数理解析研究所講究録
第 208 巻 1974 年 1-19

Nelson の仕事について (I)

神戸大 工 麦林布道
徳島大 工 長町重昭

Markoff field から quantum field を構成する Nelson の方法を、Nelson [1], [2], [3] をもとにして、free Markoff field を例に紹介する。

§ 1. 第2量子化

$\mathcal{H}$ を実 Hilbert 空間とし、そこでの内積を $\langle u, v\rangle$、$u, v \in \mathcal{H}$、と書く。

ϕ を平均が 0 で分散が $\mathcal{H}$ の内積で与えられる $\mathcal{H}$ 上のガウス過程とする。つまり、(Ω, μ) を ϕ の確率空間としたとき、$u, v \in \mathcal{H}$ に対して

$$E\,\phi(u) = \int_{\Omega} \phi(u)(\omega)\, d\mu(\omega) = 0,$$

$$E\,\phi(u)\phi(v) = \int_{\Omega} \phi(u)(\omega)\phi(v)(\omega)\, d\mu(\omega) = \langle u, v\rangle$$

が成り立つものとする。ϕ はガウス過程だから、$u_1, \cdots, u_m \in \mathbb{H}$ に対して、$\phi(u_1)\cdots\phi(u_m) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ である。$\Gamma(\mathbb{H}) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ とし、$\Gamma(\mathbb{H})_{\leq n}$ を $\phi(u_1)\cdots\phi(u_m)$、$m \leq n$ なる元で張られる $\Gamma(\mathbb{H})$ の閉部分空間、$\Gamma(\mathbb{H})_n$ を $\Gamma(\mathbb{H})_{\leq n}$ の中での $\Gamma(\mathbb{H})_{\leq n-1}$ の直交補空間とすれば

$$\Gamma(\mathbb{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathbb{H})_n$$

となる。ただし、$\Gamma(\mathbb{H})_0 = \mathbb{C}$、$\mathbb{C}$ は複素数とする。

$:\phi(u_1)\cdots\phi(u_n):$ を $\phi(u_1)\cdots\phi(u_n)$ の $\Gamma(\mathbb{H})_n$ への正射影とすると、

$$\langle :\phi(v_1)\cdots\phi(v_n):, :\phi(u_1)\cdots\phi(u_n): \rangle = \sum_{\pi} \langle v_{\pi(1)}, u_1 \rangle \cdots \langle v_{\pi(n)}, u_n \rangle$$

が成立する。ただし、和は $1, \cdots, n$ の全ての置換 π についてとるものとする。$\mathbb{H}_1$ を $\mathbb{H}$ の複素化、$\mathbb{H}_0 = \mathbb{C}$、$\mathbb{H}_n$ を $\mathbb{H}_1$ の n 階の symmetric tensor とすると

$$\langle \mathrm{sym}\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \mathrm{sym}\, u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \rangle = \sum_{\pi} \langle v_{\pi(1)}, u_1 \rangle \cdots \langle v_{\pi(n)}, u_n \rangle$$

となって、

$$\mathrm{sym}\, u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \longmapsto :\phi(u_1)\cdots\phi(u_n):$$

は $\mathcal{H}_n$ から $\Gamma(\mathcal{H})_n$ への等距離写像であることがわかる。
$\mathcal{H}_n$ と $\Gamma(\mathcal{H})_n$ を同一視して、

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

をうる。 A を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする。 A を $\mathcal{H}_1$ 上に拡張したものも A と書くことにして、$\Gamma(\mathcal{H})$ 上の作用素 $\Gamma(A)$ を

$$\Gamma(A)\,|\,\mathcal{H}_n = A \otimes \cdots \otimes A$$

と定義する。$\Gamma(\mathcal{H})$, $\Gamma(A)$ はそれぞれ Fock 空間, A の第2量子化と呼ばれているものである。

これまでのことを categorical に考えてみる。Hilbert 空間を object とし, contraction operator を morphism とする category を $\mathfrak{h}$、確率空間を object とし, doubly Markovian operator を morphism とする category を $\mathfrak{p}$ と書く。ここに、doubly Markovian operator とは、$L^1(\Omega_1, \mu_1)$ から $L^1(\Omega_2, \mu_2)$ への線型正値作用素 P であって、

$$P\,1 = 1, \quad \int_{\Omega_1} f \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} Pf \, d\mu_2$$

