数理解析研究所講究録
第 207 巻 1974 年 32-41

Weakly 1-complete manifold での消滅定理

京大 数理研　中野 茂男

§1. 序

複素多様体Xが weakly 1-complete であるとは，X上に実数値C^∞-級函数Φがあって，つぎの条件が成立つことである：

(a) Xの各点pで，その近傍での局所座標系$(z^1, \cdots, z^n)$に対し

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right) \geqq 0 \qquad (\text{半正定値}),$$

(b) $\forall c \in \mathbb{R}$に対し

$$X_c = \{ p \in X \mid \Phi(p) < c \}$$

が relatively compact または empty.

Xが weakly 1-complete でX上に positive な複素直線バンドルまたは正則ベクトルバンドルがある場合，コンパクト多様体に対するのと同様なコホモロジー消滅定理がい

ろいろ成立つことは，中野[3]，[5]・風間[2] で示されている．この講演では，この一系の研究の延長としてつぎの定理といくらかの注意とを，述べる．

__定理.__ X は weakly 1-complete で，その上に positive な複素直線バンドル B があるとする．そのとき

$$H^q(X, \Omega^p(B)) = 0. \quad (p+q>n)$$

が成立つ．

§2. 証明の方針

証明の筋は中野[3]におけると同じで，Andreotti-Vesentini による，つぎの Lemma にもとづく．

__Lemma 1.__ ([1], p.94, theorem 1) 複素多様体 M 上の正則ベクトルバンドル E が，M 上の Hermite 計量 $d\sigma^2$ と E のファイバー上の Hermite 計量の族 $\{h_j\}$ とに関して $W^{p,q}$-elliptic であるとする．$d\sigma^2$ が M のリーマン計量として complete でありかつ $q \geq 1$ ならば，これらの計量に関して2乗可積分な，型 (p,q) の E-valued C^∞ 級微分形式 φ が，$\bar{\partial}\varphi = 0$ をみたすとき，(2乗可積分な)型 $(p,q-1)$ の C^∞ 級微分形式 ψ があって，$\varphi = \bar{\partial}\psi$ となる．

MとしてXをとり，$E=B$とした場合について言うと，まず（座標近傍から成る）Xの開被覆$\{U_j\}$に関し，Bが変換函数の系$\{b_{jk}\}$で定められているとする．Bが positive だから，C^∞-級函数　$a_j : U_j \longrightarrow R^+$（正の実数全体）で，

$$
(1) \quad \begin{cases} a_j / a_k = |b_{jk}|^2 & \text{on } U_j \cap U_k, \\ \left(\dfrac{\partial^2 \log a_j}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) = (g_{j,\alpha\bar\beta}) > 0 & \text{（正定値）on } U_j \end{cases}
$$

をみたすものがある．

$$
(2) \qquad ds^2 = \sum g_{j,\alpha\bar\beta} (dz^\alpha, d\bar{z}^\beta)
$$

によって，XにKähler metric を入れる．

さて，型(p,q)のB-valued C^∞-級微分形式$\varphi = \{\varphi_j\}$が与えられたとする．（すなわちφ_jはU_jでの(p,q)-form で，$U_j \cap U_k$で$\varphi_j = b_{jk}\varphi_k$．なお$p+q > n$とする．）これに対し実変数$t$の$C^\infty$-級函数$\lambda(t)$で，$\lambda'(t) \geqq 0$，$\lambda''(t) \geqq 0$をみたすものを適当にとって，

$$
(3) \quad \begin{cases} A_j = e^{\lambda(\Phi)} a_j, \\ \Gamma_{j,\alpha\bar\beta} = \dfrac{\partial^2 \log A_j}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \end{cases}
$$

$$
(4) \qquad d\sigma^2 = \sum \Gamma_{j,\alpha\bar\beta} (dz^\alpha, d\bar{z}^\beta)
$$

