と全く同じである。

§5

この章の目的は定理3を証明することである。そのためにいくつかの準備をする。line bundle ξ に対して,

$m(\xi, \zeta) \equiv \sup\{|f(\zeta)|;\ f \in \mathcal{H}_1(\xi),\ \|f\|_{1,\zeta} \leqq 1\}$, $m(\zeta) \equiv \inf_\xi m(\xi, \zeta)$ とおく。定理2より $\int_0^\infty B(\alpha, \zeta)\, d\alpha = \infty$ と $m(\zeta) = 0$ は同値である。$\int_0^\infty B(\alpha, \zeta)\, d\alpha = \infty$ ならば Ω は単連結ではないから, nontrivial line bundle ξ が存在する。$H_1(\xi) \neq 0$ とすると Ω 上に定数でない劣調和函数が存在するから Ω は hyperbolic である。以下 Ω は hyperbolic であると仮定する。

補題4. ある $\zeta \in \Omega$ に対して $m(\zeta) = 0$ ならば, すべての $\zeta \in \Omega$ に対して $m(\zeta) = 0$ である。

証明． 任意の$\zeta_1,\zeta_2\in\Omega$に対して，ζ_1,ζ_2を含むΩにおける相対コンパクトな開集合Uを取る。Ωを正則部分領域の増加列$\{\Omega_i\}$で近似する。$g_n(z,\zeta)$をΩ_nのGreen函数とする。

$a=\min_{\partial U} g_1(\cdot,\zeta_1)$，$A=\max_{\partial U} g(\cdot,\zeta_2)$とおく。すると$\partial U$上で$g_n(z,\zeta_1)\geqq aA^{-1}g_n(z,\zeta_2)$となる。従って$\Omega_n-U$上で成立する。$\Omega_n(\alpha,\zeta_2)\cap U_n^c\subset\Omega_n(aA^{-1}\alpha,\zeta_1)\cap U_n^c$となるからある$\alpha_0$が存在して，すべての$n$に対して，$\alpha<\alpha_0$ならば$U\subset$ $\Omega_n(\alpha,\zeta_2)\cap\Omega_n(aA^{-1}\alpha,\zeta_1)$となる。故に$\alpha<\alpha_0$ならば，$\Omega_n(\alpha,\zeta_2)\subset\Omega_n(aA^{-1}\alpha,\zeta_1)$となる。$\alpha$が$g(\cdot,\zeta_2)$のcritical pointでないならば，$\Omega_n(\alpha,\zeta_2)$は$\Omega_n(aA^{-1}\alpha,\zeta_1)$の正則部分領域である。故に$\alpha<\alpha_0$ならばすべての$n$に対して，$B_n(\alpha,\zeta_2)\leqq B_n(aA^{-1}\alpha,\zeta_1)$が成立する。故に

$$\int_0^{\alpha_0}B_n(\alpha,\zeta_2)\,d\alpha\leqq a^{-1}A\int_0^{\infty}B_n(\alpha,\zeta_1)\,d\alpha\leqq a^{-1}A\int_0^{\infty}B(\alpha,\zeta_1)\,d\alpha,$$

となり従って $\int_0^{\alpha_0}B(\alpha,\zeta_2)\,d\alpha\leqq a^{-1}A\int_0^{\infty}B(\alpha,\zeta_1)\,d\alpha$ となる。$\int_{\alpha_0}^{\infty}B(\alpha,\zeta_2)\,d\alpha<\infty$だから，$m(\zeta_1)>0$ならば$m(\zeta_2)>0$が示された。

補題5． $r_1<|z|<r_2$上の正調和函数uで，

$$\int *du\leqq 1,\qquad \lim_{|z|\to r_1}u(z)=0$$

をみたすものは（積分は円環内の円にそって時計の針と逆むきになされる）各円環：$r_1<|z|<r\ (r<r_2)$上で一様有界である。

証明． $r_1r_2=1$と仮定してさしつかえない。$v(z)\equiv u(\bar{z}^{-1})-u(z)$

とおくと，$v(z)$ は $A: r_1<|z|<1$ で調和で $\liminf_{z\to\partial A} v(z) \geqq 0$ となる。故に A で $v(z)\geqq 0$，従って $u(\bar{z}^{-1}) \geqq u(z)$ となる。故に $\left.\frac{\partial u(z)}{\partial z}\right|_{|z|=1} \geqq 0$ である。$\Gamma_1=\{|z|=r_1\}$，$\Gamma_0=\{|z|=1\}$ とおく。

A に対する Dirichlet - Neumann 問題

$$(*)\quad \begin{cases} \Delta u(z)=0, & z\in A \\ u(z)=\varphi(z), & z\in\Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(z)=\psi(z), & z\in\Gamma_0 \end{cases}$$

を考える。そのために，まず

$$\begin{cases} \Delta u(z)=0, & z\in A \\ u(z)=\varphi(z), & z\in\Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(z)=0 & z\in\Gamma_0 \end{cases}$$

をみたす u を見つけよう。

$$u(r,\theta)=\alpha\log r+\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

とかくことができる。$r=1$ に対して，

$$0=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1}=\alpha+\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$
$$=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty} n\left[(a_n-a_{-n})\cos n\theta+(b_n+b_{-n})\sin n\theta\right].$$

故に $\alpha=0$，$a_{-n}=a_n$，$b_{-n}=-b_n$ となる。従って，

$$u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(r^n+r^{-n})\cos n\theta+b_n(r^n+r^{-n})\sin n\theta\}$$

となる。故に，$u(r_1,\theta)=\varphi(\theta)$ となることを使うと，

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)d\omega,\quad a_n(r_1^n+r_1^{-n})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\cos n\omega d\omega,$$

$$b_n(r_1^n+r_1^{-n})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\sin n\omega\, d\omega,$$

