数理解析研究所講究録
第 208 巻 1974 年 34-87

ヒルベルト空間の作用素の族から導入された核空間について

東理大 理工　永 倉 安次郎

§1　序論

「階位空間の方法」(The method of ranked space)は位相空間論とは本質的に異なる。距離空間では，数で点と点との遠近がわかると同時に，それを½，⅓，…とすれば「近づく」という事を，数の大小の順序によって，我々は知る事が出来る。しかし，一般位相空間では，「近さ」の概念を示す近傍は，精密に規定されてはいるが，「近づく」という method の方は constructive であるとは一般には云いがたい。これに反して，「階位空間の方法」では近傍に対しては，条件をゆるめ，(例えば，開集合の概念は特に必要とはしないし，方向性をもった問題を含む事も可能) method としては，基本近傍列として，収束の行序の概念を明確に規定している。基本近傍列は２つの思想をもっている。１つは，順序数で定義された rank によって，次々に調べる近

傍の順序が示される事，1つは，中へ中へ近傍をとる事によって，場所が次第に限定されて行く事の2つである。しかも，ある点列が収束している事を証明するには，ある1つの基本近傍列に関して，ある条件を満足していればよい。これは，この理論が positive の形である事を示している。

スカラー体が数の，線形階位空間（linear ranked space）では，空間の深さ（depth）はω_0，即ち近傍の rank は自然数になる。しかし乍ら，位相空間におけるが如く，近傍系が countable だからと云って，Frécht space になってしまうとは限らない。何故ならば，Frécht space はその inductive limit をとれば，Frécht space でなくなってしまうが，linear ranked space の場合は，その時でも，全く同じ type の，即ち countable の近傍系をもつ linear ranked space となるからである。例としては Schwartz の Distribution の基礎空間は「階位空間の方法」で完全で，しかも無理なく記述出来る。

linear ranked space の inductive limit における収束は，ある基本近傍列をとる事によって，自然に場所が限定されて擬収束となるが，位相空間の inductive limit では擬収束を実現するためには，条件の悪い近傍も全てとって，否定する形でその収束する場所を限定しなければならない。

つまり，出来るだけ多くの seminorm を使用する必要がある。これが「階位空間の方法」は positive の働きをし，位相空間の方は negative の働きをする例である。

なお，Banach space における主要な理論の基礎となっている「closed graph theorem」及び「Banach-Steinhaus theorem」は広い条件の linear ranked space で既に証明されている。

さて，この論文で取扱う核空間について述べる。場の量子論では，次の様に理論が構成されている。最初に核空間 Ω が与えられ，それを埋め込む共役空間 Ω^* をつくる。更に Ω と Ω^* との間にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をつくって，

$$\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$$

なる，3つの組の rigged Hilbert space を構成する。これに対して，我々は最初に，状態ベクトルのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と，その中で問題とされる作用素が与えられたとする。そこで，それらの作用素を，その共通の定義域で，全て連続とする様な，極限構造をもつ linear ranked space D とその拡張の空間 $\hat{D}$ をつくって

$$D \subset \mathcal{H} \subset \hat{D}$$

なる3つの組をつくる。

この理論の特色は，状態ベクトルのヒルベルト空間は最初

から固定して、その中で理論をつくるという事である。従って完備正規直交系は唯1組でよいので、核定理の証明や分における Gaussian measure の定義は容易となる。

Roberts [1] は、与えられたヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中に、ある closed linear operator の family が存在した時に、その中の1つが invertible self-adjoint extension をもち、その inverse が nuclear operator ならば、それらの operator の common dense invariant domain D は kernel topology を導入する事によって、nuclear space となる事を示した。これは、上の operator を、すべて連続とする位相である。

そこで、我々は Roberts [1] の仮定をもつヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をこの理論の出発点とする。

この理論の、もう1つの特色は、nuclear operator が表面から姿を消したという事である。従来の nuclear space の理論は、空間自身の位相とは別に、nuclear operator の family があって、それが極限に密接に関係している。これは、つまり極限の二重性という事実であるが、ここでは、nuclear operator の果すべき重要な役割を全て ranked space の近傍の定義に組込んでしまった。そしてそれ以降は一切 nuclear operator を使わない。また nuclear space を拡張するのに，共役空間によらずに，completion によって，一挙に共役空間を含む広い空間をつくった。即ち，連続線形汎関数は拡張された空間の中の1つの要素として表現される。

次に，順を追って各節の内容を紹介する。§2は Roberts [1] による最初の問題設定の仮定を述べてある。§3ではヒルベルト空間の部分空間 D に rank をもった近傍 V_i を nuclear operator の役割を考慮しつゝ定義して，D を linear ranked space とした。この時，階位空間としての極限は，Roberts [1] によって導入された kernel topology による極限と同値である事が示される。§4では，この理論に，よりよい見通しを与えるために，closed linear operator の族に2つの条件を附加して新しい近傍 U_i を定義し，これで D を linear ranked space とした。この時，D は完備な空間となる。§5では，空間 D を拡大するために，§4で導入した近傍 U_i よりも弱い条件をもつ近傍 W_i を定義して，D を linear ranked space となした。この時，D は完備でない空間となるので，completion として D を含む拡大空間 $\hat{D}$ を構成する事が出来る。$\hat{D}$ は有限次元ユークリッド空間の projective limit となる。§6では，§4で定義した linear ranked space D における連続線形汎関数について調べる

。先づ，それは$\hat{\Omega}$の中の1つの要素として，表現されることを示し，それらの全体は，inductive limitとなることを示した。linear ranked spaceでは，inductive limitを取扱うと，その収束は必然的に擬収束となるのであるが，こゝでは，それについて詳述する。また，各点で収束する連続線形汎関数の列は，実は，汎関数として，収束することも示した。これは，より一般のlinear ranked spaceにおいて，証明されている一様有界性定理及び，Banach-Steinhaus theoremを使用して，証明された。§7では，核定理を証明した。これも一様有界性定理を使って，簡単に証明された。§8では，拡大空間$\hat{\Omega}$に，Gaussian measureを定義した。この理論を通じて，完備正規直交系は1組で十分なる事が，よく判るのである。

§2 On the assumptions

Roberts [1]に従って，次の条件を仮定する。

(1) $\mathcal{O}$をseparable Hilbert space $\mathcal{H}$のclosed linear operatorの族として，次の性質をもつとする。$\mathcal{O}$の要素Aは共通なdense invariant domainをもって，且つ，A^*も$\mathcal{O}$に属する。

(2) $\mathcal{A}$を$\mathcal{O}$と恒等作用素から，次の方法で生成された最小の

ring とする。(これをC. O. ring と呼ぶことにする)
即ち, (i) 和は通常の operator の和の closure (ii) 積は通常の operator の積の closure, と定める。又 $\mathcal{O}$ に対する最大の invariant domain は $D = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} D(A)$ によって与えられる。

(3) $\mathcal{A}$ の中に, ある operator A があって, $A^0 = A|D$ はそれで self-adjoint extension をもち, 且つその inverse は nuclear operator である。

(4) $\mathcal{O}$ は countable, とする.

§3 The neighbourhood for D in the sense of ranked space

§2の仮定(3)によって, A^0 は self-adjoint extension T をもち, T^{-1} は nuclear operator であるとする。T^{-1} の固有値を重複度も考えて, 次の様に番号づける。

$$|\mu_1| \geqq |\mu_2| \geqq \cdots\cdots \geqq |\mu_k| \geqq \cdots\cdots > 0$$

e_k を μ_k に対応する固有ベクトルとすれば, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ はそれの完備正規直交系となる。今 $\lambda_k = 1/|\mu_k|$ とおくと, T^{-1} は nuclear operator なることより, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} < \infty$ であり, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調に $+\infty$ に発散する。従って, ある自然数 N が存在して,

$$1 < \lambda_N \leqq \lambda_{N+1} \leqq \cdots\cdots\cdots$$

と出来る。今後，このNを固定して，理論を展開する。次に *algebra $\mathcal{A}$ の要素の中，単位元と，ある自然数nに対して，$A \mid D = T^n \mid D$ となる様な operator A 以外の要素に対して，番号をつけて，A_1，A_2，$\cdots\cdots$ としておく。

さて，linear space D に対し，原点の近傍として，次の様に $V_i(r, l ; D)$ を定義しよう。

$$V_i(r, l ; D) = \left\{ x \in D ; \left(\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2\right)^{1/2} < r,\ \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2\right)^{1/2} < l,\ \&\ \|A_h x\| < l \quad \text{for } h = 1, \cdots, i \right\}$$

こゝで，$\{\xi_k\}$ は x の $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ に関する フーリエ係数であり，i は自然数，また $r > 0$，$l > 0$．

この時，特に $V_i(D) = V_i(1/i, 1 ; D)$ for $i \geqq 1$ とおいてこれを rank i の原点の近傍と呼ぶ事にする。空間Dを rank zero の近傍とし，これを $V_0(D)$ で示す。Dの任意の点xの rank i の近傍は $x + V_i(D)$ と定める。