とおく．この$d\sigma^2$と$h_j = A_j^{-1}$とφとに対して，Lemma 1

の条件が成立つようにできる． これを示せば，型(p,q)の任意のE-valued C^∞-form φ (with $\bar\partial\varphi=0$) は，$\varphi=\bar\partial\psi$ と表わされることになり，定理が言える訳である．

$d\sigma^2$ の completeness と $W^{p,q}$-ellipticity については，中野[3]でもやってあるとおりである．(Xの計量$d\sigma^2$とファイバー上の計量A_jとを，(3)，(4)のように連動させているため，$(\Box-*^{-1}\Box*)\varphi=(L\Lambda-\Lambda L)\varphi=(p+q-n)\varphi$ となるのが，この論法の急所である.)

2乗可積分性について考える．局所座標(z^α)に関し，

(5) $$\varphi_j=\sum\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\,dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_q}$$

と書き表わしておくと，$(ds^2,\{a_j\})$と$(d\sigma^2,\{A_j\})$とに関する，φの自分自身との内積は，それぞれ(6)，(7)の積分となる；

(6) $$\tfrac{1}{a_j}\varphi_j\wedge\overline{*\varphi_j}=K\cdot\frac{1}{a_j}\det(g_{\alpha\bar\beta})\cdot\Big\{\sum g^{\bar\gamma_1\alpha_1}\cdots g^{\bar\gamma_p\alpha_p}g^{\bar\beta_1\delta_1}\cdots g^{\bar\beta_q\delta_q}\times\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\overline{\varphi_{\gamma_1\cdots\gamma_p\bar\delta_1\cdots\bar\delta_q}}\Big\}dz^1\wedge\cdots\wedge d\bar z^n,$$

(7) $$\tfrac{1}{A_j}\varphi_j\wedge\overline{\star\varphi_j}=K\cdot e^{-\lambda(\Psi)}\frac{1}{a_j}\det(\Gamma_{\alpha\bar\beta})\Big\{\sum\Gamma^{\bar\gamma_1\alpha_1}\cdots\Gamma^{\bar\gamma_p\alpha_p}\Gamma^{\bar\beta_1\delta_1}\cdots\Gamma^{\bar\beta_q\delta_q}\times\varphi_{\alpha_1\cdots\alpha_p\bar\beta_1\cdots\bar\beta_q}\overline{\varphi_{\gamma_1\cdots\gamma_p\bar\delta_1\cdots\bar\delta_q}}\Big\}dz^1\wedge\cdots\wedge d\bar z^n.$$

ここに$(g^{\bar\beta\alpha})$，$(\Gamma^{\bar\beta\alpha})$は$(g_{\alpha\bar\beta})$，$(\Gamma_{\alpha\bar\beta})$の逆行列であり，そ

れらは本来添字 j をつけるべき所も，省略している．

さて

$$(8) \qquad \Gamma_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}} + \lambda'(\Phi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta} + \lambda''(\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial z^\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}^\beta}$$

のため，（半正値行列の順序の意味で）$\Gamma \geqq G$，従って $\Gamma^{-1} \leqq G^{-1}$ となる．それゆえ (7) の｛　｝内は，(6) のそれよりも大きくない．そこで問題は，λ をうまくとって damping factor $e^{-\lambda(\Phi)}$ を働らかせることにより，$\det(\Gamma_{\alpha\bar{\beta}})$ の増大をも抑えて (7) の積分を有限にとどめうることを示す にある。あらかじめ見積りうる増大要因，すなわち (6) の積分が発散するであろうこと —— これは，φ の成分が大きくなること・全体積が ∞ になるであろうことの，両方から来る．—— および，$\partial\Phi/\partial z^\alpha$ や $\partial^2\Phi/\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta$ の増大，を処理することは，[3]，[5] でやってあるのと同様である．（relatively compact な X_t でこれらの量を評価しておき，それを抑えるように $\lambda(t)$ をとる．）残るところは，$\det(\Gamma_{\alpha\bar{\beta}})$ が $\lambda(\Phi)$ や $\lambda'(\Phi)$ の多項式の程度に増大することをも抑える，という一点に帰する．