が成立する。従って，

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+r^{-n}}{r_1{}^n+r_1{}^{-n}}\cos n(\theta-\omega)\right]d\omega$$

となる。

$$\frac{r^n+r^{-n}}{r_1{}^n+r_1{}^{-n}}\leqq\begin{cases}\dfrac{2r^{-n}}{r_1{}^{-n}}=2\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^n, & r_1<r\leqq 1\\[2mm] \dfrac{2r^n}{r_1{}^{-n}}=2(r_1r)^n, & 1\leqq r<r_1^{-1}\end{cases}$$

だから，$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+r^{-n}}{r_1{}^n+r_1{}^{-n}}\cos n(\theta-\omega)$ は $r_1<|z|<r_1^{-1}$ で広義一様収束する。次に

$$\begin{cases}\Delta u(z)=0, & z\in A\\ u(z)=0, & z\in\Gamma_1\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(z)=\psi(z), & z\in\Gamma_0\end{cases}$$

を満たす u を見つけよう。

$$u=\alpha\log r+\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

とおく。$r=r_1$ に対して，

$$0=u(z)=\alpha\log r_1+a_0+\sum_{n\neq 0}r_1{}^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

$$=(\alpha\log r_1+a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_nr_1{}^n+a_{-n}r_1{}^{-n})\cos n\theta+(b_nr_1{}^n-b_{-n}r_1{}^{-n})\sin n\theta\}$$

だから，

$$\begin{cases}\alpha\log r_1+a_0=0, & a_0=-\alpha\log r_1\\ a_nr_1{}^n+a_{-n}r_1{}^{-n}=0, & a_{-n}=-a_nr_1{}^{2n}\\ b_nr_1{}^n-b_{-n}r_1{}^{-n}=0, & b_{-n}=b_nr_1{}^{2n}\end{cases}$$

を得る。$r=1$ に対しては，

$$\psi(\theta)=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=1}=\alpha+\sum_{n\neq 0}n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \{ n a_n (1+r_1^{2n}) \cos n\theta + n b_n (1+r_1^{2n}) \sin n\theta \} .$$

故に，

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega)d\omega , \quad n a_n (1+r_1^{2n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \cos n\omega \, d\omega ,$$

$$n b_n (1+r_1^{2n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sin n\omega \, d\omega$$

となる。故に，

$$u = \alpha \log r + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (r^n - r_1^{2n} r^{-n}) \cos n\theta + b_n (r^n - r_1^{2n} r^{-n}) \sin n\theta]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega)d\omega\right) \log \frac{r}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ (r^n - r_1^{2n} r^{-n}) \frac{1}{n(1+r_1^{2n})} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega)\cos n\omega \, d\omega \cdot \cos n\theta$$

$$+ (r^n - r_1^{2n} r^{-n}) \frac{1}{n(1+r_1^{2n})} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \sin n\omega \, d\omega \cdot \sin n\theta \Big\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) d\omega \left[\frac{1}{2} \log \frac{r}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{n(1+r_1^{2n})} \cos n(\theta - \omega) \right] .$$

$r_1^{2n} \cdot r^{-n} = r_1^n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \leqq r_1^n \leqq r^n$ だから，

$$0 < \frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{n(1+r_1^{2n})} < \frac{r^n}{n}$$

となる。故に核函数は $r_1 < |z| = r < 1$ に対して広義一様収束する。これら二つの結果を結びつけて，(*) を満たす函数 u は

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \frac{1}{r_1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + r^{-n}}{r_1^n + r_1^{-n}} \cos n(\theta-\omega) \right] r_1 \, d\omega$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \left[\frac{1}{2} \log \frac{r}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{n(1+r_1^{2n})} \cos n(\theta-\omega) \right] d\omega$$

によって与えられる。$|z| = r_1$ 上で $u(z) = 0$ だから，

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}(\omega) \left[\frac{1}{2}\log\frac{r}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n - r_1^{2n} r^{-n}}{n(1+r_1^{2n})} \cos n(\theta-\omega) \right] d\omega$$

となる。$r_1 < |\zeta| = r' < 1$ に対して，

$$u(\zeta) \leqq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \log \frac{r'}{r_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n - r_1^{2n} r'^{-n}}{n(1+r_1^{2n})} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}(z) |dz|$$

となるから，$u(\zeta)$ は $r_1 < |z| \leqq r' < 1$ 上で一様有界である。

補題は Harnack の不等式から，上の結果を利用して従う。

補題6. $\tilde{\Omega}$をコンパクトな境界αをもつコンパクトでないRiemann面とする。すると$\tilde{\Omega}$上の正値調和函数uで,

$$\int_\alpha {*du} > 0$$

を満たすものがある。更にΩの理想境界におけるαの補集合が正の調和測度をもつならば，有界，Dirichlet有限な正調和函数uで

$$\int_\alpha {*du} < 0$$

となるものが存在する。

証明. $\{\Omega_n\}$をΩを近似する正則部分領域の増加列で，$\alpha \subset \partial\Omega_n$をみたすものとする。$\partial\Omega_n = \alpha \cup \beta_n$とかく. v_nをΩ_nにおける調和函数で$\partial\Omega_n$までこめて連続で，α上で0 β_n上で1となるものとする。

$$D(v_n) \equiv \iint_{\Omega_n} \left(\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy = -\int_{\alpha+\beta_n} v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} |dz| = \int_\alpha {*dv_n} > 0$$