さて，階位空間の一般理論の示す如く，基本近傍列とは次の如き近傍の列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ である。

$$\begin{cases} (1) & V_{\gamma_1}(D) \geqq V_{\gamma_2}(D) \geqq \cdots\cdots \geqq V_{\gamma_i}(D) \geqq \cdots\cdots \\ & \qquad \text{但し，} V_{\gamma_i}(D) \text{ は rank } \gamma_i \text{ の近傍.} \\ (2) & \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots\cdots \to \infty \end{cases}$$

そして，点列$\{x_i\}$がxに収束するとは，ある基本近傍列$\{V_{\gamma_i}(D)\}$が存在して，　$x_i - x \in V_{\gamma_i}(D)$ for all i が成立つ事である。

次に，いくつかの補題，定理を証明してから，上の様に近傍V_iが定義された空間Dはlinear ranked spaceである事を証明しよう。

Lemma 1　(1) $V_i(r, l; D)$はcircledである

(2) $V_{i+1}(r', l'; D) \subseteq V_i(r, l; D)$, if $r' \leq r$, $l' \leq l$

(3) $\lambda V_i(r, l; D) = V_i(\lambda r, \lambda l; D)$, for $\lambda > 0$

(4) $V_i(r, l; D) + V_i(r', l'; D) \subseteq V_i(r+r', l+l'; D)$

(証明)(1) $x \in V_i(r, l; D)$ 且つ $|\lambda| \leq 1$ ならば，明らかに $\lambda x \in V_i(r, l; D)$.

(2) $1 < \lambda_N \leq \lambda_{N+1} \leq \cdots\cdots$ であるから，$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ が $V_{i+1}(r', l'; D)$ に属するならば，$\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 \leq \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{i+1} \xi_k|^2 < l'^2 \leq l^2$. 従って $x \in V_i(r, l; D)$.

(3) これは明白である。

(4) $x \in V_i(r, l; D)$, $x' \in V_i(r', l'; D)$ とし，$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, $x' = \sum_{k=1}^{\infty} \xi'_k e_k$ とすると，

$$\left(\sum_{k=1}^{i} |\xi_k + \xi'_k|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{i} |\xi'_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < r + r'.$$

且つ $\left(\sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^i(\xi_K+\xi_K')|^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^i\xi_K|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^i\xi_K'|^2\right)^{1/2} < l+l'$

その上，$\|A_k(x+x')\| \leqq \|A_k x\| + \|A_k x'\| < l+l'$ for $k=1,\cdots,i$.

が成立つから　$x+x' \in V_i(r+r', l+l'; D)$　（証明終）

次の定理は，任意の収束列は唯1つの極限点をもつ事を示している。

Theorem 1　$\{V_{\gamma_i}(D)\}$を任意の基本近傍列とする時には $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\gamma_i}(D) = \{0\}$.

（証明）　$x = \sum_{K=1}^{\infty}\xi_K e_K \in V_{\gamma_i}(D)$ for all i

とすると，近傍の定義から $\sum_{K=1}^{\gamma_i}|\xi_K|^2 < 1/\gamma_i^2$ が任意のiについて成立つ。従って，すべてのKに対して $\xi_K = 0$ が成立つ。即ち $x=0$.　（証明終）.

Theorem 2　近傍列$\{V_{\gamma_i}(r_i, l_i; D)\}$は次の様な性質をもつとする。$\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots \to \infty$，$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots \to 0$，$l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_i \geqq \cdots$. すると適当る基本近傍列$\{V_{\gamma_i}(D)\}$が存在して

$$V_{\gamma_i}(r_i, l_i; D) \subseteq V_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i$$

となる。

（証明）$\gamma_i > 1$ の時，$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ が $V_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D)$ に属するならば，定義より

$\sum_{k=1}^{\gamma_i}|\xi_k|^2 < r_i^2$，$\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k\xi_k|^2 \leqq (\lambda_N^{-\gamma_i+1})^2\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{\gamma_i}\xi_k|^2 < (l_i\lambda_N^{-\gamma_i+1})^2$

であり，また $h=1,\cdots,\gamma_i$ に対して $\|A_h x\| < l_i$ である。

一方，$A_1 \in \mathcal{A}$ ならば，定義より $\overline{A_1^* A_1} \in \mathcal{A}$ それ故，ある番号 m があって $\overline{A_1^* A_1} = A_m$ となっている。従って $\gamma_i > \max(m, N)$ なる $V_{\gamma_i}(r_i, l_i : D)$ に属する $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ に対しては

$$\|A_1 x\|^2 = (A_1 x, A_1 x) = (A_1^* A_1 x, \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k (A_1^* A_1 x, e_k)$$
$$\leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|(A_1^* A_1 x, e_k)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{1/2}\|A_1^* A_1 x\| <$$
$$\{r_i^2 + (l_i\lambda_N^{-\gamma_i})^2\}^{1/2} l_i .$$

が成立つ。従って，十分大なる自然数 j_1 をとれば，$i \geqq j_1$ なる i に対して，$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k \in V_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D)$ ならば，

$\sum_{k=1}^{1}|\xi_k|^2 < 1$，$\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k\xi_k|^2 < 1$，$\|A_1 x\| < 1$ とする事が出来る。この時は

$$V_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D) \subseteqq V_1(D) \qquad \text{for } i \geqq j_1$$

である。同様にして，$V_2(D)$ に対して，十分大なる自然数 $j_2 > j_1$ をとれば

$$V_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D) \subseteqq V_2(D) \qquad \text{for } i \geqq j_2$$

とする事が出来る。これを繰返して，一般に，

$$V_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D) \subseteqq V_m(D) \qquad \text{for } i \geqq j_m$$

なる自然数列 $\{j_m\}$ を得る。

そこで，$\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)=\mathfrak{V}_0(D)$ for $1\leqq i<j_1$，$\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)=\mathfrak{V}_1(D)$ for $j_1\leqq i<j_2$，$\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)=\mathfrak{V}_2(D)$ for $j_2\leqq i<j_3$，…… とおくと

$$\mathfrak{V}_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D) \subseteqq \mathfrak{V}_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i$$

なる基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)\}$ を得る。（証明終）

さて，M. Washihara [4] は linear ranked space の定義を与えたが，上で考えた近傍をもつ linear space D は Washihara の条件をみたす事を示そう。Washihara の条件は

(R, L_1) 任意の基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)\}$ 及び $\{\mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D)\}$ に対し，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma''_i}(D)\}$ が存在して

$$\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D) + \mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D) \subseteqq \mathfrak{V}_{\gamma''_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(R, L_2) (1) 任意の基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)\}$ と任意の数 α に対して，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha\, \mathfrak{V}_{\gamma_i}(D) \subseteqq \mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(2) 任意の点 x と $\lim \alpha_i = 0$ なる数列 $\{\alpha_i\}$ に対して，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha_i x \in \mathfrak{V}_{\gamma_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(3) 任意の基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma_i}(D)\}$ と $\lim \alpha_i = 0$ なる数列 $\{\alpha_i\}$ に対して，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha_i\, \mathfrak{V}_{\gamma_i}(D) \subseteqq \mathfrak{V}_{\gamma'_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

linear space D がこの条件をみたす事を次に示す。

(R, L_1) に対して，

$\{V_{\gamma_i}(D)\}$, $\{V_{\gamma_i'}(D)\}$ を二つの任意の基本近傍列とし，$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$, $y=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k e_k$ をそれぞれ $\gamma_i>1$, $\gamma_i'>1$ なる $V_{\gamma_i}(D)$, $V_{\gamma_i'}(D)$ に属する要素とする。

$$\gamma_i''=\min\left(\gamma_i,\ \gamma_i',\ [(\gamma_i\gamma_i')(\gamma_i+\gamma_i')^{-1}]\right)\quad(\text{但し}[\ ]\text{はガウス記号})$$

とおくと，

$$\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i''}|\xi_k+\eta_k|^2\right)^{1/2}\leqq\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i''}|\xi_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i''}|\eta_k|^2\right)^{1/2}\leqq\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i}|\xi_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i'}|\eta_k|^2\right)^{1/2}$$
$$<(\gamma_i^{-1}+\gamma_i'^{-1})\leqq\gamma_i''^{-1},$$

また，$\left(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{\gamma_i''}(\xi_k+\eta_k)|^2\right)^{1/2}\leqq\left(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{\gamma_i''}\xi_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{\gamma_i''}\eta_k|^2\right)^{1/2}<2$,

$$\|A_i(x+y)\|\leqq\|A_ix\|+\|A_iy\|<2\quad\text{for }1\leqq i\leqq\gamma_i''.$$

従って　　$x+y\in V_{\gamma_i''}(1/\gamma_i'',\ 2\ ;\ D)$

即ち，　　$V_{\gamma_i}(D)+V_{\gamma_i'}(D)\subseteqq V_{\gamma_i''}(1/\gamma_i'',\ 2\ ;\ D)$

Theorem 2 を考慮すれば，証明は終った。

(R, L_2) (1) に対して，

Lemma 1 によって，$\alpha V_{\gamma_i}(D)=V_{\gamma_i}(|\alpha|/\gamma_i,\ |\alpha|\ ;\ D)$ であるから Theorem 2 によって，明かである。

(R, L_2) (2) に対して，

$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ を D に屬する任意の要素とすると，D の定義から，任意の i に対して $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^i \xi_k|^2<\infty$，且つ $\|A_i x\|<\infty$ である。一方 $\{\alpha_i\}$ は 0 に收束するから，十分大なる自然數 m_1 をとれば，

$$\sum_{k=1}^{1}|\alpha_i\xi_k|^2<1,\ \sum_{k=N}^{\infty}|\alpha_i\lambda_k\xi_k|^2<1,\ \|A_1\alpha_i x\|<1 \quad \text{for } i\geqq m_1$$

となる樣に出來る。即ち，$\alpha_i x\in V_1(D)$ for $i\geqq m_1$.

