数理解析研究所講究録
第 207 巻 1974 年 42-53

Blowing-down の一つの例について

琉大 理工　森 泰子

1.　weakly 1-complete manifold に対する cohomology の消滅定理の応用の一つに，中野先生の，"Monoidal 変換の逆問題" がある．即ち，n 次元複素多様体 $\tilde{X}$ の，余次元 1 の部分多様体 S が，或る m 次元複素多様体 M 上に，$\mathbb{P}^{r-1}$-bundle の構造をもっており（$m+r=n$, $r \geq 2$）line bundle $[S]$ を，各 fibre L_a 上に制限（たとき $[S]_{L_a} = [e]^{-1}$（$[e]$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面の定義する line bundle）が成り立っているならば，M を含む，n 次元複素多様体 X があって，$\tilde{X}$ は M を中心とする X の monoidal 変換となっているというものである．ここでは，同じ情況のもとで，$[S]_{L_a} = [e]^{-k}$ ($k \geq 2$) が成り立つ場合に，このような X（今度は，特異点が出てくる）を作ることを考える．

2.　$\mathbb{P}^{r-1}$ を k 次 Veronese 変換 f で $\mathbb{P}^N$ に埋め込む．即ち，$\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標 $(\eta^1 : \cdots : \eta^r)$ に対して，$\eta^1, \cdots, \eta^r$ の k 次

単項式 $M^p(\eta)$ $(p=1,\cdots,N+1={}_rH_k)$ 全体を斉次座標とする. $\mathbb{P}^N$ の部分多様体が $f(\mathbb{P}^{r-1})=V$ である. V の cone $K\subset\mathbb{C}^{N+1}$ は, $\mathbb{C}^{N+1}$ の normal analytic set で 頂点 (0) を唯一つの特異点としてもつ. $\mathbb{C}^{N+1}$ を (0) を中心として blow-up して, $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ を作る. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ は $\mathbb{P}^N$ 上の line bundle で, covering $U_p=\{(z^1:\cdots:z^{N+1})\in\mathbb{P}^N \mid z^p\neq 0\}$ $(p=1,\cdots,N+1)$ に関して transition functions $\{\frac{z^p}{z^q}\}$ で表わされる. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ 内の, K 上の部分を $\hat{K}$ とすれば, $\hat{K}$ は, line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)$ を V 上に制限したものになっている. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\supset p^{-1}(0)\approx\mathbb{P}^N$ は, line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)$ の 0-section だから, $T\equiv p^{-1}(0)\cap\hat{K}$ も line bundle $(\hat{K}\to V)$ の 0-section である. $p:\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}-p^{-1}(0)\xrightarrow{\approx}\mathbb{C}^{N+1}-0$ から, $\hat{K}-T\approx K-0$ となっている. $\hat{K}$ の divisor T が定義する line bundle $[T]$ を T 上に制限すると,

$$[T]_T = T \text{ の } \hat{K} \text{ に於ける normal bundle}$$
$$= (\hat{K}\to V) = (\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)|_V .$$

ここで, $M^{p_\alpha}(\eta)=(\eta^\alpha)^k$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ とすれば, V は, r ケの $U_{p_\alpha}\supset\{(M^p(\eta))\in\mathbb{P}^N \mid (\eta^\alpha)^k\neq 0\}$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ で cover される. 従ってこのとき, transition functions は $\frac{z^{p_\alpha}}{z^{p_\beta}}=\frac{(\eta^\alpha)^k}{(\eta^\beta)^k}=\left(\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\right)^{-k}$ である. 他方, $\mathbb{P}^{r-1}$ 上の line bundle $[e]$ は, covering $\{(\eta)\in\mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^\alpha\neq 0\}$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ に関して transition functions $\{\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\}$ で定義されるから $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)|_V$

$= [e]^{-k}$ である．故に 1) $\hat{K} - T \approx K - 0$， 2) $\hat{K} \supset T$ (codim 1)， 3) $T \xrightarrow{\mathbb{P}^{r-1}} 0$， 4) $[T]_T = [e]^{-k}$ なる状態が得られた。