だから，$u_n = \dfrac{v_n}{D(v_n)}$とおくと，$\Omega_n$上で$u_n > 0$，$\alpha$上で$0$，かつ$\int_\alpha {*du_n} = 1$となる。補題5より，$u_n$は$\Omega_n$の任意のコンパクト部分集合上で一様有界である。従って部分列$\{n_k\}$が存在して$\{u_{n_k}\}$は$\tilde{\Omega}$上の正調和函数uに一様収束する。$1 = \int_\alpha {*du}$が成立するから，uは求める函数である。

次に，$\tilde{\Omega}$の理想境界におけるαの補集合が正調和測度vをもつならば，$0 \neq v(z) = \lim v_n(z)$

となる。Ωにおいて$0 < v(z) < 1$が成立する。

$$0 < D(v) = \lim D(v_n) = \lim \int_\alpha * dv_n = \int_\alpha * dv$$

だから，$u = 1 - v$ は求める函数である。

補題 7. Ω_0 を Ω の正則部分領域とする。$\Omega - \Omega_0 = \bigcup_i \tilde{\Omega}_i$ で，各 Ω_i は境界 α_i をもつとする。すると $\sum a_i \equiv 0 \pmod{2\pi}$ となる任意の実数 a_i に対して，Ω 上の非負調和函数 u で各 i に対して，$\int_{\alpha_i} * du \equiv a_i \pmod{2\pi}$，となるものが存在する。更に任意の $\zeta \in \Omega$ に対して，$u(\zeta)$ は a_i に独立な定数で押さえられる。

証明. 成分が一つの場合 $u = 0$ とすればよいから，成分は二つ以上と仮定する。Ω は *hyperbolic* であるから，$\tilde{\Omega}_1$ の理想境界における α_1 の補集合は正調和測度をもつ。補題 6 より $\tilde{\Omega}_1$ における正調和函数 u_1 で $\int_{\alpha_1} * du_1 = -1$ となるものが存在する。$i > 1$ に対しては，$\tilde{\Omega}_i$ 上の正調和函数 u_i で $\int_{\alpha_i} * du_i = 1$ となるものが存在する。$\tilde{\Omega}_i$ は補題 6 を適用する前に少し大きな領域でおきかえられるから，これらの函数は α_i まで連続であるようにとれる。Ω_0^c において $i > 1$ に対して，

$$S_i \equiv \begin{cases} u_i & (\tilde{\Omega}_i \text{ 上}) \\ u_1 & (\tilde{\Omega}_1 \text{ 上}) \\ 0 & (\tilde{\Omega}_j \text{ 上}, 1 < j \neq i) \end{cases}$$

とおくと S_i は Ω_0^c 上で連続である。

(*) $\displaystyle \int_{\partial\Omega_0} * ds_i = \int_{\alpha_1} * ds_i + \int_{\alpha_i} * ds_i = \int_{\alpha_1} * du_1 + \int_{\alpha_i} du_i = -1 + 1 = 0.$

P を Ω_0 に対応する Ω の理想境界の分割とし，*principal operator*

(P)L_1 を L によって表わす。(*)より [1] の定理 III.3A によって Ω 上の調和函数 P_i が存在して，Ω_0^c 上で $P_i - S_i = L(P_i - S_i)$ となる。P_i は Ω 上下に有界である。$\int_{\alpha_j} * dP_i = \int_{\alpha_j} * dS_i$ となる。

故に

$$\int_{\alpha_j} * dP_i = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ -1 & (j = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。P_i に適当な定数を加えることによって P_i を正にすることができる。 $0 \leqq b_i < 2\pi$，$b_i \equiv a_i \pmod{2\pi}$ となる b_i に対して， $u \equiv \sum_{i>1} b_i P_i$ とおく。 u は非負調和函数であり，$i > 1$ のとき，

$$\int_{\alpha_i} * du = \sum_{j>1} \int_{\alpha_i} b_j * dP_j = b_i \int_{\alpha_i} * dP_i = b_i \equiv a_i \pmod{2\pi}$$

$i = 1$ のとき

$$\int_{\alpha_1} * du = \sum_{j>1} \int_{\alpha_1} b_j^* dP_j = -\sum_{j>1} b_j \equiv a_1 \pmod{2\pi}$$

となる。更に $u(\zeta) \leqq 2\pi \sum_{i>1} P_i(\zeta)$ となり，補題は成立する。

補題 8. $\zeta \in \Omega_0$ とする。すると次の性質をもつ $g_0(\cdot, \zeta)$ が存在する。

(a) $g_0(\cdot, \zeta) - g(\cdot, \zeta)$ は Ω における Dirichlet 有限な正調和函数である。

(b) 各 i に対して $\int_{\alpha_i} * dg_0(\cdot, \zeta) = 0$ が成立する。

(c) $g_0(z, \zeta)$ は z を固定すると z を含まない任意のコンパクト集合上で有界である。

証明. $\tilde{\Omega}_i$ の理想境界における α_i の補集合が正の調和測度

をもつようなiに対しては補題6より Dirichlet 有限な正の調和函数 u_i で $\int_{\alpha_i} {*du_i} = -1$ を満たすものが存在する。そうでないiに対しては $u_i = 0$ とおく。$\int_{\alpha_i} {*dg(\cdot, \zeta)} = a_i \geqq 0$ となる。$\hat{\Omega}_i$ の理想境界における α_i の補集合が零調和測度をもつとき $a_i = 0$ となる。更に $\sum a_i = 2\pi$ となる。$\hat{\Omega}_i$ で $s = a_i u_i$ とおくと s は Ω_0^c 上の調和函数である。補題7の場合と同様にして，Ω 上の調和函数 p が存在して $p - s = L(p - s)$ となる。$g_0(z, \zeta) = p(z, \zeta) + g(z, \zeta)$ とおくと，g_0 は性質 (a), (b), (c) を満足する。