同樣にある自然數 $m_2>m_1$ をとって，

$$\sum_{k=1}^{2}|\alpha_i\xi_k|^2<2^{-2},\ \sum_{k=N}^{\infty}|\alpha_i\lambda_k^2\xi_k|^2<1,\ \|A_1\alpha_i x\|<1,\ \|A_2\alpha_i x\|<1 \quad \text{for } i\geqq m_2.$$

となる樣に出來る。即ち，$\alpha_i x\in V_2(D)$ for $i\geqq m_2$.

これを繰返して，一般に，

$$\alpha_i x\in V_j(D) \quad \text{for } i\geqq m_j$$

となる單調增加自然數列 $\{m_j\}$ を得る。そこで，$V_{\delta_i}(D)=V_0(D)$ for $1\leqq i<m_1$，$V_{\delta_i}(D)=V_1(D)$ for $m_1\leqq i<m_2$，$V_{\delta_i}(D)=V_2(D)$ for $m_2\leqq i<m_3$，…… とおくと

$$\alpha_i x\in V_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

を得る。

(R, L_2) (3) に対して，

(R, L_2) (1) によって明らかである。

かくて，上に定義した近傍をもつ linear space D は linear

ranked space である事がわかった。次に，このDはR-complete であることを示そう。

Theorem 3　$\{x_i\}$ を linear ranked space D における R-Cauchy 列とする（即ち，ある基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ があって，$x_j - x_k \in V_{\gamma_i}(D)$　for all $j, k \geqq i$）　この時，Dの中に $\{x_i\}$ の極限点 x がある。従って，linear ranked space D は R-Complete である。

（証明）　今　$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(i)} e_k$　とおく。$x_l - x_j \in V_{\gamma_i}(D)$（但し，$\gamma_i \geqq N$）とすれば

$$\|x_l - x_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)}|^2$$

$$< 1/\gamma_i^2 + \lambda_N^{-2\gamma_i} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\gamma_i} (\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)})|^2 < 1/\gamma_i^2 + \lambda_N^{-2\gamma_i}$$

また，任意の自然数 k に対して，十分大なる γ_i をとれば

$$\overline{A_k^* A_k} \in \{A_{k'}\}_{k'=1,\dots,\gamma_i}$$

と出来るから

$$\|A_k(x_l - x_j)\|^2 = (A_k^* A_k (x_l - x_j), (x_l - x_j))$$

$$\leqq \|A_k^* A_k (x_l - x_j)\| \, \|x_l - x_j\| < \|x_l - x_j\|$$

となる。これらの事は $\{x_i\}$, $\{A_k x_i\}$ は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の Cauchy 列であることを示している。従って，それぞれの

極限点x, yが$\mathfrak{H}$の中に存在する。しかるに$\mathcal{A}$に属するA_kは closed linear operator だから $x \in D(A_k)$，かつ $A_k x = y$。これが，すべてのA_k，$k=1,2\cdots$について云える。最後に，$\gamma_i \geqq N$なるiに対して，$j \geqq i$とすれば，

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n(\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)})|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqq \left(\lambda_N^n \sum_{k=1}^{N-1}|\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^n(\xi_k^{(i)}-\xi_k^{(j)})|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2\right)^{1/2}$$

$$< \lambda_N^n \gamma_i^{-1} + 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2\right)^{1/2} \quad \text{for } n=1,\cdots,\gamma_i.$$

しかるに，$x_i \in D$だから，nに対応して，ある数M_1が存在して，

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2\right)^{1/2} = \|T^n x_i\| < M_1$$

従って，$j \geqq i$なる自然数jに対して，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2 < M^2 \quad (\text{但し，} M = \lambda_N^n \gamma_i^{-1} + 1 + M_1)$$

故に，任意のmと$j \geqq i$なるjに対して，

$$\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2 < M^2$$

そこで，$x = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$とすれば，$j \to \infty$のとき，$\xi_k^{(j)} \to \xi_k$であるから，任意の$m$に対して

$$\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k^n \xi_k|^2 \leqq M^2$$

従って $$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n \xi_k|^2 \leqq M^2,$$ 故に $x \in D(T^n)$.

即ち，xは$\mathcal{A}$に属するoperatorのcommon domain Dに属す。

次の定理は linear ranked space D で点列 $\{x_i\}$ が x に収束することは，Roberts [1] の kernel topology で収束するのと，同値であることを示す。即ち nuclear space としての収束と同値である。

Theorem 4　　linear ranked space D において，点列 $\{x_i\}$ が x に収束することは，$\mathcal{A}$ に属する任意の operator A について　$\|A(x_i - x)\| \to 0$ なる事と同値である。

証明）　linear ranked space D において，$\{x_i\}$ は x に収束するとすると，ある基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して，

$$x_i - x \in V_{\gamma_i}(D) \qquad \text{for all } i$$

が成立つ。今 $x_i = \sum_{K=1}^{\infty} \xi_K^{(i)} e_K$，$x = \sum_{K=1}^{\infty} \xi_K e_K$ とおくと，

$\gamma_i \geqq N$ なる i に対しては，

$$\|x_i - x\|^2 = \sum_{K=1}^{\infty} |\xi_K^{(i)} - \xi_K|^2 \leqq \sum_{K=1}^{N-1} |\xi_K^{(i)} - \xi_K|^2 + \lambda_N^{-2\gamma_i} \sum_{K=N}^{\infty} |\lambda_K^{\gamma_i}(\xi_K^{(i)} - \xi_K)|^2$$

$$< \gamma_i^{-2} + \lambda_N^{-2\gamma_i},$$

が成立つ。従って，$i \to \infty$ とすれば　$\|x_i - x\| \to 0$.

更に，任意の自然数 h に対して，γ_i を十分大にすれば，

$$\overline{A_h^* A_h} \in \{A_{h'}\}_{h'=1,\cdots,\gamma_i}$$

と出来るので，その様な i に対しては，

$$\|A_h(x_i - x)\|^2 = (A_h^* A_h(x_i - x), (x_i - x)) \leqq \|A_h^* A_h(x_i - x)\| \|x_i - x\|$$

$$< \|x_i - x\|$$

また，任意の自然数nに対して，

$$\|T^n(x_i - x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n(\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 \leqq \lambda_N^n \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2\gamma_i+2n} |\lambda_k^{\gamma_i}(\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2$$

が成立つので，$\gamma_i > \max(n, N)$ のときは，

$$\|T^n(x_i - x)\|^2 < \lambda_N^n \gamma_i^{-2} + \lambda_N^{-2\gamma_i+2n}$$

従って，$i \to \infty$ のとき，$\mathcal{A}$に属する任意のAに対して，

$$\|A(x_i - x)\| \to 0 .$$

逆に，Dにおける点列$\{x_i\}$が$\mathcal{A}$に属する任意のAに対して，

$$\|A(x_i - x)\| \to 0 .$$

であると仮定する。十分大なる自然数m_1をとれば，$i \geqq m_1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{1} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 = \|Ix_i - Ix\|^2 < 1 ,$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k(\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 = \|Tx_i - Tx\| < 1,$$

また，$\|A_1(x_i - x)\| < 1$

と出来るから，この時は

$$x_i - x \in V_1(D) \quad \text{for } i \geqq m_1 .$$

同様にして，十分大なる自然数$m_2 > m_1$をとれば，

$$x_i - x \in V_2(D) \quad \text{for } i \geqq m_2 .$$

これを繰返す事によって，$\{x_i\}$ は linear ranked space D において，x に収束することを知る。　（証明終）

linear ranked space における有界集合の定義は[4]に示されている。即ち、linear ranked space D の subset M に対して、ある基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ とある実数列 $\{\alpha_i\}$ が存在して、

$$M \subseteqq \alpha_i V_{\gamma_i}(D) \qquad \text{for all } i$$

ならば、Mは有界集合と云われる。また、subset F の点列 $\{y_i\}$ が存在して、$y_i \to y$ のとき、$y \in \overline{F}$ であると定義し、更に $F = \overline{F}$ のとき、F を閉集合とする。また、subset E において、任意の点列 $\{y_i\}$ より適当な部分列をとれば、E の点に収束させられるとき、E を sequential compact と呼ぶ事にすれば、linear ranked space D では次の定理が成立つ。