を満足するものをいう。 $\mathfrak{h}_r$ を実 Hilbert 空間とその

contraction operator の作る category とすると、次の定理によって、第2量子化は $\mathfrak{H}_r$ から $\mathfrak{P}$ への covariant functor であることがわかる。

定理 1

$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ を実 Hilbert 空間とし、A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への contraction operator とすれば、$\Gamma(A)$ は doubly Markovian operator である。

§2. Markoff fields

$\mathcal{D}(R^d)$ を R^d 上の台が compact な C^∞ 関数の全体とし、$\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ を内積 $\langle g, f\rangle_{-1} = \langle g, (-\Delta+m^2)^{-1} f\rangle$、$m>0$、による $\mathcal{D}(R^d)$ の完備化とする。ϕ が $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の random field であるとは、$\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の確率過程であって、$f_n \to f$ in $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ より、$\phi(f_n) \to \phi(f)$ in measure がいえるものをいう。ϕ が R^d 上の質量 m の free Markoff field であるとは、ϕ が $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上のガウス過程であることをいう。ϕ を $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の random field とするとき、$\phi(f)$、$f \in \mathcal{H}^{-1}(R^d)$ かつ $\operatorname{supp} f \subset E$、で生成された σ-algebra を $\mathcal{O}(E)$ で表わす。また、$\mathcal{O}(E)$ 可測な関数の全体も同じ $\mathcal{O}(E)$ で表わすことにする。

U を R^d の任意の開集合, U' を U の補集合、∂U を

U の境界とする。$\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の random field ϕ から上のようにして $\mathcal{B}(U)$ をつくる。この ϕ が $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Markoff field であるとは、$\mathcal{B}(U)$ の正の確率変数 u に対して

$$E\{u \mid \mathcal{B}(U')\} = E\{u \mid \mathcal{B}(\partial U)\}$$

が成立することである。これを Markoff 性という。ここに、$E\{u \mid \mathcal{B}(U')\}$ は u の $\mathcal{B}(U')$ に関する条件付期待値である。特に、$u \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ ならば、$E\{u \mid \mathcal{B}(U')\}$ は U の $\mathcal{B}(U') \cap \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ への正射影になる。Markoff 性は直感的には、U 内での field に関する予測に対しては、U 外での情報は U の境界での情報以上のものを含んでいないということである。

R^d の非斉次直交群（反転を含む）を Euclidean group という。Euclidean group から保測変換の作る群への準同型 $\eta \to T_\eta$ で次の条件：

u を確率変数とするとき、$\eta_n \to \eta$ ならば $T_{\eta_n} u \to T_\eta u$ in measure、ここで $(T_\eta u)(\omega) = u(T_\eta^{-1}(\omega))$

を満足するものを、Euclidean group の確率空間の上での表現という。$\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Markoff field ϕ が $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field であるとは、ϕ の確率空間上に

Euclidean group の表現 T が存在して、

$$T_\tau \phi(f) = \phi(f \circ \tau^{-1})$$

が成り立つことである。

<u>定理 2</u>

free Markoff field は Euclidean field である。

<u>証明</u>

まず Markoff field であることを示す。 U を R^d の開集合、 f を $\mathrm{supp}\, f \subset U$ なる $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ の元とする。

$$M = \{ g \in \mathcal{H}^{-1}(R^d) \ ; \ \mathrm{supp}\, g \subset U' \},$$

$$N = \{ g \in \mathcal{H}^{-1}(R^d) \ ; \ \mathrm{supp}\, g \subset \partial U \}$$

とし、 h を f の M への正射影とする。このとき、 h は実は N の元であることが次のようにしてわかる。

M の任意の元 g に対して

$$\langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} h \rangle = \langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} f \rangle$$