3. ［定理 1］（消滅定理）

weakly 1-complete manifold V と，V 上の line bundle B 及び canonical line bundle K_V に対して，$K_V^{-1} \otimes B > 0$ ならば

$$H^q(V, \mathcal{O}(B)) = 0 \quad (q = 1, \cdots, n-1).$$

証明の概略は，例えば，数理解析研究所講究録 116 の中野先生の"モノイダル変換の逆問題について"を見ればよい。

［定理 2(k)］ 考えている問題の情況のもとで，即ち

$$\hat{X} \supset \begin{array}{c} S \\ \downarrow)\mathbb{P}^{r-1} \\ M \end{array}, \quad [S]_{L_a} = [e]^{-k} \text{ for } {}^\forall a \in M$$

ならば，各点 $a \in M$ に対して，次の性質をもつ $\hat{X}$ に於ける L_a の近傍 V が存在する：

i) $V \cap L_b \neq \phi$ ならば $L_b \subset V$.

ii) V は weakly 1-complete manifold で，$\varepsilon = 1, 2$ に対して $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$.

（証明） $a \in M$ を中心とする局所座標 $\zeta^1, \cdots, \zeta^m$ を，座標近傍 $D = \{ \zeta \in \mathbb{C}^m \mid \phi(\zeta) < 1 \}$ （$\phi(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{m} |\zeta^j|^2$） に

対して $\pi^{-1}(D) \approx D \times \mathbb{P}^{r-1}$ なるように取れば $[S]_{D\times\mathbb{P}} = [e]^{-k}$ である（但し $[e]$ は projection $D\times\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ で $D\times\mathbb{P}$ 上に引き戻している）．

$\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標 $(\eta^1 : \cdots : \eta^r)$ に対して $\xi_\alpha^\beta \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}$ $(\beta = 1, \cdots, \hat{\alpha}, \cdots, r)$ は $U_\alpha = \{ (\eta) \in \mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^\alpha \neq 0 \}$ 上の局所座標である． $D\times\mathbb{P}$ 上 $[e]$ は $(\{D\times U_\alpha\}, \{\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\})$ で定義される． $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha} = \xi_\alpha^\beta$ とおく．
$a_\alpha \equiv e^{\phi(\zeta)} \sum_{\beta=1}^{r} |\xi_\alpha^\beta|^2$ なる fibre metric により $[e] > 0$ である．

$\tilde{X}$ の座標近傍 $\{V'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次のようなものが取れる：
$V'_\lambda \cap S = D \times U'_\lambda$ ， $\mathbb{P} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U'_\lambda$ (finite)， $\{U'_\lambda\}$ は $\{U_\alpha\}$ の細分（細分 $\sigma : \Lambda \to \{1, \cdots, r\}$; $U'_\lambda \subset U_{\sigma(\lambda)}$ ）．

V'_λ 上の局所座標 $(z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^m, y_\lambda, x_\lambda^1, \cdots, \hat{x}_\lambda^{\sigma(\lambda)}, \cdots, x_\lambda^r)$ を次のように取る：
$V'_\lambda \cap S = \{ y_\lambda = 0 \}$， $z_\lambda^j|_S = \zeta^j$ $(j = 1, \cdots, m)$， $x_\lambda^\alpha|_S = \xi_{\sigma(\lambda)}^\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$ ， $x_\lambda^{\sigma(\lambda)} \equiv 1$ ．
このとき $V' \equiv \bigcup_\lambda V'_\lambda$ は L_a の近傍で $V' \cap S = D\times\mathbb{P}$ である．又 $[S]_{V'}$ は $(\{V'_\lambda\}, \{\frac{y_\lambda}{y_\mu}\})$ で定義される．
$e_{\lambda\mu} \equiv \frac{y_\lambda}{y_\mu}$ とおくと $e_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}{}^{-k}$ とできる（ $\varepsilon_{\sigma(\lambda)\sigma(\mu)}$ を $\varepsilon_{\lambda\mu}$ と略記する）．

adjunction formular : $K_{V'\cap S} = K_{V'}|_{V'\cap S} \otimes [S]_{V'\cap S}$

から $K_{V'}|_{V'\cap S} = K_{D\times\mathbb{P}^{r-1}} \otimes [S]_{D\times\mathbb{P}}^{-1} = [e]^{-r}\otimes[e]^{k} = [e]^{-(r-k)}$ である。従って $K_{V'}$ は $(\{V'_\lambda\}, \{k_{\lambda\mu}\})$, $k_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-(r-k)}$ で表わされる。