それにはつぎの Lemma を示せばよいこと，すぐ認められるであろう．

Lemma 2. $\mu(t)$ が，$0 \leqq t < \infty$ で連続・狭義単

調増加で，$t\to\infty$ のとき $\mu(t)\to\infty$ だとする．このとき $-\infty<t<\infty$ で C^∞-級の函数 $\lambda(t)$ と正の定数 c, K があって，

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda'(t)\geqq 0, \quad \lambda''(t)\geqq 0 & \text{for } -\infty<t<\infty, \\ \mu(t)\leqq\lambda(t), \quad \lambda'(t)\leqq K\cdot\lambda(t)^2, \quad \lambda''(t)\leqq K\cdot\lambda(t)^3 & \text{for } c<t \end{cases}$$

が成立つ．

§3. Lemma の証明.

$\mu(t)$ を，より大きな函数でおきかえてもよいから，$\mu(t)$ は $t>0$ では C^∞-級で $\mu'(t)>0$ だとする．定数を加えて，$\mu(0)=0$ だと考えても差支ない．

$x=\mu(t)$ の逆函数 $t=f(x)$ を考える．$f(x)$ は，(i) $0\leqq x<\infty$ で連続，(ii) $x>0$ で C^∞-級で $f'(x)>0$，(iii) $f(0)=0$ かつ $x\to\infty$ のとき $f(x)\to\infty$，という3条件をみたす．

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(z)\,dz & (x>0) \end{cases}$$

とおくと，g も (i)〜(iii) をみたし，しかも $x>0$ では

$$g(x)<f(x),$$
$$g'(x)=(1/x^2)\cdot\left\{x f(x)-\int_0^x f(z)\,dz\right\}$$

となる．そこで $t=g(x)$ の逆函数を $x=\mu_1(t)$ とする．$\mu_1(t)$ も (i)〜(iii) をみたし，その上 $t>0$ では

$$\mu(t) < \mu_1(t),$$

$$\mu_1'(t) = 1/g'(\mu_1(t)) = \mu_1(t)^2 \Big/ \left\{ xf(x) - \int_0^x f(z)\,dz \right\}$$

となる．所で $h(x) = xf(x) - \int_0^x f(z)\,dz$ は，$x>0$ で狭義単調増加である．それゆえ

$$\exists\, c_1,\ K_1 > 0 \text{ で，} \quad h(x) > K_1^{-1} \quad \text{for } x > c_1.$$

したがって

$$\mu_1'(t) \leqq K_1 \cdot \mu_1(t)^2 \qquad \text{for } t > c_2 (= g(c_1)).$$

L を十分大きな実数として

$$\mu_2(t) = K_1 \cdot \int_0^t \mu_1(\tau)^2\,d\tau + L$$

とおくと，（$\mu_2'(t) \geqq 0$，$\mu_2''(t) \geqq 0$ のほかに）

$$\mu_1'(t) < \mu_2'(t), \quad \mu_1(t) \leqq \mu_2(t) \qquad \text{for } t > c_2$$

が成立つ．さらに同じ領域では

$$\mu_2'(t) = K_1 \cdot \mu_1(t)^2 \leqq K_1 \cdot \mu_2(t)^2,$$

$$\mu_2''(t) = 2K_1 \cdot \mu_1(t)\mu_1'(t) \leqq 2K_1^2 \mu_1(t)^3 \leqq 2K_1^2 \mu_2(t)^3.$$

これで求める函数がほゞできた．$t=0$ で函数が C^∞ でなくなるのを防ぐために，$-\infty < t < \infty$ での非減少 C^∞ 函数 $\mu_3(t)$ で

$$\mu_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1 \\ 1 & \text{for } 2 < t \end{cases}$$