が成り立つので、 U'° を U' の内点の集合としたとき、とくに $\mathrm{supp}\, g \subset U'^{\circ}$ なる $\mathcal{D}(R^d)$ の元 g に対してもこの式は成立する。したがって、 distribution として U'° で

$$(-\Delta + m^2)^{-1} h = (-\Delta + m^2)^{-1} f$$

が成立する。両辺に局所作用素 $-\Delta+m^2$ を作用させると、U'° で $h=f=0$ となり、$\mathrm{supp}\,h\subset U'\setminus U'^{\circ}=\partial U$ だから、$h\in N$ がいえる。

$\Phi(f)$ の $\Gamma(H^{-1}(R^d))\cap\mathcal{O}(U')$ および $\Gamma(H^{-1}(R^d))\cap\mathcal{O}(\partial U)$ への正射影は共に $\Phi(h)$ であるから、

$$E\{\Phi(f)\,|\,\mathcal{O}(U')\}=E\{\Phi(f)\,|\,\mathcal{O}(\partial U)\}=\Phi(h)$$

となる。$\mathcal{L}$ を M の中での N の直交補空間、また $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U}=\{f\in H^{-1}(R^d)\,;\ \mathrm{supp}\,f\subset U\}$$

とすると，Φ は平均 0 のガウス過程だから，$f_i\in\mathcal{U}$, $K_i\in\mathcal{L}$ のとき、$\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)$ と $\Phi(K_1)\cdots\Phi(K_m)$ とは独立となり、

$$E\{\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\,|\,\mathcal{O}(U')\}=E\{\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\,|\,\mathcal{O}(\partial U)\}$$

がでる。$\mathcal{O}(U)$ は $\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)$、$f_i\in\mathcal{U}$、の形の元で生成されているから、u が $\mathcal{O}(U)$ の正の元であれば

$$E\{u\,|\,\mathcal{O}(U')\}=E\{u\,|\,\mathcal{O}(\partial U)\}$$

が成立する。これで Markoff 性が示された。

次に Euclidean field であることを示す。$H^{-1}(R^d)$ の内

積 $\langle v, u \rangle_{-1} = \langle v, (-\Delta + m^2)^{-1} u \rangle$ は Euclidean group の作用 $U(\tau) u = u \circ \tau^{-1}$ に関して不変であって、$\tau \mapsto U(\tau)$ は Euclidean group の強連続な直交表現である。$T_\tau = \Gamma(U(\tau))$ とすれば

$$T_\tau \phi(f) = \phi(f \circ \tau^{-1})$$

となり、定理1によって、T_τ は確率代数の同型写像への Euclidean group の表現になっていることがわかる。いま、Ω として $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ の核型拡大 $\mathcal{S}'$ をとると、T_τ は Ω の回転という保測変換による Euclidean group の表現になり、$U(\tau)$ の連続性から T_τ の連続性がいえる。したがって、free Markoff field は Euclidean field である。

§ 3、 Hamiltonian

Euclidean field から quantum field を構成するために、まず Hamiltonian を定義する。今後、R^d の元 x を $x = (X, t)$、$X \in R^{d-1}$、$t \in R$ と表わすことにする。Y_s を $t = s$ なる超平面、Z_s を $t \le s$ なる半空間、$\rho(s)$ を Y_s に関する反転、$\eta(s)$ を $(X, t) \mapsto (X, t+s)$ なる移動とする。ϕ を $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field として、$\mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$、$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu) \cap \mathcal{O}(R^{d-1})$ で表わす。$\mathcal{H}$

は後に quantum field の Hilbert 空間となる。 E を K から $\mathcal{H}$ への正射影とすると、

$$E_0 u = E\{u \mid \mathcal{O}(R^{d-1})\}$$

である。 $u \in \mathcal{H}$ と $0 \leq t < \infty$ に対して、作用素 P^t を

$$P^t u = E_0 T_{\tau(t)} u$$

で定義すると、次の定理が成立する。

定理 3.