$H^1(D\times\mathbb{P}, \mathcal{O}([e]^l)) = 0$ $(l\geq 1)$ を使って、正則関数 $\zeta^j \in \Gamma(D\times U'_\lambda, \mathcal{O})$ $(j=1,\cdots,m)$, *holomorphic cross-sections* $\tau^p \equiv \left\{\frac{M^p(\eta)}{(\eta^{\alpha(\lambda)})^k}\right\}_\lambda \in \Gamma(V'\cap S, \mathcal{O}([e]^k))$ $(p=1,\cdots,N+1)$ 及び $\omega^p(\varepsilon) \equiv \left\{\frac{N^p(\eta)}{(\eta^{\alpha(\lambda)})^{r+(\varepsilon-1)k}}\right\}_\lambda \in \Gamma(V'\cap S, \mathcal{O}([e]^{r+(\varepsilon-1)k}))$ $(p=1,\cdots, {}_rH_{r+(\varepsilon-1)k})$ ($N^p(\eta)$ は $\eta^1,\cdots,\eta^r$ の $r+(\varepsilon-1)k$ 次の全単項式を表わす) $(\varepsilon=1,2)$ を、y_λ の巾を法として V'_λ 上に拡張する。例えば、$\tau^p=\{\tau^p_\lambda\}_\lambda$ についてやってみる：

今、p を一つ決めて p は略して書く。$\tau_\lambda \in \Gamma(D\times U'_\lambda, \mathcal{O})$ の V'_λ 上への拡張を $t_\lambda \in \Gamma(V'_\lambda,\mathcal{O})$ とすれば、$t_\lambda - e_{\lambda\mu}^{-1}t_\mu$ は S 上で 0 になるから、或る正則関数 $g^{(1)}_{\lambda\mu}\in\Gamma(V'_\lambda\cap V'_\mu, \mathcal{O})$ があって、$t_\lambda - e_{\lambda\mu}^{-1}t_\mu = y_\lambda g^{(1)}_{\lambda\mu}$ と書ける。

$g^{(1)}_{\lambda\mu} + e_{\lambda\mu}^{-2} g^{(1)}_{\mu\nu} = g^{(1)}_{\lambda\nu}$ だから $\{g^{(1)}_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathfrak{B}, \mathcal{O}([S]^{-2}))$ である。ここで、V' の covering $\{V'_\lambda\}$ を $\mathfrak{B}$ で、$V'\cap S$ の covering $\{D\times U'_\lambda\}$ を $\mathfrak{U}$ で表わす。$g^{(1)}_{\lambda\mu}$ の S 上への制限を $\psi^{(1)}_{\lambda\mu}$ とすれば $\{\psi^{(1)}_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}([e]^{2k}))$ である。$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}([e]^{2k}))=0$ を使うと、$\psi^{(1)}_\lambda \in\Gamma(D\times U'_\lambda,\mathcal{O})$ があって $\psi^{(1)}_{\lambda\mu} = \psi^{(1)}_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu}^{2k}\psi^{(1)}_\mu$ となる。$\psi^{(1)}_\lambda$ の V'_λ への拡張を $g^{(1)}_\lambda\in\Gamma(V'_\lambda,\mathcal{O})$ とし、$t^{(2)}_\lambda \equiv t_\lambda - y_\lambda g^{(1)}_\lambda$

とすれば $t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)}$ は S 上で $(y_\lambda)^2$ を法として 0 になる．従って或る $g_{\lambda\mu}^{(2)} \in \Gamma(V'_\lambda \cap V'_\mu, \mathcal{Q})$ があって $t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)} = (y_\lambda)^2 g_{\lambda\mu}^{(2)}$ と書ける．このとき $\{g_{\lambda\mu}^{(2)}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-3}))$ である．以下同様にして 第 l 段階で $t_\lambda^{(l)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(l)} = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^{(l)}$，$\{g_{\lambda\mu}^{(l)}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l-1}))$ を得る．この操作を z^j，$\omega^\rho(\varepsilon) = \{\omega_\lambda^\rho(\varepsilon)\}_\lambda$ にもやって z_λ^j，t_λ^ρ，$w_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, \mathcal{Q})$ を，次を満たすようにできる:

$$
\begin{cases}
z_\lambda^j - z_\mu^j = (y_\lambda)^l f_{\lambda\mu}^j, & \{f_{\lambda\mu}^j\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l})) \\
t_\lambda^\rho - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^\rho = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^\rho, & \{g_{\lambda\mu}^\rho\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}([S]^{-l-1})) \\
w_\lambda^\rho(\varepsilon) - k_{\lambda\mu}^{-1} e_{\lambda\mu}^{-\varepsilon} w_\mu^\rho(\varepsilon) = (y_\lambda)^l h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon), & \\
\qquad \{h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon)\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{Q}(K^{-1} \otimes [S]^{-l-\varepsilon})) & (\varepsilon = 1, 2).
\end{cases}
$$

C^∞-関数芽の層は *fine sheaf* だから

$$
\begin{cases}
f_{\lambda\mu}^j = F_\lambda^j - e_{\lambda\mu}^{-l} F_\mu^j, & F_\lambda^j \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\
g_{\lambda\mu}^\rho = G_\lambda^\rho - e_{\lambda\mu}^{-l-1} G_\mu^\rho, & G_\lambda^\rho \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\
h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon) = H_\lambda^\rho(\varepsilon) - k_{\lambda\mu}^{-1} e_{\lambda\mu}^{-l-\varepsilon} H_\mu^\rho(\varepsilon), & H_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \quad (\varepsilon = 1, 2)
\end{cases}
$$

と表わされる．

$Z^j \equiv z_\lambda^j - (y_\lambda)^l F_\lambda^j$ は V' 全体での C^∞-関数である．
又，$T_\lambda^\rho \equiv t_\lambda^\rho - (y_\lambda)^l G_\lambda^\rho \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$，
$W_\lambda^\rho(\varepsilon) \equiv w_\lambda^\rho(\varepsilon) - (y_\lambda)^l H_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$ とすれば，
$\{T_\lambda^\rho\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty([S]^{-1}))$，$\{W_\lambda^\rho(\varepsilon)\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty(K^{-1} \otimes [S]^{-\varepsilon}))$ $(\varepsilon = 1, 2)$ である．

そこで $A_\lambda \equiv \sum_{\rho=1}^{N+1} |T_\lambda^\rho|^2$, $B_\lambda^{(\varepsilon)} \equiv \sum_\rho |W_\lambda^{\rho}(\varepsilon)|^2$

とおくと $A_\lambda |y_\lambda|^2 = A_\mu |y_\mu|^2$ から

$\psi \equiv \phi(Z) + e^{\phi(Z)} A_\lambda |y_\lambda|^2$ は V' 全体での

C^∞-関数である.

$(\tau_\lambda^1, \cdots, \tau_\lambda^{\rho(\lambda)} \hat{\equiv} 1, \cdots, \tau_\lambda^{N+1})$ は $(\xi_\lambda^1, \cdots, \xi_\lambda^{\sigma(\lambda)} \hat{\equiv} 1, \cdots, \xi_\lambda^r)$ の 1次から k 次までの単項式全体だから. それらの拡張 $(t_\lambda^1, \cdots, t_\lambda^{\rho(\lambda)} \hat{\equiv} 1, \cdots, t_\lambda^{N+1})$ は $(x_\lambda^1, \cdots, x_\lambda^{\sigma(\lambda)} \hat{\equiv} 1, \cdots, x_\lambda^r)$ の 1次から k 次までの単項式全体とできる. このとき

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left(\sum_\rho |T^\rho|^2\right) = x^\beta(1 + P_\beta(x)) + y^l(\quad) + \bar{y}^l(\quad) + |y|^{2l}(\quad),$$

$$\sum_\rho t^\rho \frac{\partial \bar{t}^\rho}{\partial \bar{x}^\beta} \equiv x^\beta(1 + P_\beta(x)) \quad (\beta = 1, \cdots, r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta}\left(\sum_\rho |T^\rho|^2\right) = \delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(x) + y^l(\quad) + \bar{y}^l(\quad) + |y|^{2l}(\quad),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x^\beta P_\beta(x)) \equiv Q_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, r).$$

である. $P_\beta(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x)$ は共に x の $(2k-2)$ 次の多項式で, 例えば $k=2$ のとき $P_\beta(x) = 2|x^\beta|^2 + \sum_{\beta_1 \neq \beta} |x^{\beta_1}|^2$,

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} 4|x^\alpha|^2 + \sum_{\alpha_1 \neq \alpha} |x^{\alpha_1}|^2 & (\alpha = \beta) \\ \bar{x}^\alpha x^\beta & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

のような形をしている.