Theorem 5　　linear ranked space D の有界閉集合は sequential compact である。

(証明)　今与えられた有界閉集合を M とすると、ある基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ とある実数列 $\{\alpha_i\}$ が存在して、

$$M \subseteqq \alpha_i V_{\gamma_i}(D) \qquad \text{for all } i$$

が成立つ。今、M に属する任意の点列を $\{x_j\}$ とし、$x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(j)} e_k$ としておく。このとき、$\gamma_i \geqq N$ なる i に対して

$$\sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(j)}|^2 < (\alpha_i \gamma_i^{-1})^2 \quad , \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\gamma_i} \xi_k^{(j)}|^2 < \alpha_i^2$$

である。従って、ある部分列 $\{x_{j_m}\}$ があって、各 k に対して

$\{\xi_K^{(j_m)}\}_m$ が収束する様に出来る。自然数 i を

$$\overline{A_1^* A_1} \in \{A_{h'}\}_{h'=1,\cdots,\gamma_i} \quad \text{且つ } \gamma_i \geqq 2$$

なる様に固定しておく。このとき次の条件をみたす様な，自然数 $l_1 > N$ が存在する。

(1) $|\xi_1^{(j_m)} - \xi_1^{(j_n)}| < 1 \qquad \text{for } m, n > l_1$

(2) $\lambda_h \to \infty$, as $h \to \infty$ だから，$m, n, h > l_1$ なる m, n, h に対して，

$$\sum_{K=N}^{\infty} |\lambda_K(\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)})|^2 \leqq \sum_{K=N}^{h-1} |\lambda_K(\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)})|^2$$
$$+ \lambda_h^{-1} \sum_{K=h}^{\infty} |\lambda_K^2(\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)})|^2 < \sum_{K=N}^{h-1} |\lambda_K(\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)})|^2$$
$$+ \lambda_h^{-1}(2\alpha_i)^2 < 1,$$

そして，$\|A_1(x_{j_m} - x_{j_n})\|^2 = (A_1^* A_1(x_{j_m} - x_{j_n}), (x_{j_m} - x_{j_n}))$

$$\leqq \|A_1^* A_1(x_{j_m} - x_{j_n})\| \left(\sum_{K=1}^{\infty} |\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq \left[\left(\sum_{K=1}^{h-1} |\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_h^{-1}\left(\sum_{K=h}^{\infty} |\lambda_K(\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\times \|A_1^* A_1(x_{j_m} - x_{j_n})\|$$
$$< \left[\left(\sum_{K=1}^{h-1} |\xi_K^{(j_m)} - \xi_K^{(j_n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_h^{-1}(2\alpha_i)\right] \times 2\alpha_i < 1.$$

従って，十分大なる自然数 l_1 をとれば，

$$x_{j_m} - x_{j_n} \in V_1(D) \qquad \text{for } m, n > l_1$$

と出来る。同様にして，十分大なる自然数 $l_2 > l_1$ をとれば

$$x_{j_m} - x_{j_n} \in V_2(D) \qquad \text{for } m, n > l_2$$

と出来る。以下同様にして $\{x_{jm}\}$ は R-Cauchy列であることがわかる。従って極限点が D の中にある。　　　　(証明終)

今後，簡単のために，原点の近傍として $\{V_i(r,\ell;D)\}$ をもつ linear ranked space D を (D, V_i) とかくことにする。

§4　The space D under new additional assumptions.

これから以降，次の2つの条件を仮定して理論を進める。

(1) nuclear operator T^{-1} のすべての固有ベクトル $\{e_k\}$ は D に含まれる。

(2) $\mathcal{A}$ に属する任意の operator A に対して，ある自然数 n とある正数 M が存在して

$$\|Ax\| \leqq M\,\|T^n x\| \qquad \text{for all } x \in D.$$

が成立つ。

さて，このとき空間 D に次の様に新しい原点の近傍を定義する。

$$V_i(r,\ell;D)=\left\{x\in D;\ \Big(\sum_{k=1}^{i}|\xi_k|^2\Big)^{1/2}<r,\ \Big(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^i\xi_k|^2\Big)^{1/2}<\ell\right\}$$

但し，$\{\xi_k\}$ は x のフーリエ係数とする。

特に，$V_i(D)=V_i(1/i,1;D)$ とおいて，これを rank i の原点の近傍ということにする。(但し $i\geqq 1$)。空間 D は rank zero の原点の近傍とし，$V_0(D)$ とかくことにする。更

に，Dの点xのrank iの近傍を$x+\mathfrak{U}_i(D)$と定義する。この近傍系をもつlinear space Dを$(D,\mathfrak{U}_i)$とかくことにすると，$(D,\mathfrak{U}_i)$はlinear ranked spaceである事は容易にわかる。実は，$(D,\mathfrak{V}_i)$において収束する点列は，$(D,\mathfrak{U}_i)$においても収束するし，逆も成立つ。

Theorem 6 　$(D,\mathfrak{U}_i)$における任意の基本近傍列$\{\mathfrak{U}_{\gamma_i}(D)\}$に対しては，$(D,\mathfrak{V}_i)$における，ある基本近傍列$\{\mathfrak{V}_{\delta_i}(D)\}$が存在して，

$$\mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \subseteqq \mathfrak{V}_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

が成立ち，逆に$(D,\mathfrak{V}_i)$における任意の基本近傍列$\{\mathfrak{V}_{\delta_i}(D)\}$に対しては

$$\mathfrak{V}_{\delta_i}(D) \subseteqq \mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。

(証明) $\gamma_i \geqq 1$なるiに対して，$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k \in \mathfrak{U}_{\gamma_i}(D)$とすれば，$\left(\sum_{k=1}^{\gamma_i}|\xi_k|^2\right)^{1/2} < \gamma_i^{-1}$，$\left(\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{\gamma_i}\xi_k|^2\right)^{1/2} < 1$が成立つ。一方，$\mathcal{A}$は*algebraより$\overline{A_1^*A_1} \in \mathcal{A}$，仮定より，ある自然数$n$とある正数Mが存在して，

$$\|A_1^*A_1x\| \leqq M\|T^n x\| \quad \text{for all } x \in D.$$

が成立つ，そこで

$$\|A_1x\|^2 = (A_1^*A_1x, x) \leqq M\|T^n x\|\,\|x\| = M\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^n\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq M\left(\sum_{k=1}^{N-1}|\xi_k|^2+\lambda_N^{-p}\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^p\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\lambda_N^n\sum_{k=1}^{N-1}|\xi_k|^2+\lambda_N^{-p}\sum_{k=N}^{\infty}|\lambda_k^{n+p}\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

よって，$\gamma_i > \max(N, n+p)$ なる i に対して，$x \in \mathfrak{U}_{\gamma_i}(D)$ とすれば
$$\|A_1 x\|^2 \leqq M(\lambda_N^n \gamma_i^{-2} + \lambda_N^{-p})$$
となるので，十分大なる自然数 m_1 をとれば，
$$\mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \subseteqq V_1(D) \quad \text{for } i \geqq m_1$$
と出来る。次に，$V_2(D)$ に対し，この議論を繰返すと，十分大なる自然数 $m_2 > m_1$ に対し
$$\mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \subseteqq V_2(D) \quad \text{for } i \geqq m_2$$
と出来る。以下同様にして，一般に，
$$\mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \subseteqq V_j(D) \quad \text{for } i \geqq m_j$$
なる自然数列 $\{m_j\}$ を得る。

今，$V_{\gamma_i}(D) = V_0(D)$ for $1 \leqq i < m_1$，$V_{\gamma_i}(D) = V_1(D)$ for $m_1 \leqq i < m_2$，$V_{\gamma_i}(D) = V_2(D)$ for $m_2 \leqq i < m_3, \cdots\cdots$

とおくと $\quad \mathfrak{U}_{\gamma_i}(D) \subseteqq V_{\gamma_i}(D) \quad$ for all i

なる基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ を得る。逆は明か。（証明終）

従って，§3において証明された Theorem 3, 4, 5 は $(D, \mathfrak{U}_i)$ においても真である。

Theorem 7 $\quad \{\mathfrak{U}_{\gamma_i}(r_i, l_i; D)\}$ を $(D, \mathfrak{U}_i)$ における原点の近傍列で次の性質をもつものとする。即ち $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots \to \infty$，$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots \to 0$，$l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_i \geqq \cdots$ 。

すると，ある原点の基本近傍列 $\{\mathcal{U}_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して，

$$\mathcal{U}_{\gamma_i}(r_i, l_i ; D) \subseteq \mathcal{U}_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i,$$

が成立つ。

（証明） Theorem 2 と同様にして証明される。

§5 The extended nuclear space

この節では，空間 $(D, \mathcal{U}_i)$ を拡大するために，新しく linear space D に，原点の近傍として $\mathcal{U}_i(r, l ; D)$ よりも弱い条件をもつ近傍 $\mathcal{W}_i(r ; D)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{W}_i(r ; D) = \left\{ x \in D \; ; \; \left(\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < r \quad \text{for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\}$$