ϕ と $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field とし、$\mathcal{H}$ と P^t を上のとおり定義したものとすると、$\mathcal{H}$ 上に正値自己共役作用素 H が一意的に存在して、 $P^t = e^{-tH}$、 $0 \leq t < \infty$、となる。

証明

まず、P^t が強連続な半群になっていることを示す。$Y_0 = R^{d-1}$ に注意して

$$P^s P^t = E\{T_{\tau(s)} P^t u \mid \mathcal{O}(Y_0)\} \tag{1}$$

$$= E\{T_{\tau(s)} E\{T_{\tau(t)} u \mid \mathcal{O}(Y_0)\} \mid \mathcal{O}(Y_0)\} \tag{2}$$

$$= E\{E\{T_{\tau(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Y_s)\} \mid \mathcal{O}(Y_0)\} \tag{3}$$

$$= E\{E\{T_{\eta(s+t)}u \mid \mathfrak{B}(Y_s)\} \mid \mathfrak{B}(Z_0)\} \tag{4}$$

$$= E\{E\{T_{\eta(s+t)}u \mid \mathfrak{B}(Z_s)\} \mathfrak{B}(Z_0)\} \tag{5}$$

$$= E\{T_{\eta(s+t)}u \mid \mathfrak{B}(Z_0)\} \tag{6}$$

$$= E\{T_{\eta(s+t)}u \mid \mathfrak{B}(Y_0)\} \tag{7}$$

$$= P^{s+t}u. \tag{8}$$

(1)、(2)、(8) は P の定義、(3) は Euclidean covariance、(4)、(5)、(7) は Markoff 性、(6) は $\mathfrak{B}(Z_s) \subset \mathfrak{B}(Z_0)$ より成立する。また、$t \to 0$ のとき $T_{\eta(t)}u \to u$ in measure で、$T_{\eta(t)}$ は unitary 作用素であるから、$T_{\eta(t)}u \to u$ in K が従い、P^t は強連続であることがわかる。さらに、P^t は contraction operator だから、P^t が自己共役であることを示せば、P^t の生成作用素について定理が成立する。

作用素 $(-\Delta+m^2)^{-1}$ の積分核は変形 Bessel 関数で表わされるので、対応するポテンシャル論は最大値の原理を満たす。最大値の原理が成り立てば、台が閉集合 E に属するエネルギー有限の distribution T は、E 上のエネルギー有限の測度の一次結合の強収束の極限である、という Deny の定理 [4] によれば、$\{f \in \mathcal{H}^{-1}(R^d);\ \mathrm{supp}\, f \subset R^{d-1}\}$ の元 f は $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ のノルムの意味で $\mathcal{H}^{-1}(R^{d-1})$ の正の元の有限一次

結合でいくらでも近似できる。ところが、正の distribution は測度であり、反転 ρ は R^{d-1} を点毎に不変にするから、その上の測度を、またそれの極限である f を不変にする。したがって、T_ρ は $\Phi(f)$ を不変にするので、T_ρ は $\mathcal{H}$ の恒等作用素である。これを反転性と呼ぶ。

$u, v \in \mathcal{H}$ のとき

$$\langle v, P^t u\rangle = \langle v, E_0 T_{\tau(t)} u\rangle = \langle v, T_{\tau(t)} u\rangle = E(\bar{v}\, T_{\tau(t)} u),$$

$\tau(t)^{-1} \circ \rho(\frac{t}{2}) = \rho$ と反転性より、$T_{\tau(t)^{-1} \circ \rho(t/2)} \bar{v} = v$、したがって、$T_{\rho(t/2)} \bar{v} = T_{\tau(t)} \bar{v}$ が成り立ち、$\rho(\frac{t}{2}) \circ \tau(t) = \rho$ より同様にして、$T_{\rho(t/2)} T_{\tau(t)} u = u$ となる。よって、$T_{\rho(t/2)} (\bar{v}\, T_{\tau(t)} u) = (T_{\tau(t)} \bar{v})\, u$ である。Euclidean covariance より

$$E(\bar{v}\, T_{\tau(t)} u) = E\, T_{\rho(t/2)} (\bar{v}\, T_{\tau(t)} u) = E\,(T_{\tau(t)} \bar{v})\, u$$

$$= \langle T_{\tau(t)} v, u\rangle = \langle E_0 T_{\tau(t)} v, u\rangle = \langle P^t v, u\rangle.$$