$\psi = \phi(Z) + e^{\phi(Z)}\left(\sum_\rho |T_\lambda^\rho|^2\right)|y_\lambda|^2$ の *Levi form* を評価する: V'_λ を一つ決めて λ は省略する. V'_λ は小さく取り直してもよいから, $G > 0$ を大きく取って,

$\sum_\alpha' |x^\alpha|^2 < G$ と考えてよい($\sum_\alpha'$ は $\alpha = 1, \cdots, \widehat{\sigma(\lambda)}, \cdots, r$ の和を表わす). $\eta > 0$ を $\eta G < \frac{1}{3}$ のように取る.

$l \geqq 3$ のとき

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{y}} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{x}^\beta} \\ & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y \partial \bar{y}} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y \partial \bar{x}^\beta} \\ & & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{jk} + O(|y|^2) & e^{\phi(Z)}(1+\sum_p |t^p|^2)\{ y\bar{z}^j + O(|y|^2)\} & e^{\phi(Z)}|y|^2\{\bar{z}^j x^\beta(1+P_\beta) + O(|y|)\} \\ & e^{\phi(Z)}(1+\sum_p' |t^p|^2) + O(|y|^2) & e^{\phi(Z)}\bar{y}\{x^\beta(1+P_\beta) + O(|y|)\} \\ & & e^{\phi(Z)}|y|^2\{\delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} + O(|y|)\} \end{bmatrix}.$$

$y = 0$ のとき $\begin{bmatrix} \delta_{jk} & & 0 \\ & e^{\phi(\zeta)}(1+\sum' |t^p|^2) & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \geqq 0.$

$y \neq 0$ のとき

$$(1+\sum_p' |t^p|^2)(dy, d\bar{y}) + \sum_\alpha' y\bar{x}^\alpha(1+P_\alpha)(dx^\alpha, d\bar{y})$$
$$+ \sum_\beta' \bar{y}x^\beta(1+P_\beta)(dy, d\bar{x}^\beta) + \sum_{\alpha,\beta}' |y|^2(\delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})(dx^\alpha, d\bar{x}^\beta)$$
$$= |dy|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha dy + y\,dx^\alpha|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha|^2 |x^\alpha dy + 2y\,dx^\alpha|^2$$
$$+ \sum_{\alpha<\beta}' |x^\alpha x^\beta dy + yx^\beta dx^\alpha + yx^\alpha dx^\beta|^2 + \sum' |\cdots|^2 + \cdots + \sum' |\cdots|^2$$
$$\geqq |dy|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha dy + y\,dx^\alpha|^2$$
$$= |dy|^2 + \sum_\alpha' \{ |(1+\eta)^{\frac{1}{2}} x^\alpha dy + (1+\eta)^{-\frac{1}{2}} y\,dx^\alpha|^2 - \eta |x^\alpha|^2 |dy|^2 + (1-\tfrac{1}{1+\eta})|y|^2|dx^\alpha|^2 \}$$
$$\geqq \{1 - \eta(\sum_\alpha' |x^\alpha|^2)\}|dy|^2 + |y|^2 \sum_\alpha' \frac{\eta}{1+\eta} |dx^\alpha|^2.$$

$|y| > 0$ が小のとき $1 - \eta(\sum_\alpha' |x^\alpha|^2) + O(|y|^2) > \frac{2}{3}$, $\left(\frac{\eta}{1+\eta}\delta_{\alpha\beta} + O(|y|)\right) > 0$ とできる. 後ろの Hermite 行列の最

小固有値 $\lambda > 0$ である.

$$\sum_\alpha{}' e^{\phi(Z)} y\,\overline{a}_\alpha (dx^\alpha, d\overline{y}) + \sum_\beta{}' e^{\phi(Z)} \overline{y} a_\beta (dy, d\overline{x}^\beta)$$

$$\geqq -\Big(\sum_\alpha{}' |a_\alpha|\Big)|dy|^2 - e^{\phi(Z)}|y|^2 \sum_\alpha{}' \big(e^{\phi(Z)}|a_\alpha|\big)|dx^\alpha|^2$$

(a_α は $O(|y|)$ の量).