をみたすものをとり，

$$\lambda(t) = \mu_2(t) \cdot \int_{-\infty}^{t} \left[\int_{-\infty}^{\tau} \mu_3(\sigma) d\sigma \right] d\tau$$

とおけば，$\lambda(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で C^∞ となり，条件(9)をみたす．

§4. Further Comments

$f : Y \to X$ が，複素多様体間の proper な正則写像で，X が Ψ に関し weakly 1-complete であると，Y は $f^*\Psi$ に関し weakly 1-complete である．

X 上に正則ベクトル・バンドル E があるとき，$Z = E - (0)$ —— (0) は 0-section —— 上には乗法群 $\mathbb{C}^*$ が，ベクトルに対するスカラー乗法によって，作用している．$P(E) = Z/\mathbb{C}^*$ を上の Y と考え，f として canonical projection π をとる．$Z \to P(E)$ は $\mathbb{C}^*$-バンドルだが，これに associate された複素直線バンドルを $L(E)$ で表わす．そうすると簡単なスペクトル列の考察によって

$$H^q(X, \mathcal{O}(W \otimes E^*)) \cong H^q(P(E), \mathcal{O}(\pi^* W \otimes L(E)^{-1}))$$

がわかる，ここに W は X 上の任意の複素直線バンドルである．

この関係を利用して，$P(E)$ における（複素直線バンドルについての）消滅定理から，X 上でのベクトル・バンドルにつ

いての消滅定理を導びくことは，広中氏が最初に示された．（[3]に言ってある，広中の証明の最初の部分．）それは X_c についての主張であったが，複素直線バンドルについての消滅定理が X 全体に関して言えた以上，この方法を X 全体と E とに適用してみようという事が考えられる．それができれば，風間[2]のような近似定理を経ずに微分幾何学的方法だけで，X, E に対する消滅定理が言えるわけである．

この計算を試みて，'73年7月のサマー・セミナーの際，うまく行くと報告したが，実は符号の間違いを犯していたため，それは証明になっていなかった。（したがって風間の定理："X は weakly 1-complete，$E \to X$ は positive ベクトルバンドル $\Rightarrow H^1(X, \Omega^n(E)) = 0$" の証明は，私の知る所では風間氏の証明が唯一のものである．）

もし X が <u>strongly 1-complete である</u>（i.e.，我々の Ψ が強多重劣調和にとれる）と仮定すると，X 上の任意の正則ベクトル・バンドルが positive だということになり，その結果，上記の微分幾何学的方法によってつぎの命題がいえる：

<u>命題</u>．X が strongly 1-complete，$E \to X$ が任意の正則ベクトルバンドルであると，

$$H^q(X, \mathcal{O}(E)) = 0 \qquad \text{for } q \geq 1$$

である.

Strongly 1-complete manifold はスタイン多様体にほかならないから, この命題に新しいことは何もない. しかし逆の途をたどって, weakly 1-complete manifold での消滅定理からスタイン多様体の理論を再構成するのは, (少くとも differential geometers にとっては) 興味あることであろう.

(本稿の内容は, "Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds II" として, 投稿中である.)

文　献

[1] A. Andreotti & E. Vesentini: Carleman estimates for the Laplace−Beltrami equations on complex manifolds, Publ. I.H.E.S. No.25(1965) pp.81-130.

[2] H. Kazama: Approximation theorem and application to Nakano's vanishing theorem for weakly 1-complete manifolds, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., vol.27(1973) pp.221-240.

[3] S. Nakano: Vanishing theorems for weakly 1-complete manifolds, "Number theory, algebraic geometry and commutative algebra — in honor of Yasuo Akizuki", Kinokuniya Bookstore (1973) pp.169-179.

[4] ________: ________II, to appear

[5] ________: On weakly 1-complete manifolds, Proc. Intnl. conference on manifolds and related topics in topology, to appear.