したがって、P^t は自己共役である。

§4. Quantum field

Φ を $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field とする。$-\infty < K < \infty$

に対して、$D(H^{\frac{K}{2}})$ のノルム $\|u\|_K = \|(1+H)^{K/2}u\|$ に関する完備化を $\mathcal{H}^K$ とし、$\mathcal{H}^{\infty} = \bigcap \mathcal{H}^K$、$\mathcal{H}^{-\infty} = \bigcup \mathcal{H}^K$ とかく。
$\tilde{u}$, $\tilde{v}$ を u, v の Fourier 変換とすると

$$\langle u, v\rangle_{-1} = \int \overline{\tilde{u}(K)}\, v(K)\, \frac{1}{K^2+m^2}\, dK,$$

$$\widetilde{g \otimes \delta}(K_1 \cdots K_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{g}(K_1, \cdots, K_{d-1})$$

より

$$\|g \otimes \delta\|_{-1}^2 = \frac{1}{2\pi} \iint |\tilde{g}(\mathbb{K})|^2 \frac{1}{\mathbb{K}^2 + l^2 + m^2}\, d\mathbb{K}\, dl$$

$$= \frac{1}{2} \int |\tilde{g}(\mathbb{K})|^2 \frac{1}{\sqrt{\mathbb{K}^2+m^2}}\, d\mathbb{K}.$$

したがって、$f \in \mathcal{S}(R^{d-1})$ ならば、$f \otimes \delta \in \mathcal{H}^{-1}(R^d)$ であることがわかる。そこで

$$\phi_0(f) = \phi(f \otimes \delta), \quad f \in \mathcal{S}(R^{d-1})$$

と定義する。これが free quantum field である。

$\mathcal{L}(\mathcal{H}^K, \mathcal{H}^l)$ を $\mathcal{H}^K$ から $\mathcal{H}^l$ への有界線型作用素のつくる Banach 空間とする。確率変数 w に対して、w を掛けるという演算が $\mathcal{L}(\mathcal{H}^K, \mathcal{H}^l)$ の元ならば、$w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^K, \mathcal{H}^l)$ と書く。Wightman distribution の存在を示すために次の

仮定(A)を設ける。$\phi_0(f)$が確率変数であることに注意して、

<u>仮定 (A)</u>

任意の $f\in\mathcal{S}(R^{d-1})$ に対して、$\phi_0(f)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^K,\mathcal{H}^\ell)$ となる K、ℓ が f に無関係に存在して、$f\longmapsto\phi_0(f)$ は連続である。

$f\in\mathcal{S}(R^{d-1})$ に対して、$\theta_0(f)=\phi_0(f)=\phi(f\otimes\delta)$ と書いて、$\theta_\tau(f)=e^{i\tau H}\theta_0(f)e^{-i\tau H}$ と定義すれば、$e^{i\tau H}$ はそれぞれの $\mathcal{H}^K$ を不変に保ち、その上で unitary であるので、$\theta_\tau(f)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^K,\mathcal{H}^\ell)$ となる。M^d を d 次元 Minkowski 空間とする。$f\in\mathcal{S}(M^d)$ のとき、$f_\tau(X)=f(X,\tau)\in\mathcal{S}(R^{d-1})$ であり、また、仮定(A)によって、$u\in\mathcal{H}^K$、$v\in\mathcal{H}^\ell$ に対して、$\langle v,\theta_0(f_\tau)u\rangle\in\mathcal{S}(R^{d-1})$ である。したがって、Nelson [5] によって、

$$\theta(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\theta_\tau(f_\tau)\,d\tau\in\mathcal{L}(\mathcal{H}^\infty,\mathcal{H}^\infty)$$