特に，$\mathcal{W}_i(D) = \mathcal{W}_i(1/i ; D)$ for $i \geq 1$ とおいて，これを原点の rank i の近傍と呼ぶ。更に空間 D を rank zero の近傍とし，これを $\mathcal{W}_0(D)$ とかき，D の任意の点 x の rank i の近傍は $x + \mathcal{W}_i(D)$ と定義する。すると，この空間 D は linear ranked space であることが容易にわかる。この $\{\mathcal{W}_i(r ; D)\}$ を近傍系とする linear space D を $(D, \mathcal{W}_i)$ とかく。このとき $(D, \mathcal{W}_i)$ は R-complete ではない。

Lemma 2 (1) $\mathcal{W}_i(r ; D)$ は circled である。

(2) $\quad W_{i+1}(r';D) \subseteqq W_i(r;D) \qquad \text{if } r' \leqq r,$

(3) $\quad \lambda W_i(r;D) = W_i(\lambda r;D) \qquad \text{for } \lambda > 0,$

(4) $\quad W_i(r;D) + W_i(r';D) \subseteqq W_i(r+r';D)$

Theorem 8 $\{W_{\gamma_i}(r_i;D)\}$ を原点の近傍列で，次の性質をもつとする，即ち，$\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots\cdots \to \infty$，$r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots\cdots \to 0$．すると，ある原点の基本近傍列 $\{W_{\gamma_i'}(D)\}$ が存在して，

$$W_{\gamma_i}(r_i;D) \subseteqq W_{\gamma_i'}(D) \qquad \text{for all } i.$$

Definition $\{x_n\}, \{y_n\}$ を (D, W_i) における2つの R-Cauchy列とする。その時，ある基本近傍列 $\{W_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して

$$x_i - y_i \in W_{\gamma_i}(D) \qquad \text{for all } i$$

が成立つならば，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は同値であると定義する。これを $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ とかく。

上の定義の同値関係は，反射律，対称律，推移律をみたすので (D, W_i) における，すべての R-Cauchy列の全体はこの関係によつて，class分けする事が出来る。この同値類の集合を D^* とかく事にする。さて $D^* \ni \tilde{x}, \tilde{y}$ なる任意の要素に対し，$\{x_n\}\,\{y_n\}$ をそれぞれ，$\tilde{x}, \tilde{y}$ に属する R-Cauchy列 とすると $\{x_n + y_n\}$ は亦

R-Cauchy列である。今$\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$をそれぞれ, $\hat{x}$, $\hat{y}$に属するR-Cauchy列とすると, $\{x_n+y_n\}$, $\{x'_n+y'_n\}$は同値なR-Cauchy列である事がわかるので, $\{x_n+y_n\}$を含む同値類を$\hat{x}+\hat{y}$と定義する。そして, この定義は$\hat{x}$, $\hat{y}$のみに関係して, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$の選び方には無関係である。また, 同値類$\lambda\hat{x}$をR-Cauchy$\{\lambda x_n\}$を含む同値類として定義する。D^*の原点は$x_n \to 0$なるR-Cauchy列$\{x_n\}$を含む同値類である。かくて, D^*はlinear spaceであるので, D^*に近傍を定義する。

Definition　linear space D^*の原点の近傍$W_i(r; D^*)$を次の様に定義する。D^*の要素$\hat{x}$に属する, あるR-Cauchy列$\{x_n\}$に対して, $0 < r' < r$なる正数r'及び, ある自然数mが存在して,

$$x_n \in W_i(r'; D) \quad \text{if } n \geq m$$

が成立すれば$\hat{x}$は$W_i(r; D^*)$に属すると定義する。

特に$W_i(D^*) = W_i(1/i; D^*)$ for $i \geq 1$とおいて, これをD^*の原点のrank iの近傍と呼ぶ。D^*自身をrank zeroの近傍とし, W_0とかくことにし, また, $\hat{x}+W_i(D^*)$は$\hat{x}$のrank iの近傍と定める。

Lemma 3　(1) $W_i(r; D^*)$はcircledである。

(2) $\quad W_{i+1}(r'; D^*) \subseteqq W_i(r; D^*) \qquad \text{if } r' \leqq r,$

(3) $\quad \lambda W_i(r; D^*) = W_i(\lambda r; D^*) \qquad \text{for } \lambda > 0,$

(4) $\quad W_i(r; D^*) + W_i(r'; D^*) \subseteqq W_i(r+r'; D^*).$

(証明) (1) $\hat{x}$を$W_i(r; D^*)$に属する要素とする。定義から$\hat{x}$に属する，あるR-Cauchy列$\{x_n\}$に対して，$0 < r_0 < r$なる正数r_0，及び，ある自然数mが存在して

$$x_n \in W_i(r_0; D) \qquad \text{if } n \geqq m$$

が成立つ。$W_i(r_0; D)$はcircledだから，$|\lambda| \leqq 1$なる任意のλに対して

$$\lambda x_n \in W_i(r_0; D) \qquad \text{if } n \geqq m$$

従って

$$\lambda \hat{x} \in W_i(r; D^*).$$

(2) 定義より明白.

(3) $\hat{x} \in \lambda W_i(r; D^*)$ とすれば $\hat{x}/\lambda \in W_i(r; D^*)$.

従って，$\hat{x}/\lambda$に属する，あるR-Cauchy列$\{x_n/\lambda\}$に対して，$0 < r_0 < r$なる正数r_0と，ある自然数mが存在して

$$x_n/\lambda \in W_i(r_0; D) \qquad \text{if } n \geqq m$$

が成立つ。従って

$$x_n \in \lambda W_i(r_0; D) = W_i(\lambda r_0; D) \qquad \text{if } n \geqq m$$

従って $\qquad \hat{x} \in W_i(\lambda r; D^*)$

故に $\qquad \lambda W_i(r; D^*) \subseteqq W_i(\lambda r; D^*).$

逆の包含関係も，同様にして証明出来る。

(4) $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$ 且つ, $\hat{y} \in W_i(r'; D^*)$ とする。定義から, それぞれ, $\hat{x}$, $\hat{y}$ に属するR-Cauchy列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して, $0 < r_0 < r$, $0 < r_0' < r'$ なる正数 r_0, r_0' とある自然数 m が存在して, $x_n \in W_i(r_0; D)$, $y_n \in W_i(r_0'; D)$ if $n \geqq m$ が成立つ。従って $x_n + y_n \in W_i(r_0 + r_0'; D)$ if $n \geqq m$。しかるに, $\{x_n + y_n\}$ は $\hat{x} + \hat{y}$ に属するR-Cauchy列であるから

$$\hat{x} + \hat{y} \in W_i(r + r'; D^*) \qquad \text{(証明終)}$$

Theorem 9　$\{W_{\delta_i}(r_i; D^*)\}$ を, 次の性質をもつ原点の近傍列とする, 即ち, $\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_i \leqq \cdots \to \infty$, $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots \to 0$. すると, ある原点の基本近傍列 $\{W_{\delta_i'}(D^*)\}$ が存在して,

$$W_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteqq W_{\delta_i'}(D^*) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。

(証明) 仮定によって, 十分大なる自然数 m_1 をとれば

$$1 < \delta_i, \ r_i < 1 \quad \text{for } i \geqq m_1$$

となる様に出来る。このとき, 明白に

$$W_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteqq W_1(1; D^*) = W_1(D^*) \quad \text{for } i \geqq m_1.$$

また, 次に十分大なる自然数 $m_2 > m_1$ をとれば

$$2 < \delta_i, \ r_i < 1/2 \quad \text{for } i \geqq m_2$$

と出来る。この時は

$$\mathfrak{W}_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteqq \mathfrak{W}_2(1/2; D^*) = \mathfrak{W}_2(D^*) \quad \text{for } i \geqq m_2$$

以下同様にして，一般に

$$\mathfrak{W}_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteqq \mathfrak{W}_j(1/j; D^*) = \mathfrak{W}_j(D^*) \quad \text{for } i \geqq m_j$$

なる自然数列 $\{m_j\}$ を得る。そこで，$\mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*) = \mathfrak{W}_0$ for $1 \leqq i < m_1$, $\mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*) = \mathfrak{W}_1(D^*)$ for $m_1 \leqq i < m_2$, $\mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*) = \mathfrak{W}_2(D^*)$ for $m_2 \leqq i < m_3$, …… とおくと

$$\mathfrak{W}_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteqq \mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*) \quad \text{for all } i$$

なる基本近傍列 $\{\mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*)\}$ を得る。 （証明終）

さて，上の様に定義された D^* は linear ranked space となる事は容易にわかるが，R-complete なる事を次に証明する。

Theorem 10 linear ranked space D^* は R-complete である。即ち，D^* における R-Cauchy 列は D^* の中にその極限点をもつ。

（証明） $\{\hat{x}_k\}$ を D^* における R-Cauchy 列とする。即ち，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*)\}$ が存在して，

$$\hat{x}_k - \hat{x}_h \in \mathfrak{W}_{\delta_i}(D^*) \quad \text{for } k, h \geqq i.$$