従って. 右下の4つの部分

$$\geqq \Big[e^{\phi(Z)}\Big\{1-\eta\Big(\sum_\alpha{}'|x^\alpha|^2\Big)+O(|y|^2)\Big\} - \Big(\sum_\alpha{}'|a_\alpha|\Big)\Big]|dy|^2$$

$$+\, e^{\phi(Z)}|y|^2\Big[\sum_{\alpha,\beta}{}'\Big(\frac{\eta}{1+\eta}\delta_{\alpha\beta}+O(|y|)\Big)(dx^\alpha, d\overline{x}^\beta) - \sum_\alpha{}'\big(e^{\phi(Z)}|a_\alpha|\big)|dx^\alpha|^2\Big]$$

必要ならば. $|y|>0$ を更に小さくして

$$\geqq \frac{\eta}{12}|dy|^2 + e^{\phi(Z)}|y|^2 \sum_\alpha{}' \frac{\lambda}{2}|dx^\alpha|^2$$

とできる. 対角線以外の 残りの4つも. 共役なもの同志組にして. 下から評価してやれば. $|y|>0$ が小. $\phi(z)$ も小のとき. ψ の Levi form $\geqq \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m}|dz^j|^2 + |dy|^2\Big)$ とできる. 故に. $|y|$ が小. $\phi(z)$ も小のとき. ψ の Levi form $\geqq 0$ がわかった.

$\varepsilon = 1, 2$ に対して. $C_\lambda^{(\varepsilon)} \equiv B_\lambda^{(\varepsilon)} e^{l\psi}$ とおけば. $\{C_\lambda^{(\varepsilon)}\}_\lambda$ は $K_{V'}^{-1} \otimes [S]_{V'}^{-\varepsilon}$ の fibre metric を与える. $l \geqq 3$ のとき.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \dfrac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{y}}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \dfrac{\partial^2}{\partial z^j \partial \overline{x}^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \\ & \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial \overline{y}}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial \overline{x}^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \\ & & \dfrac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial \overline{x}^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \end{bmatrix}$$

は. S 上に制限すると

$$
\begin{bmatrix}
l \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^j \partial \bar{\zeta}^k}\left(\sum_{i=1}^{m} |\zeta^i|^2\right) & & 0 \\
& l\, e^{\phi(\zeta)}\left(1 + \sum_{p=1}^{N+1}{}' |\tau^p|^2\right) & \\
0 & & \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^\alpha \partial \bar{\xi}^\beta} \log\left(\sum_\rho |\omega^\rho(\varepsilon)|^2\right)
\end{bmatrix}
$$

> 0.

従って．$|\eta|$ が小のとき．$K_{V'}^{-1} \otimes [S]_{V'}^{-\varepsilon} > 0$ $(\varepsilon = 1, 2)$ である．十分小なる $\delta > 0$ に対して．$V \equiv \{\psi < \delta\} \Subset V'$ とできるから．V は．$\Phi \equiv (1 - \frac{\psi}{\delta})^{-1}$ に関して weakly 1-complete，$K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$ $(\varepsilon = 1, 2)$ である．（終）

4. X を構成する．点 $a \in M$ に対して．定理２(k) にいう L_a の近傍 V を取れば．$V \cap S \approx D \times \mathbb{P}$，$[S]_{V \cap S} = [e]^{-k}$ である．

cohomology の消滅定理１から．$H^1(V, \mathcal{O}([S]^{-\varepsilon})) = 0$ $(\varepsilon = 1, 2)$ を得る．これを．層の完全列：$0 \to \mathcal{O}([S]^{-1}) \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_{V \cap S} \to 0$，$0 \to \mathcal{O}([S]^{-2}) \to \mathcal{O}([S]^{-1}) \to \mathcal{O}_{V \cap S}([S]_{V \cap S}^{-1}) \to 0$ から得られる cohomology の完全列に使って．制限写像：

$\Gamma(V, \mathcal{O}_V) \to \Gamma(V \cap S, \mathcal{O}_{V \cap S})$，$\Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1})) \to \Gamma(V \cap S, \mathcal{O}([e]^k))$