Ω_0 の特異ホモロジー群は境界サイクルと非分離サイクル，$\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ からなる基底をもつ。

補題9．　任意の実数 $b_1, \cdots, b_N$ に対して，$\zeta_k \in \Omega_0$ で，

$$\sum_k \int_{\gamma_n} {*dg_0(\cdot, \zeta_k)} \equiv b_n \pmod{2\pi}.$$

となるものが存在する。ζ_k の数は b_n に独立な定数によって押さえられる。更に点 ζ_k は任意の開集合に含まれるように選べる。

証明．　Hを複素数値 Dirichlet 有限な閉微分の全体とする。するとHは内積 $(\omega_1, \omega_2) = \iint \omega_1 \wedge \overline{\omega}_2$ のもとで Hilbert 空間をなす。γ_n を Ω の非分離サイクルとする。すると $\omega \in H \longrightarrow \int_{\gamma_n} \omega$ はH上の連続線型汎函数である。故に $\sigma_n \in H$ が存在して，任意の $\omega \in H$ に対して $\int_{\gamma_n} \omega = \iint \omega \wedge \sigma_n$ となる。σ_n は実

調和函数である。ζ と ζ_0 は同じ *parametric disc* の中にあるとする。

$$\omega = df\{[g_0(\cdot,\zeta)+i\tilde{g}_0(\cdot,\zeta)] - [g_0(\cdot,\zeta_0)+i\tilde{g}_0(\cdot,\zeta_0)]\} \equiv d(fh)$$

とおく。ここで f は *parametric disc* D_1 上で 0，少し大きな disc D_2 の外側で 1 をとる Ω 上の C^1 級函数である。γ_n は D_2 の外側にあるとする。すると

$$\int_{\gamma_n}\omega = \int_{\gamma_n} h\,df + f\,dh = \int_{\gamma_n} dh = i\int_{\gamma_n}[d\tilde{g}_0(\cdot,\zeta) - d\tilde{g}_0(\cdot,\zeta_0)]$$
$$= i\int_{\gamma_n}[*dg_0(\cdot,\zeta) - *dg_0(\cdot,\zeta_0)]$$

となる。$k = g_0(\cdot,\zeta) - g_0(\cdot,\zeta_0)$，$v = \log\left(\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right)$，$w = \log\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right|$，$s = \arg\left(\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right)$，$e = 1-f$ とおくと，

$$\Theta = d(ev) \equiv \Phi + i\Psi = \begin{cases} dw + i\,ds & (D_1 \text{上}) \\ d(ew) + i\,d(es) & (D_2 - D_1 \text{上}) \\ 0 & (D_2 \text{の外側}) \end{cases}$$

となる。すると $\Phi = w\,de + e\,dw$ だから，$*\Phi = w*de + e*dw = w*de + e\,ds = \Psi - s\,de + w*de$ となる。故に $-\Phi = **\Phi = *\Psi - s*de - w\,de$ となり，$*\Psi = -\Phi + w\,de + s*de$ となる。次に，$dk - \Phi = d(k - ew) \in \Gamma_{e0}$ だから，

$$\int_{\gamma_n} *dk \left(= \int_{\gamma_n} *d[g_0(\cdot,\zeta) - g_0(\cdot,\zeta_0)]\right) = -i\int_{\gamma_n}(dk + i*dk - \Theta)$$
$$= -i\iint(dk + i*dk - \Theta)\wedge\sigma_n = -i\iint(dk - \Phi)\wedge\sigma_n + \iint(*dk - \Psi)\wedge\sigma_n$$
$$= -\iint(dk + *\Psi)\wedge*\sigma_n = -\iint(dk - \Phi + w\,de + s*de)\wedge*\sigma_n$$
$$= -\iint_{D_2\setminus D_1}(w\,de + s*de)\wedge*\sigma_n =$$

$$= -\iint_{D_2\setminus D_1} \left(d(ew)\wedge *\sigma_n - e\,dw\wedge *\sigma_n + (d(es) - e\,ds)\wedge\sigma_n\right)$$

$$= -\left\{\int_{-\partial D_1} w*\sigma_n + \int_{-\partial D_1} s\sigma_n - \iint_{D_2\setminus D_1} e\,dw\wedge *\sigma_n - \iint_{D_2\setminus D_1} e\,ds\wedge\sigma_n\right\} (= \text{実数}).$$

これに純虚数 $-i\left(\int_{-\partial D_1} s*\sigma_n - \int_{-\partial D_1} w\sigma_n - \iint_{D_2\setminus D_1} e\,ds\wedge *\sigma_n + \iint_{D_2\setminus D_1} e\,dw\wedge\sigma_n\right)$

を加えると,

$$\int_{\gamma_n} *dk = -Re\left\{\int_{-\partial D_1}(w+is)*\sigma_n - i\int_{-\partial D_1}(w+is)\sigma_n - \iint_{D_2\setminus D_1} e(dw+ids)\wedge *\sigma_n + i\iint_{D_2\setminus D_1} e(dw+ids)\wedge\sigma_n\right\}$$

$$= Re\left\{i\int_{-\partial D_1}(w+is)(\sigma_n+i*\sigma_n) - i\iint_{D_2\setminus D_1} e(dw+ids)\wedge(\sigma_n+i*\sigma_n)\right\}$$