今，D における R-Cauchy 列 $\{x_n^{(k)}\}_n$, $\{x_n^{(h)}\}_n$ をそれぞれ $\hat{x}_k$, $\hat{x}_h$ に属するとすると，$\{x_n^{(k)} - x_n^{(h)}\}$ は $(\hat{x}_k - \hat{x}_h)$ に属す

る R-Cauchy列である。そこで，$0 < r_0 < 1/\gamma_i$ なる正数 $r_0 = r_0(K, h)$ と，ある自然数 $m = m(K,h)$ が存在して，

$$x_n^{(K)} - x_n^{(h)} \in W_{\gamma_i}(r_0 ; D) \quad \text{for } n \geq m$$

となる。一方，$\{x_n^{(h)}\}_n$ は (D, W_i) における R-Cauchy列だから，ある基本近傍列 $\{W_{\gamma_i(k)}(D)\}$ が存在して，

$$x_n^{(k)} - x_m^{(k)} \in W_{\gamma_i(k)}(D) \quad \text{for } n, m \geq \gamma_i(k).$$

が成立つ。そこで，すべての K に対して，$\{\gamma_i(K)\}_i$ の中から，$\gamma'_K > K$, $\gamma'_K < \gamma'_{K+1}$ なる様に，γ'_K を選ぶ。今 $y_K = x_{\gamma'_K}^{(K)}$ とおくと $\{y_K\}$ は (D, W_i) における R-Cauchy 列である。何故ならば $h \geq k > i$, $n \geq \max(m(K,h), \gamma'_h, \gamma'_K)$ なる自然数 k, h, n に対して，

$$y_k - y_h = (x_{\gamma'_K}^{(K)} - x_n^{(K)}) + (x_n^{(K)} - x_n^{(h)}) + (x_n^{(h)} - x_{\gamma'_h}^{(h)})$$

$$\in W_{\gamma'_K}(D) + W_{\gamma_i}(r_0(K,h); D) + W_{\gamma'_h}(D) \subseteq W_{\gamma'_K}(D) + W_{\gamma_i}(D) + W_{\gamma'_K}(D).$$

そこで，$\gamma''_K = \min(\gamma'_K, \gamma_i)$, $r'_K = 2\gamma'^{-1}_K + \gamma_i^{-1}$ とおくと，

$$y_K - y_h \in W_{\gamma''_K}(r'_K ; D).$$

よって，$\{y_K\}$ は R-Cauchy列である事がこれから容易にわかる。さて，$\{y_K\}$ が属する同値類を $\hat{y}$ とすれば，$\hat{y}$ は $\{\hat{x}_K\}$ の極限である事を証明する。

$j \geq \gamma'_K$, $j \geq K \geq i$, $n = \max(m(j,K), \gamma'_j, \gamma'_K)$ なる十分大なる自然数 j, n に対し，

$$y_j - x_j^{(K)} = (x_{\gamma'_j}^{(j)} - x_n^{(j)}) + (x_n^{(j)} - x_n^{(K)}) + (x_n^{(K)} - x_j^{(K)})$$

$$\in W_{\gamma'_j}(D) + W_{\gamma_i}(r_0(j,K); D) + W_{\gamma'_K}(D)$$

そこで，$\gamma_k'' = \min(\gamma_k', \gamma_i)$ とおくと

$$y_j - x_j^{(k)} \in W_{\gamma_k'}(D) + W_{\gamma_i}(D) + W_{\gamma_k'}(D) \subseteq W_{\gamma_k''}(2\gamma_k'^{-1} + \gamma_i^{-1}; D)$$

従って，$\hat{y} - \hat{x}_k \in W_{\gamma_k''}(r_k; D^*)$ 但し，$r_k = 3\gamma_k'^{-1} + 2\gamma_i^{-1}$

(証明終)

Theorem 11　D^* の部分集合 D_0 を，(D, W_i) における同じ要素からなる R-Cauchy 列を含む同値類の全体とする。D から D_0 への mapping F を，D の要素 x に対し，x のみからなる R-Cauchy 列を含む同値類 $\hat{x}$ を対応させることによって定義すれば，F は bijective であって，$x \in W_i(r; D)$ ならば $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$ であり，逆も真である。

(証明) x, y を D における相異る要素とする。その時，$x_n = x$, $y_n = y$ なる 2 つの R-Cauchy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を同時に含む同値類は存在しない。何故ならば，$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を含む同値類があれば，$\{x_n\} \sim \{y_n\}$ である。従って，ある基本近傍列 $\{W_{\gamma_i}(D)\}$ があって

$$x_i - y_i \in W_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i$$

従って，$x = y$ これ不合理となるからである。次に

$x \in W_i(r; D)$ とする，$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ とおけば $\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2 < r^2$

従って $0 < r_1 < r$ なる正数 r_1 が存在して

$$\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2 < r_1^2 < r^2$$

よって，$x_n = x$ から　$x_n \in W_i(\gamma_i; D)$　故に $\hat{x} \in W_i(\gamma; D^*)$．
逆も容易に証明される。　　　　　　　　　　　　　(証明終)

Theorem 12　　D_0 は D^* で dense である。

(証明) $\hat{x}$ を D^* における任意の要素とする。そして $\{x_n\}$ を $\hat{x}$ に属する R-Cauchy 列とすると，ある基本近傍列 $\{W_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して，$n \geqq i$, $m \geqq i$ ならば，

$$x_n - x_m \in W_{\gamma_i}(D)$$

x_n のみからなる R-Cauchy 列を，$\hat{x}_n$ とすると

$$\hat{x}_n - \hat{x} \in W_{\gamma_i}(2\gamma_i^{-1}; D^*) \qquad \text{for } n \geqq i$$

これ即ち　$\hat{x}_n \to \hat{x}$　を示している。　　　　(証明終)

さて，$\hat{x}$ を D^* の任意の要素とし，$\{x_n\}$ を $\hat{x}$ に属する R-Cauchy 列とする。従って，ある基本近傍列 $\{W_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して，

$$x_n - x_m \in W_{\gamma_i}(D) \qquad \text{for } n, m \geqq i$$

が成立つ。今 $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{\gamma_i} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \gamma_i^{-2} .$$

故に，$\{\xi_1^{(n)}\}_n$ は数の Cauchy 列である。従って，極限 η_1 がある。同様にして，すべての k に対して $\{\xi_k^{(n)}\}_n$ の極限 η_k が存在する。このとき，数列 $\{\eta_k\}_k$ は $\hat{x}$ のみに関係して，$\{x_n\}$ の

とり方には無関係であることが容易にわかる。逆に，任意の数列 $\{\eta_k\}_k$ が与えられたとき，$y_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ とおくと，$\{y_n\}_n$ は $(D, \mathfrak{W}_i)$ における R-Cauchy 列である。よって $\{y_n\}$ を含む同値類を $\hat{x}$ とする。かくして，$\hat{x} \in D^*$ から数列 $\{\eta_k\}_k$ への対応は bijective である事は容易にわかる。そこで，$\{\eta_k\}_k$ を任意の数列としたとき，ideal element $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ を D に付加したものを $\hat{D}$ とすれば，$\hat{D}$ は次の Theorem 13, 14 によって R-Complete space で，そこでは D は dense となる。

Theorem 13　$\hat{x} \in D^*$ から $\hat{D}$ の ideal element $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ への上記の様に定めた対応は linear で bijective である。

さて，linear space $\hat{D}$ において，原点の近傍 $\mathfrak{W}_i(r; \hat{D})$ を次の様に定義する。

$$\mathfrak{W}_i(r; \hat{D}) = \left\{ x \in \hat{D} \,;\, \left(\sum_{k=1}^{i} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < r \quad \text{for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\}$$

特に，$\mathfrak{W}_i(\hat{D}) = \mathfrak{W}_i(1/i\,; \hat{D})$ for $i \geq 1$ とおいて，これを rank i の原点の近傍とよぶ。空間 $\hat{D}$ は rank zero の近傍であるとし $\mathfrak{W}_0(\hat{D})$ でこれを示す。$x + \mathfrak{W}_i(\hat{D})$ を $\hat{D}$ の点 x の rank i の近傍と定義する。

Theorem 14 上記の対応によって，$\hat{x} \in D^*$ に対して，$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k \in \hat{D}$ が対応するとする。このとき $\hat{x} \in \mathfrak{W}_i(r; D^*)$ ならば $y \in \mathfrak{W}_i(r; \hat{D})$ であり，逆も成立つ。