となる。$1\in\mathcal{H}^\infty$ だから、$\langle 1,\theta(f_1)\cdots\theta(f_n)1\rangle$ は意味があって、仮定(A)より、各 f_j について連続であることがわかる。故に、核定理を用いると $W^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{S}'(M^d)$ が一意的に存在して

$$\int\cdots\int W^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$= \langle 1, \theta(f_1) \cdots \theta(f_n) 1 \rangle$$

が成立する。$W^{(n)}$ を Wightman distribution という。

定理 4.

free Markoff field は仮定(A)を満足する。

証明

$\mathcal{S}(R^{d-1})$ を内積 $\frac{1}{2}\langle f, (-\Delta+m^2)^{-1/2} g\rangle$ に関して完備化した $\mathbb{H}^{-1/2}(R^{d-1})$ と、$\{f \in \mathbb{H}^{-1}(R^d) ; \operatorname{supp} f \subset R^{d-1}\}$ とは、$g \in \mathbb{H}^{-1/2}(R^{d-1})$ に $(g \otimes \delta) \in \mathbb{H}^{-1}(R^d)$ を対応させることによって同一視できる。$\mathbb{H}^{-1/2}(R^{d-1})$ 上のガウス過程が Schrödinger 表示における free quantum field であって、運動量表現では次の形をもつことはよく知られている。(例えば、Glimm and Jaffe [6] を見よ。)

$$(\phi_0(f)\hat{u})^{(n)}(\mathbb{k}_1 \cdots \mathbb{k}_n) = \Big\{ \sqrt{n+1} \int \tilde{f}(\mathbb{k})\, \hat{u}^{(n+1)}(\mathbb{k}, \mathbb{k}_1, \cdots \mathbb{k}_n)\, d\mathbb{k}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}(-\mathbb{k}_j)\, \hat{u}^{(n-1)}(\mathbb{k}_1, \cdots \check{\mathbb{k}}_j \cdots \mathbb{k}_n) \Big\}. \qquad (9)$$

また、P^t はそれを一粒子空間へ制限したものの第2量子化作用素に一致し、一粒子空間では運動量表現で $e^{-\sqrt{\mathbb{k}^2+m^2}\,t}$ を掛けるという作用素であるから、その生成作用素は運動量表現で

$$H\,\tilde{u}^{(n)}(\mathbb{k}_1\cdots\mathbb{k}_n)=\left\{(\mathbb{k}_1^2+m^2)^{1/2}+\cdots+(\mathbb{k}_n^2+m^2)^{1/2}\right\}\tilde{u}^{(n)}(\mathbb{k}_1\cdots\mathbb{k}_n)$$

となる。$f\in\mathcal{H}^{-1/2}(R^{d-1})$ ならば、$\tilde{f}(\mathbb{k})(\mathbb{k}^2+m^2)^{-1/2}\in\mathcal{L}^2(R^{d-1})$. したがって、(9) の右辺の第2項（生成項）は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}^{-1}$ への有界作用素で、その共役作用素である第1項（消滅項）は $\mathcal{H}^1$ から $\mathcal{H}$ への有界作用素である。以上のことから、$\Phi_0(f)$ は $\mathcal{H}^1$ から $\mathcal{H}^{-1}$ への有界作用素であり、$K=1,\ l=-1$ として仮定（A）を満足することが示された。

ここで定義された Wightman distribution が、quantum field の再構成定理のための条件（例えば、Bogoliubov 他 [7] を見よ）の大部分を満たしていることが次の定理からわかる。$\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ のすべての元 f について $\Phi(\bar{f})=\overline{\Phi(f)}$ が成り立つとき、Φ を Hermitian field と呼ぶ。

定理 5

Φ を $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Hermitian Euclidean field で仮定(A) を満足するものとする。Wightman distribution $W^{(n)}$ に対して、次のことが成り立つ。

(a) 相対論的不変性

$$W^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=W^{(n)}(\Lambda x_1,\cdots,\Lambda x_n)$$