となる。$\sigma_n+i*\sigma_n$ は D_2 における正則微分であるから正則函数 a が存在して, $\sigma_n+i*\sigma_n = da$ とかける。故に,

$$(*)\quad \int_{\gamma_n} *dk = Re\left[i\int_{-\partial D_1}(w+is)(\sigma_n+i*\sigma_n)\right] = Re\, i\int_{-\partial D_1}(w+is)\,da$$

$$= Re\, i\int_{\partial D_1} a\,d(w+is) = Re\, i\int_{\partial D_1} a\left(\frac{1}{z-\zeta_0} - \frac{1}{z-\zeta}\right)dz = Re\left[-2\pi(a(\zeta_0)-a(\zeta))\right]$$

$$= 2\pi\, Re\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sigma_n + i*\sigma_n = 2\pi\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sigma_n .$$

となる。Uを与えられた開集合に含まれる parametric disc とし, ζを disc の中心とする。局所パラメーター $x+iy$ によって, $\sigma_n = u_n\,dx + v_n\,dy$ とかける。ここで u_n, v_n は実調和函数である。$u_n = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sigma_n$ だから, U 上で $\sum c_n u_n \equiv 0$ ならば, U 上で $\frac{\partial}{\partial x}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sum c_n\sigma_n \equiv 0$ となる。故に $\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sum c_n\sigma_n \equiv$ 定数 となるから $\sum c_n\sigma_n \equiv 0$ となる。σ_nは一次独立だからすべてのnに対して, $c_n=0$ である。故にu_nは一次独立である。特にある $\zeta_1\in U$で $u_1(\zeta_1)\neq 0$ となる。$\zeta_1,\ldots,\zeta_n\in U$ に対して

$$\Delta(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) = \begin{vmatrix} u_1(\zeta_1) & \cdots, & u_1(\zeta_n) \\ \vdots & & \\ u_n(\zeta_1) & \cdots, & u_n(\zeta_n)\end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定する。$\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta)$ の展開における $u_{n+1}(\zeta)$ の係数は $\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ である。故に $\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta)\neq 0$ となる。従って，$\zeta_{n+1}\in U$ が存在して，$\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta_{n+1})\neq 0$ となる。故に帰納法により $\zeta_1,\dots,\zeta_N\in U$ が存在して $\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_N)\neq 0$ となる。

写像： $R^N \longrightarrow R^N$

$$(x_n) \longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}\int_{\zeta_k}^{\zeta_k+x_k}\sigma_n\right)$$

を考える。(0) での Jacobian $=\Delta(\zeta_1,\dots,\zeta_N)\neq 0$，となるから (0) の近傍の像は R^N における (0) の近傍を含む。(*) より

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_n}{*}dg_0(\cdot,\zeta_k+x_k)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_n}{*}dg_0(\cdot,\zeta_k)+2\pi\sum_{k=1}^{N}\int_{\zeta_k}^{\zeta_k+x_k}\sigma_n$$

だから，$\left(\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_n}{*}dg_0(\cdot,\zeta_k+x_k)\right)$ は R^n の開集合を含む。十分大きな整数 M に対して，$\left(M\int_{\gamma_n}\sum_{k=1}^{N}{*}dg_0(\cdot,\zeta_k+x_k)\right)$ は長さ 2π の幅の N 次元直方体を含む。$\tilde{\zeta}_1,\dots,\tilde{\zeta}_{MN}$ を ζ_k+x_k $(k=1,\dots,N)$ が各々 M 回現われる点からなるとする。すると $\int_{\gamma_n}\sum_k{*}dg_0(\cdot,\tilde{\zeta}_k)$ $=M\int_{\gamma_n}\sum_{k=1}^{N}{*}dg_0(\cdot,\zeta_k+x_k)$ となるから，$x_1,\dots,x_N$ を適当に選べば補題が成立するように出来る。

定義 11.　Ω_0 が Ω における標準領域であるとは，条件

i)　Ω_0 は正則部分領域である。

ii)　$\Omega-\Omega_0=\bigcup_i\tilde{\Omega}_i$ とすると，各 $\tilde{\Omega}_i$ は単一の境界曲線をもつ。

をみたすものである。

標準領域 Ω_0 に対するホモロジー基底は境界曲線 α_i の一つを除いたものと非分離サイクル γ_n からなる。

補題10.　Ω_0をΩにおける標準領域とし，$\zeta\in\Omega_0$とする。すると定数$m>0$で，Ω_0上の任意のline bundle ξ_0に対して，ξ_0のΩへの拡張ξと$f\in\mathcal{H}_\infty(\xi)$が存在して，$\|f\|_\infty\leqq 1$, $|f(\zeta)|\geqq m$を満たすものが存在する。

証明.　$H_1(\Omega_0)$の基底として境界サイクルα_i $(i>1)$と非分離サイクルγ_nをとる。(1)からξ_0は$\pi(\Omega_0)$の一次元ユニタリー表現ψ_0に対応する。$\psi_0(\alpha_j)=e^{-2\pi i a_j}$ $(j=1,2,\cdots)$, $\psi_0(\gamma_n)=e^{-2\pi i b_n}$ $(n=1,2,\cdots)$とかくと，$\sum_{j\geqq1} a_j\equiv 0 \pmod{2\pi}$となる。補題7における$a_i$に対応する調和函数を$u$とする。$\zeta_1,\zeta_2,\cdots$,を補題9によって与えられた$b_n$に対応する点とする。$v=u+\sum_k g_0(\cdot,\zeta_k)$とおく。$F=\exp(-v-i\tilde{v})$とおくと，$F$の$\Omega_0$におけるサイクル$\beta$に沿っての解析接続は$F\psi_0(\beta)$となる。$|F|\leqq1$, $|F(\zeta)|\geqq m$，となる。ここでmはa_j, b_nに無関係な定数である。故にξ_0に独立である。FをΩにおけるサイクルβに沿って解析接続したときにかけられる要素を$\psi(\beta)$とする。するとψはψ_0を拡張する$H_1(\Omega)$の表現である。故にψからξ_0の拡張であるline bundle ξが生じる。多価函数Fから求める性質をもつξのsection fが生じる。