（証明）$\hat{x} \in \mathfrak{W}_i(r; D^*)$ とする。$\hat{x}$ に属する，ある R-Cauchy 列 $\{x_n\}$ に対して，ある自然数 m と，$0 < r_1 < r$ なるある正数 r_1 が存在して
$$x_n \in \mathfrak{W}_i(r_1; D) \quad \text{for } n \geq m$$
が成立つ。、$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k$ とおくと
$$\sum_{k=1}^{i} |\xi_k^{(n)}|^2 < r_1^2 < r^2 \quad \text{for } n \geq m$$
となるが，$\xi_k^{(n)} \longrightarrow \eta_k$ as $n \to \infty$ であるから，
$$\sum_{k=1}^{i} |\eta_k|^2 \leq r_1^2 < r^2$$
従って，
$$y \in \mathfrak{W}_i(r; \hat{D})$$
逆に，$y \in \mathfrak{W}_i(r; \hat{D})$ とする。$y_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k$ とし，$r_1 = \left(\sum_{k=1}^{i} |\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ とすれば，$r_1 < r$ そこで $r_2 = \frac{1}{2}(r + r_1)$ とおくと $r_1 < r_2 < r$ 故に $y_n \in \mathfrak{W}_i(r_2; D)$ for all n.
$\{y_n\}$ は $\hat{x}$ に属することは容易にわかるから $\hat{x} \in \mathfrak{W}_i(r; D^*)$

（証明終）

今後は，原点の近傍系として $\{\mathfrak{W}_i(r; \hat{D})\}$ をもつ R-Complete linear ranked space $\hat{D}$ を $(\hat{D}, \mathfrak{W}_i)$ とかき，$(D, \mathfrak{W}_i)$ の completion とよぶ。

§6 Continuous linear functional on (D, π_i)

この節では，(D, π_i) における連続線形汎関数は $\hat{D}$ の要素として表現される事を示す。

Definition f を (D, π_i) で定義された任意の線形汎関数とする。(D, π_i) における任意の収束列 $x_n \to x$ に対して，$\lim f(x_n) = f(x)$ ならば，f は連続であるという。

Theorem 15 f を (D, π_i) における連続線形汎関数とする。そのとき，ある自然数 i が存在して，

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)| \text{ は収束する。}$$

（証明） 任意の自然数 i に対し，$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|$ は収束しないと仮定する。正数 M に対し，ある自然数列 $\{n_j\}$（但し $n_0 = N$, $n_j < n_{j+1}$）が存在して，

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |\lambda_k^{-(j+2)} f(e_k)| > M \qquad \text{for every } j$$

と出来る。

そこで，
$$x_j = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \overline{f(e_k)}\, |f(e_k)|^{-1} \lambda_k^{-(j+2)} e_k$$

とおくと $x_j \in \pi_1(r_1, d; D)$ for $j \geq 0$ （但し $\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_1^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} = d^2$），$x_j \in \pi_2(r_2, d; D)$ for $j \geq 1$ （但し $\sum_{k=n_1}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_2^2$）

一般に，$x_j \in \pi_i(r_i, d; D)$ for $j \geq i-1$ （但し $\sum_{k=n_{i-1}}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_i^2$）。

従って，$x_j \to 0$ in (D, π_i)　しかしながら，$f(x_j) > M$　これは矛盾である　（証明終）

Theorem 16　fを(D, π_i)における連続線形汎関数で，ある自然数iに対して，$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|^2$が収束するものとする。この時，任意の$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in (D, \pi_i)$に対して，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$$ が成立つ．

（証明）　任意の$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in (D, \pi_i)$に対して，$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$とおくと　$x_n \to x$であるから$f(x_n) \to f(x)$.
一方　$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k)$　であるが

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k)\right| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k^{i} \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

より　$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$を得る　　（証明終）．

そこで，$\hat{D}$の要素$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$　で自然数nに対して，$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-n} \eta_k|^2 < \infty$となる$y$の全体を$L^{(n)}$とかく事にする．すると$(D, \pi_i)$における連続線形汎関数$f$に対し，$y = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k) e_k$を対応させる事によって，$(D, \pi_i)$における，すべての連続線形汎関数は$\bigcup_n L^{(n)}$と同一視することが出来る。

さて，linear space $L^{(n)}$において，原点の近傍$\pi_i^*(r, d; L^{(n)})$を次の様に定義する。

$$\mathfrak{U}_i^*(r, d; \mathbb{L}^{(n)}) = \{ y \in \mathbb{L}^{(n)};\ \left(\sum_{k=1}^{i} |\eta_k|^2\right)^{1/2} < r,\ \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n}\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < d \ \text{for } y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k \}$$

特に，$\mathfrak{U}_i^*(\mathbb{L}^{(n)}) = \mathfrak{U}_i^*(1/i, 1; \mathbb{L}^{(n)})$ for $i \geqq 1$ とおいて，これを rank i の近傍と呼ぶ。更に $\mathbb{L}^{(n)}$ を rank zero の近傍として $\mathfrak{U}_0^*(\mathbb{L}^{(n)})$ とかく。$y + \mathfrak{U}_i^*(\mathbb{L}^{(n)})$ を $\mathbb{L}^{(n)}$ の点 y の rank i の近傍と定義する。

Lemma 4 (1) $\mathfrak{U}_i^*(r, d; \mathbb{L}^{(n)})$ は circled である．

(2) $\mathfrak{U}_{i+1}^*(r', d'; \mathbb{L}^{(n)}) \subseteqq \mathfrak{U}_i^*(r, d; \mathbb{L}^{(n)})$ if $r' \leqq r$, $d' \leqq d$.

(3) $\lambda \mathfrak{U}_i^*(r, d; \mathbb{L}^{(n)}) = \mathfrak{U}_i^*(\lambda r, \lambda d; \mathbb{L}^{(n)})$ for $\lambda > 0$.

(4) $\mathfrak{U}_i^*(r, d; \mathbb{L}^{(n)}) + \mathfrak{U}_i^*(r', d'; \mathbb{L}^{(n)}) \subseteqq \mathfrak{U}_i^*(r+r', d+d'; \mathbb{L}^{(n)})$.

Theorem 17 $\{\mathfrak{U}_{\delta_i}^*(\mathbb{L}^{(n)})\}$ を $\mathbb{L}^{(n)}$ における基本近傍列とする。もし $y \in \mathfrak{U}_{\delta_i}^*(\mathbb{L}^{(n)})$ for all i ならば，$y = 0$，即ち $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ とすれば $\eta_k = 0$.

Theorem 18 $\{\mathfrak{U}_{\delta_i}^*(r_i, d_i; \mathbb{L}^{(n)})\}$ を次の性質をもつ近傍列とする。即ち，$\delta_1 \leqq \delta_2 \leqq \cdots \leqq \delta_i \leqq \cdots \to \infty$, $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots \to 0$, $d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_i \geqq \cdots \to 0$。その時，ある基本近傍列 $\{\mathfrak{U}_{\delta_i}^*(\mathbb{L}^{(n)})\}$ が存在して，$\mathfrak{U}_{\delta_i}^*(r_i, d_i; \mathbb{L}^{(n)}) \subseteqq \mathfrak{U}_{\delta_i}^*(\mathbb{L}^{(n)})$ for all i.

（証明）　明らか。

上の様に定義した近傍 $\mathfrak{U}_i^*(r,d;L^{(n)})$ をもつ linear space $L^{(n)}$ は linear ranked space である事はすぐにわかる。

さて，任意の自然数 n に対して，$L^{(n)} \subseteqq L^{(n+1)}$ であるが，ranked space の意味で inductive limit $\bigcup_n L^{(n)}$ を構成しよう。この場合，上で定義した $L^{(m)}$ における近傍 $\mathfrak{U}_i^*(r,d;L^{(m)})$ をそのまゝ，$\bigcup_n L^{(n)}$ における近傍として採用し，$\mathfrak{U}_i^*(L^{(m)})$, $i \geq 1$ を $\bigcup_n L^{(n)}$ における原点の rank i の近傍とよぶ。$\bigcup_n L^{(n)}$ 自身を rank zero の近傍とし，$\mathfrak{U}_0^*(\bigcup L^{(n)})$ とかく事にする。$\bigcup L^{(n)}$ における点 x の rank i の近傍は $x+\mathfrak{U}_i^*(L^{(m)})$ と定義する。この inductive limit $\bigcup L^{(n)}$ は linear ranked space である事は容易に証明される。次の Theorem 19,20 は inductive limit $\bigcup L^{(n)}$ における収束は，必然的に擬収束となることを示す。

Theorem 19　もし $\mathfrak{U}_i^*(r,d;L^{(n)}) \geq \mathfrak{U}_i^*(r,d';L^{(m)})$,（但し $d \geq d'$, $n \neq m$）ならば，　$n > m$。

（証明）$n < m$ とすれば矛盾となることを示す。

$d = d'$ の場合：　今自然数 N_1 を $N_1 > \max(i, N)$ なる様に定

め, $y=\sum_{K=1}^{\infty}\eta_K e_K$ を次の様な要素とする.

$$\begin{cases}\eta_{N_1}=(d/\sqrt{\lambda_{N_1}})\lambda_{N_1}^{m}\\ \eta_K=0 \qquad \text{for } K\neq N_1\end{cases}$$

このとき, $\sum_{K=1}^{i}|\eta_K|^2=0,\ \sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^{-m}\eta_K|^2=d^2\lambda_{N_1}^{-1}<d^2$

より $y\in \pi_i^*(n,d;L^{(m)})$

しかし, $\sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^{-n}\eta_K|^2=d^2\lambda_{N_1}^{2m-2n-1}>d^2$