ただし、Λ は M^d の固有 Poincaré 群の元、

(b) スペクトル条件

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$$

$$= (2\pi)^{d/2}\,\delta\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right)\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}(p_1, p_1+p_2, \cdots, p_1+\cdots+p_{n-1}).$$

ここで、$\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}(q_1, \cdots, q_{n-1})$ は緩増加な diotribution であって、$\overline{V_+^{n-1}} = \{(q_1, \cdots, q_{n-1})\ ;\ (q_j)^2 \geqq 0\ ;\ q_j^0 \geqq 0\}$ の外では 0 となるものである。

(c) エルミット性

$$W^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \overline{W^{(n)}(x_n, \cdots, x_1)}$$

(d) 局所可換性.

$(x_j - x_{j+1})^2 < 0$ のとき

$$W^{(n)}(x_1 \cdots x_j, x_{j+1} \cdots x_n) = W^{(n)}(x_1 \cdots x_{j+1}\, x_j \cdots x_n)$$

(e) 正定値性

$$\sum \int\cdots\int dx_1 \cdots dx_j\, dy_1 \cdots dy_k\, \overline{f_j(x_1, \cdots, x_j)}$$

$$\times\, W^{(j+k)}(x_j, \cdots, x_j\, ; y_1 \cdots y_k)\, f_k(y_1, \cdots, y_k) \geqq 0$$

ここで、$f_0, f_1, f_2, \cdots$ は $f_n \in \mathcal{S}((M^d)^n)$ なる有限列とする。

この定理の証明の詳しいことは Nelson [3] を見ていただ

くことにして、ここでは大体の考えを示す。(c) と (e) は $W^{(n)}$ が真空期待値で定義されていることより明らか。(a) については、θ が ϕ の t を it で置き換えたものと考えられ、ϕ が Euclidean covariance をもつことから示される。(d) は、$(x_j - x_{j+1})^2 < 0$ なる x_j, x_{j+1} が (a) によって R^{d-1} の2点に移され、そこでは $\theta = \phi$ であって、ϕ は確率変数だから可換であることよりわかる。(b) は Hamilton が正値であることと、相対論的不変性より示される。

真空の一意性に関しては次の定理がある。

<u>定理 6</u>

ϕ を $H^{-1}(R^d)$ 上の Hermitian Euclidean field で、仮定 (A) を満足するものとする。R^d の平行移動の群が ϕ の確率空間にエルゴード的に作用していれば、真空は一意的である。

<u>証明</u>

u を真空とし、ξ_j を x_j 方向の平行移動とすれば、$T_{\xi_j} u = u$、$1 \leq j \leq d-1$、$e^{itH} u = u$ が成立する。したがって、$P^t u = u$、つまり $E_0 T_{2(t)} u = u$ がいえる。$T_{2(t)}$ が unitary であることと、E_0 が H への正射影であることより、$T_{2(t)} u = u$ がわかり、平行移動がエルゴード的であることより、u は1の定数倍であることがわかる。

参考文献

[1] E. Nelson, Quantum fields and Markoff fields, Amer. Math. Soc. Summer Institute on Partial Differential Equations held at Berkeley, 1971.

[2] E. Nelson, The free ,arkoff field, J. Funct. Anal. 12 (1973), 211-227.

[3] E. Nelson, Construction of quantum fields from Markoff fields, J. Funct. Anal. 12 (1973), 97-112.

[4] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, Acta Math. 82 (1950), 107-150.

[5] E. Nelson, Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms, J. Funct. Anal. 11 (1972), 211-219.

[6] J. Glimm and A. Jaffe, Boson quantum field models, Mathematics of Contemporary Physics, ed. R. F. Streater (Academic Press, 1972), pp. 77-143.

[7] N. N. Bogoliubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov, 場の量子論の数学的方法（東京図書、1972）

<u>附記</u>

この考えは、self-coupled Bose fields の場合に拡張され、それに基づいて、Simon 達は $P(\phi)_2$ 理論について、場の量子論と統計力学の結び付きを確立した：

F. Guerra, L. Rosen and B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, Princeton preprint, May 1973.