補題11.　ξをΩ上のline bundleとし$\rho_0(\xi)$をξのΩ_0への制限とする。$m(\zeta)=0$と仮定する。Ω_0をΩの標準領域とする。すると$\zeta\in\Omega_0$とΩ_0上のline bundle ξ_0に対して，

$$\inf\{m(\xi,\zeta)\ ;\ \xi\in\rho_0^{-1}(\xi_0)\} = 0$$

が成立する。

証明. ξ を Ω 上の line bundle とする。

$\overline{m}(\xi,\zeta)\equiv \sup\{|f(\zeta)|\ ;\ f\in\mathcal{H}_\infty(\xi),\ \|f\|_\infty\leqq 1\}$ とおくと、Ω 上の任意の line bundle ξ, ξ' に対して、$m(\xi,\zeta)\geqq\overline{m}(\xi',\zeta)\,m(\xi\xi'^{*},\zeta)$ となる。ξ_0 を Ω_0 上の line bundle とすると、$\xi_0^{*}\rho_0(\xi)$ は Ω_0 上の line bundle である。補題10より $\xi_0^{*}\rho_0(\xi)$ の Ω への拡張 ξ' が存在して、$\rho_0(\xi')=\xi_0^{*}\rho_0(\xi)$, $\overline{m}(\xi',\zeta)\geqq m$ となる。$\xi\xi'^{*}\in\rho_0^{-1}(\xi_0)$ だから $m(\xi,\zeta)\geqq m\,\inf\{m(\xi'',\zeta)\ ;\ \xi''\in\rho_0^{-1}(\xi_0)\}$ となる。故に

$\inf\{m(\xi'',\zeta)\ ;\ \xi''\in\rho_0^{-1}(\xi_0)\} = 0$ が成立する。

定理3. 任意の開 Riemann 面 Ω に対して、

(a) $\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha<\infty$ ならば、任意の vector bundle Φ は $\mathcal{H}_\infty(\Phi)$ における non-trivial section をもつ。

(b) $\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha=\infty$ ならば、$\mathcal{H}_1(\xi)=0$ となる line bundle ξ が存在する。

証明. (a)を示す。定理2の証明における記号を用いると、$M_n(\zeta)\leqq M_{n+1}(\zeta)\leqq\cdots\leqq M(\zeta)<+\infty$ だから、Ω 上の任意の vector bundle Φ に対して、$\Phi|\Omega_n$ は補題2より、non-trivial $\mathcal{H}_\infty$ section をもつ。故に $f_n\in\mathcal{H}_\infty(\Phi|\Omega_n)$ が存在して、$|f_n(\zeta)|=1$, $\|f_n\|_\infty\leqq M_n(\zeta)+\frac{1}{n}$ となる。f_n の代表元を $\{f_{n\alpha}\}$ とすると、$f_{\alpha n_k}$ は U_α 上一様収束する。極限函数を f_α とする

と，$f=\{f_\alpha\}\in\mathcal{H}_\infty(\Phi)$，$|f(\zeta)|=1$ となるから，$\mathcal{H}_\infty(\Phi)\neq\{0\}$ となり(a)が示された。

(b)を示す。$m(\zeta)=0$ となる。Sをある開集合における可算稠密な集合で，$\bar{S}$はコンパクトになるものとする。標準領域の増加列$\{\Omega_j\}$，$S\subset\Omega_1$，でΩを近似する。Ω上の line bundle のΩ_nへの制限をρ_nで表わす。同様にΩ_k上の line bundle のΩ_jへの制限をρ_{jk} $(j<k)$ で表わす。するとΩ_j上の任意の固定した line bundle ξ_jに対して，

$$\inf\{m(\xi,\zeta);\ \xi\in\rho_j^{-1}(\xi_j)\}=\lim_{n\to\infty}\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}$$

が成り立つ。なぜなら，$n<n'$ とすると，$\xi_{n'}\in\rho_{jn'}^{-1}(\xi_j)$ に対して $\rho_{nn'}(\xi_{n'})\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)$ となる。$f\in\mathcal{H}_1(\xi_{n'})$ ならば $f|\Omega_n\in\mathcal{H}_1(\rho_{nn'}(\xi_{n'}))$，

$\|f|\Omega_n\|_{1,\zeta}\leqq\|f\|_{1,\zeta}$ となる。故に $m_{n'}(\xi_{n'};\zeta)\leqq m_n(\rho_{n,n'}(\xi_{n'});\zeta)$ となる。$\rho_{n,n'}$は全射であるから，

$$\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}\geqq\inf\{m_{n'}(\xi_{n'},\zeta);\ \xi_{n'}\in\rho_{jn'}^{-1}(\xi_j)\}$$

となる。同様に

$$\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}\geqq\inf\{m(\xi,\zeta);\ \xi\in\rho_j^{-1}(\xi_j)\}$$

となる。故に

$$\lim_{n\to\infty}\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}\geqq\inf\{m(\xi,\zeta);\ \xi\in\rho_j^{-1}(\xi_j)\}$$

となる。任意の $\xi\in\rho_j^{-1}(\xi_j)$ に対して，$\rho_n(\xi)=\xi_n$ とおく。すると $f_n\in\mathcal{H}_1(\xi_n)$ で $\|f_n\|_{1,\zeta}\leqq1$，$|f_n(\zeta)|\geqq m_n-\dfrac{1}{n}$ となるものが存在する。ここで $m_n=\inf\{m_n(\xi',\zeta);\ \xi'\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}$ である。