が全射となる．故に．D 上の局所座標 $\zeta^j \in \Gamma(D \times \mathbb{P}, \mathcal{O})$ の拡張 $z^j \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ $(j = 1, \cdots, m)$．及び $[e]^k$ の sections $\{\tau_\lambda^p\}_\lambda$ の拡張 $\{t_\lambda^p\}_\lambda \in \Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ $(p = 1, \cdots, N+1)$ が存在し．同型：$\Gamma(V, \mathfrak{J}(S)) \approx \Gamma(V, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ （$\mathfrak{J}(S)$ は．

S の定義する ideal の層）により，$f^P \equiv y_\lambda f_\lambda^P \in \Gamma(V, \mathcal{I}(S))$ が決まる（$V = \bigcup_\lambda V'_\lambda$ と，座標近傍で cover しておく）．

$$\Phi : V = \bigcup_\lambda V'_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^m \times \widehat{\mathbb{C}}^{N+1}$$
$$p \longmapsto \left((z^1(p), \cdots, z^m(p)), (f^1(p), \cdots, f^{N+1}(p)), (f^1(p) : \cdots : f^{N+1}(p)) \right)$$

なる *holomorphic mapping* は，L_a の各点で rank n，$\Phi(L_a) \approx (0) \times \mathbb{P}^{r-1}$ である．従って，L_a の近傍 W と $0 \in \mathbb{C}^m$ の近傍 $D' \subset D$ を適当に取って，$\Phi(W) = D' \times \widehat{K}$ とできる．$D' \times \widehat{K}$ は，$\Delta^* \equiv D' \times K$ を $\Gamma \equiv D' \times (0)$ を中心として *blow-up* したもので，$D' \times \widehat{K} - D' \times T \approx D' \times K - D' \times (0)$ より $W - S \approx \Delta^* - \Gamma$ である．又，Γ は，M に於ける a の近傍と同一視できる．

M の各点 a 毎に，このような W_a, Δ_a^*, Γ_a を作れば，$\pi_a : W_a \to \Delta_a^*$, *onto holomorphic* s.t. 1) $W_a - S \approx \Delta_a^* - \Gamma_a$, 2) $W_a \supset S$ (codim 1), 3) $\pi_a : S \xrightarrow{\mathbb{P}^{r-1}} \Gamma_a$, 4) $[S]_{L_b} = [e]^{-k}$ for $\forall b \in D'_a$ となっている．$W_a \cap W_b \neq \phi$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} W_a & \supset & W_a \cap W_b & \overset{id.}{=} & W_a \cap W_b & \subset & W_b \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_b \\ \Delta_a^* & \supset & \pi_a(W_a \cap W_b) & \xrightarrow{\phi_{ab}} & \pi_b(W_a \cap W_b) & \subset & \Delta_b^* \end{array}$$

$\phi_{ab} \equiv \pi_b \circ id \circ \pi_a^{-1} : \pi_a(W_a \cap W_b) - \Gamma_a \xrightarrow{\approx} \pi_b(W_a \cap W_b) - \Gamma_b$ なる *biholomorphic map* は，$\pi_a(W_a \cap W_b) \to \pi_b(W_a \cap W_b)$ に，連続に拡張でき，*homeomorphic* になる．Δ^* は $\mathbb{C}^{m+N+1}$ の

normal analytic set だから，$\phi_{ab} : \Pi_a(W_a \cap W_b) \rightrightarrows \Pi_b(W_a \cap W_b)$ は，解析空间としての同型を与える．故に，$\{\Delta_a^*\}$，$\{\Gamma_a\}$ はうまくつながって，解析空间 X^* と，その特異点の全体（それ自身は X^* の部分多様体で，M と同型）をなす．

$\bigcup_{a \in M} W_a$ は S を cover している．

$X \equiv (\hat{X} - S) \cup X^* = (\tilde{X} - \bigcup_{a \in M} W_a) \cup (\bigcup_{a \in M} \Delta_a^*)$ が求めるものである．

参考文献

[1] A. Fujiki - S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", Publ. R.I.M.S., Vol. 7 (1971-72), pp. 637-644.

[2] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publ. R.I.M.S., Vol. 6 (1970-71), pp. 483-502.