正規族の議論から，$\{f_n\}$ は Ω 上広義一様に f に収束する。f は ξ の section で，$f\in\mathcal{H}_1(\xi)$ となる。更に $|f(\zeta)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(\zeta)|$ $\geqq \lim_{n\to\infty}\sup(m_n - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\}$ となる。

故に $\inf\{m(\xi,\zeta);\ \xi\in\rho_j^{-1}(\xi_j)\} = \lim_{n\to\infty}\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi)\}$ となる。補題11より任意の ζ と Ω_j 上の任意の line bundle ξ_j に対して，$\lim_{n\to\infty}\inf\{m_n(\xi_n,\zeta);\ \xi_n\in\rho_{jn}^{-1}(\xi_j)\} = 0$ が成立する。$\{\zeta_i\}$ を S のすべての点が無限回現われる点列とすると部分列 $\{n_i\}$ と Ω_{n_i} 上の line bundle ξ_{n_i} が存在して，$\rho_{n_i n_{i+1}}(\xi_{n_{i+1}}) = \xi_{n_i}$, $m_{n_i}(\xi_{n_i},\zeta_i) < i^{-1}$ を満たす。従って $\rho_{n_i}(\xi) = \xi_{n_i}$ を満たす Ω 上の line bundle ξ が存在する。この ξ に対して，$m(\xi,\zeta_i)\leqq m_{n_i}(\xi_{n_i},\zeta_i) < i^{-1}$ が成り立つ。故に $\zeta\in S$ に対して，$m(\xi,\zeta)=0$ となる。$\mathcal{H}_1(\xi)$ のすべての section は S 上で 0 になる。故に Ω 全体で 0 になる。

系1.　Ω を $\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha < +\infty$ をみたす任意の Riemann 面とする。すると Ω 上に定数でない有界正則函数が存在する。

証明.　Ω は hyperbolic であるから，Green 函数 $g(z,\zeta)$ が存在する。ξ を多価函数 $G(z,\zeta) = \exp\{g(z,\zeta)+i\tilde{g}(z,\zeta)\}$ に対応する line bundle とすると，$0\neq f\in\mathcal{H}_\infty(\xi)$ が存在する。$f(z)/G(z)$ は一価な有界正則函数である。$z=\zeta$ で 0 となるから定数でない。よってこれが求める函数である。

§ 6

Ω を hyperbolic な Riemann 面とする。Ω^* を Martin コンパクト化とすると，$\Delta=\Omega^*-\Omega$ は Martin 理想境界である。k_b ($b\in\Omega^*$) を Martin 函数とする。

定義 12. $\Delta_1\equiv\{b\in\Delta\,;\,k_b$ は Ω 上の最小の調和函数$\}$ とおく。

定義 13. $HP(D)$ は $D(\subset\Omega)$ 上の二つの正調和函数の差によって表わされる D 上の函数のつくる実ベクトル空間を表わす。

定義 14. $HP(\Omega)$ から Δ_1 上の有限実正則 Borel 測度の空間 $M(\Delta_1)$ 上への vector lattice isomorphism $u\longrightarrow\mu_u$ が一意に存在して，$u=\int_{\Delta_1}k_b\,d\mu_u(b)$ となる。χ は 1 に対応する測度を表わす。

定義 15. $MH^p(\Omega)\equiv\{f\,;\,f$ は Ω 上の多価正則函数で，$|f|^p$ が調和優函数をもつもの$\}$ とおく。

定義 16. $\mathcal{H}^p(\Omega)$ (Ω 上の Hardy 族) を $L^p(d\chi)$ の部分空間と同一視し，それを $\mathcal{H}^p(d\chi)$ とかく。$\mathcal{H}^p(d\chi)_0\equiv\{u^*\in\mathcal{H}^p(d\chi)\,;\int u^*(b)\,d\chi(b)=0\}$ とおく。

定義 17. Π をホモロジー群 $H_1(\Omega,\mathbb{Z})$ の character group とする。$H_1(\Omega;\mathbb{Z})$ から χ 零函数を法とする Δ_1 上のすべての可測函数の空間への函数 $Q:\alpha\longrightarrow Q(\cdot,\alpha)$ が character $\theta\in\Pi$ の m 函数であるとは，$H_1(\Omega;\mathbb{Z})$ の任意の元 α,β に対してほとんど到る所 $Q(\cdot\,;\alpha)=\theta(\alpha)\theta(\beta)^{-1}Q(\cdot\,;\beta)$ となることである。各 $\alpha\in$

$H_1(\Omega;\mathbb{Z})$ に対して Δ_1 上ほとんど到る所 $|Q(\cdot;\alpha)|=1$ となる Q 函数を i 函数と呼ぶ。

定義18. u が l.a.m. (locally analytic modulus) とは Ω 上の多価正則函数の絶対値で表わされる一価函数である。Ω 上の有界な l.a.m. の全体を $B^\infty(\Omega)$, Ω 上の l.a.m. u で u^p が調和優函数をもつものの全体を $B^p(\Omega)$ で表わす。

定義19. $\mathfrak{M}\subset\mathcal{H}^p(\Omega)$ が quasi-principal であるとは $B^\infty(\Omega)$ における inner l.a.m. I が存在して $\mathfrak{M}=\{f\in\mathcal{H}^p(\Omega);\frac{|f|}{I}\in B^p(\Omega)\}$ となることである。

定義20. $\mathcal{F}$ を Ω 上の有界函数の空間とする。$C_0(\Omega)$ を Ω 上の実数値連続函数 f で任意の $\varepsilon>0$ に対して $\{z\in\Omega;|f(z)|\geqq\varepsilon\}$ がコンパクトになるものの全体とする。$\mathcal{F}$ における net $\{h_\lambda\}$ が β 位相で $h\in\mathcal{F}$ に収束するとは, すべての $f\in C_0(\Omega)$ に対して $f(h_\lambda-h)$ が一様に 0 に収束することである。

次の条件(A),(B),(C)を満たす Riemann 面 Ω を考える。

(A) Ω は正則領域 (regular region) である。

(B) 次の (a),(b),(c),(d) を満たす outer l.a.m. の族 $\{\delta(\theta);\theta\in\Pi\}$ が存在する。 (a) $\delta(1)=1$ (b) $\delta(\theta)$ は各 $\theta\in\Pi$ に対して character θ をもつ。(c) 各 $\theta\in\Pi$ に対して $0<\delta(\theta)\leqq 1$ (d) $\{\delta(\theta_n);n=1,2,\cdots\}$ が点別に $|f|$ $(f\in\mathcal{H}^\infty(\Omega))$ に収束するならば $f\mathcal{H}^\infty(\Omega)$ は $\mathcal{H}^\infty(\Omega)$ で β-dense である。

(C) $\mathfrak{Z}(\zeta)=\{z_j=z_j(\zeta)\ ;\ j=1,2,\cdots\}$ を $g(z,\zeta)$ の critical point の全体とする。すると $\sum g(z_j,z)<\infty$ が $z\in\Omega-\mathfrak{Z}(\zeta)$ で成立する点 ζ が存在する。

Ω を条件(A),(B),(C) を満たす hyperbolic な Riemann 面とする。すると次の定理(Hasumi [4]) が成り立つ。

定理4. $1\leqq p\leqq\infty$ とする。$\mathfrak{M}$ を $L^p(d\chi)$ の閉($p=\infty$ のときは weakly* closed) 部分空間で $H^\infty(d\chi)\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}$ を満たすものとする。すると次のことが成立する。

(a) $H^\infty(d\chi)\circ\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}$ で dense ($p=\infty$ のときは weakly* dense) であるということと $\mathfrak{M}=C_\Sigma L^p(d\chi)$ となる Δ_1 の可測部分集合 Σ が存在することとは同値である。ここで C_Σ は Σ の特性函数を表わす。Σ は零集合を除いて $\mathfrak{M}$ によって一意に決定される。

(b) $H^\infty(d\chi)\circ\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}$ で dense ($p=\infty$ のときは weakly* dense) でないということと, ある $\theta\in\Pi$ の i 函数 Q で $\mathfrak{M}=\{f^*\in L^p(d\chi);$ ある $h\in MH^p(\Omega)$ に対して $\frac{f^*}{Q}\equiv\hat{h}\}$ となることとは同値である。更に i 函数は同値性を除いて一意に決定される。

定理4から次の系が成立する。

系2 (Neville [7]) Ω を条件(A),(B),(C) を満たす hyperbolic な Riemann 面とする。$\mathfrak{M}$ を $H^p(\Omega)$ の閉($p=\infty$ のときは β 閉) 部分空間とする。すると $\mathfrak{M}$ が $H^p(\Omega)$ の $H^\infty(\Omega)$ 部分加群であ

るのと$\mathfrak{M}$が quasi-principal であることとは同値である。

注意1. Widom の結果を使うと(B)から(C)が出ることを次に示す。$\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha=\infty$ ならば定理3より$\mathcal{H}_1(\xi)=0$となる line bundle ξ が存在する。一方 $H^1(\Omega,U(\mathbb{C}))\cong \mathrm{Hom}(\pi(\Omega),U(\mathbb{C}))$ $\cong \mathrm{Hom}(H_1(\Omega;\mathbb{Z}),U(\mathbb{C}))$ だからξに対する character θ が存在する。すると section f が存在して，$f\in\mathcal{H}_1(\xi)$，$f\not\equiv 0$ となり矛盾を生ずる。従って(B)が成立するならば$\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha<+\infty$ でなければならない。一方Ωを正則部分領域$\{\Omega_n\}$で近似する。$g_n(z,\zeta)$をΩ_nの Green 函数とし，$z_{j,n}$を$g_n(z,\zeta)$の critical point とする。すると$\sum_j g_n(z_{j,n}(\zeta),\zeta)=\int_0^\infty B_n(\alpha,\zeta)\,d\alpha$ が成立する。gをΩの Green 函数とすると$g_n\longrightarrow g$でしかもgの critical point z_jは$z_{j,n}$の極限である。故に$\sum_j g(z_j,\zeta)\leqq \liminf_{n\to\infty}\sum_j g_n(z_{j,n},\zeta)$ $=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty B_n(\alpha,\zeta)\,d\alpha=\int_0^\infty B(\alpha,\zeta)\,d\alpha<+\infty$ となり，(A)と独立に(B)の(a),(b),(c)から(C)が出ることが証明された。

注意2. 条件(B)は非常に解りにくい。条件(B)を満たす Riemann 面は具体的にどんな Riemann 面でなければならないかを研究することが今後の課題である。

参考文献

[1] L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[2] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann., 135 (1958), 263-273.

[3] R. C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1966.

[4] M. Hasumi, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, (to appear)

[5] M. Heins, Hardy classes on Riemann surfaces, Lecture Notes in Mathematics, No. 98, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[6] W. S. Massey, Algebraic topology, Harcourt, Brace, and World, New York, 1967.

[7] C. Neville, Invariant subspaces of Hardy classes on infinitely connected open surfaces, (to appear).

[8] B. Rodin and L. Sario, Principal functions, D. Van Nostrand Co., Princeton. N. J., 1968.

[9] H. Widom, The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta. Math., 126 (1971), 63-82.

[10] ———, H_p sections of vector bundles over Riemann surfaces, Annals of Mathematics, Vol. 94 (1971), 304-324.