より $y\notin \pi_i^*(n,d;L^{(m)})$

これは, 仮定に反する。

$d>d'$の場合: 十分大なる自然数N_1をとって, $\lambda_{N_1}d'^2>d^2$ ($\because \lambda_K\to\infty$, as $K\to\infty$) 且つ, $N_1>max(i,N)$としておく。

さて, $y=\sum_{K=1}^{\infty}\eta_K e_K$ を次の様な要素とする。

$$\begin{cases}\eta_{N_1}=(d'/\sqrt{\lambda_{N_1}})\lambda_{N_1}^{m}\\ \eta_K=0 \qquad \text{for } K\neq N_1\end{cases}$$

このとき, $\sum_{K=1}^{i}|\eta_K|^2=0,\ \sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^{-m}\eta_K|^2=d'^2\lambda_{N_1}^{-1}<d'^2$

より $y\in \pi_i^*(n,d';L^{(m)})$

しかし, $\sum_{K=N}^{\infty}|\lambda_K^{-n}\eta_K|^2=\lambda_{N_1}^{2m-2n-1}d'^2\geq\lambda_{N_1}d'^2>d^2$

より $y\notin \pi_i^*(n,d;L^{(m)})$

これは, 仮定に反する。

Theorem 20 $\{\pi_{\alpha_i}^*(L^{(n_i)})\}$ を $\bigcup_n L^{(n)}$ における原点の基本近傍列とすると, 即ち,

$$\begin{cases} \pi^*_{\gamma_1}(\mathsf{L}^{(n_1)}) \geqq \pi^*_{\gamma_2}(\mathsf{L}^{(n_2)}) \geqq \cdots\cdots \geqq \pi^*_{\gamma_i}(\mathsf{L}^{(n_i)}) \geqq \cdots\cdots \\ \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots\cdots \to \infty \end{cases}$$

とすると，必然的に $n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots\cdots \geqq n_i \geqq \cdots\cdots \geqq 1$ である。従って，ある自然数 j があって

$$n_j = n_{j+1} = \cdots\cdots \geqq 1$$ が成立つ。

Theorem 21　$\{\pi^*_{\gamma_i}(r_i, d_i ; \mathsf{L}^{(n_i)})\}$ を次の性質をもつ近傍列とする。

$$\begin{cases} \pi^*_{\gamma_1}(r_1, d_1 ; \mathsf{L}^{(n_1)}) \geqq \pi^*_{\gamma_2}(r_2, d_2 ; \mathsf{L}^{(n_2)}) \geqq \cdots \geqq \pi^*_{\gamma_i}(r_i, d_i ; \mathsf{L}^{(n_i)}) \geqq \cdots, \\ \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_i \leqq \cdots \to \infty, \ r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_i \geqq \cdots \to 0, \\ d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_i \geqq \cdots\cdots . \end{cases}$$

すると，ある基本近傍列 $\{\pi^*_{\gamma_i}(\mathsf{L}^{(m_i)})\}$ が存在して

$$\pi^*_{\gamma_i}(r_i, d_i ; \mathsf{L}^{(n_i)}) \leqq \pi^*_{\gamma_i}(\mathsf{L}^{(m_i)}) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。

(証明)　$\pi^*_{\gamma_i}(r_i, d_i ; \mathsf{L}^{(n_i)})$ for $\gamma_i \geqq 1$ に属する要素 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ に対しては，$\sum_{k=1}^{\gamma_i} |\eta_k|^2 < r_i^2$，$\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n_i} \eta_k|^2 < d_i^2$ が成立つ。そこで，十分大なる自然数 $m_0 = \max_i (n_i)$ をとれば

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-m_0} \eta_k|^2 < (\lambda_N^{-m_0 + n_j})^2 \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n_j} \eta_k|^2 < 1$$

と出来る。従って，十分大なる自然数 j_1 をとれば

$$\pi^*_{\gamma_i}(r_i, d_i ; \mathsf{L}^{(n_i)}) \leqq \pi^*_1(\mathsf{L}^{(m_0)}) \quad \text{for } i \geqq j_1$$

が成立つ。同様に $\mathfrak{U}_2^*(L^{(m_2)})$ に対して十分大なる自然数 $j_2 > j_1$ をとれば，$\quad \mathfrak{U}_{j_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)}) \leqq \mathfrak{U}_2^*(L^{(m_2)}) \quad$ for $i \geqq j_2$ と出来る．以下同様にして証明することが出来る（証明終）

上記の近傍をもつ linear space $\bigcup_n L^{(n)}$ を $(\cup L^{(n)}, \mathfrak{U}_i^*)$ とかくことにする。すると linear ranked space $\hat{D}$ では

$$D \subset \mathcal{H} \subset \cup L^{(n)} \subset \hat{D}$$

なる関係が成立ち，更に收束については，

(1) $x_m \to x$ in $(D, \mathfrak{U}_i)$ ならば $x_m \to x$ in $\mathcal{H}$.

(2) $x_m \to x$ in $\mathcal{H}$ ならば $x_m \to x$ in $(\cup L^{(n)}, \mathfrak{U}_i^*)$

(3) $x_m \to x$ in $(\cup L^{(n)}, \mathfrak{U}_i^*)$ ならば $x_m \to x$ in $(\hat{D}, \mathfrak{U}_i)$

が成立つ。

次の定理は各点で收束する連続線形汎関数の列は，汎関数として收束することを示す。

Theorem 22. $\{y_n\}$ を $(\bigcup_j L^{(j)}, \mathfrak{U}_i^*)$ に属する要素列（即ち，連続線形汎関数列）とする。そして $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(n)} e_k$ とおいたとき，$(D, \mathfrak{U}_i)$ の任意の点 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ に対して，$y_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \xi_k$ が收束するとすれば，実は $\{y_n\}$ は $(\cup L^{(j)}, \mathfrak{U}_i^*)$ において收束する。

(証明) linear ranked space において証明された, Banach-Steinhaus theorem [9] を使って $\lim y_n(x) = y(x)$ なる $y(x)$ は連続線形汎関数となることがわかる。一方, また linear ranked space においての一様有界性定理 [9] によって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある近傍 $\tau \mathfrak{U}_i(D) + x_0$ $(\tau > 0)$ が存在して,

$$|y_n(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \tau \mathfrak{U}_i(D) + x_0 \text{ and all } n$$

が成立つ。このとき, 一般性を失う事なく, $i > N$ と仮定出来る。そこで, $x \in \mathfrak{U}_i(D)$ に対して

$$\begin{aligned} |y_n(x)| &= |y_n(\tau^{-1}(\tau x + x_0) - \tau^{-1} x_0)| \\ &\leqq \tau^{-1} |y_n(\tau x + x_0)| + |\tau^{-1} y_n(x_0)| \\ &\leqq \tau^{-1} \varepsilon + \sup_m |\tau^{-1} y_m(x_0)| \end{aligned}$$

さて, 十分小なる $\delta > 0$ をとれば

$$\left\{ x \in D \,;\, \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \right\} \subset \mathfrak{U}_i(D)$$

と出来るので, ある正数 $M > 0$ に対して

$$|y_n(x)| \leqq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, x \in D$$

とすることが出来る。

もし $x_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{-2i} \overline{\eta_k^{(n)}} e_k$ とおくと

$$|y_n(x_m)| = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k^{-i} \eta_k^{(n)}|^2 \leqq M \left(\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k^{-i} \eta_k^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

故に
$$\left(\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k^{-i} \eta_k^{(n)}|^2\right)^{1/2} \leqq M.$$

$\eta_k^{(n)} = y_n(e_k) \longrightarrow y(e_k)$ だから

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\lambda_k^{-i}y(e_k)|^2\right)^{1/2} \leqq M$$

自然数mは任意でよいから

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^{-i}y(e_k)|^2\right)^{1/2} \leqq M.$$

同様に
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^{-i}y_k^{(n)}|^2\right)^{1/2} \leqq M$$

も得るから y_n と $y=\sum_{k=1}^{\infty}y(e_k)e_k$ は $L^{(i)}$ に属する。

$y_k^{(n)} \to y(e_k)$ であるから，自然数j_1を十分大にとれば

$$y_n - y \in \pi_1^*(1, 3M; L^{(i)}) \qquad \text{for } n \geqq j_1$$

と出来る．次に十分大なる自然数$j_2>j_1$をとれば，

$$y_n - y \in \pi_2^*(1/2, 3M; L^{(i)}) \qquad \text{for } n \geqq j_2$$

と出来る。以下これを繰返し，$y_n \to y$ in $(\cup L^{(i)}, \pi_i^*)$ なる事がわかる。

§7 Kernel theorem.

Theorem 23 $B(x,y)$を(D,π_i)における連続なbilinear formとすると，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}$のある要素，a_k, b_kとある自然数i, jが存在して，

$$B(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(T^{i+2}x, a_k)(T^{j+2}y, b_k)$$

と表現される。

(証明) 最初に，ある非負の数Mと，ある自然数i,jが存在

して $\quad |B(x,y)| \leqq M \quad$ for $x \in \pi_i(D)$, $y \in \pi_j(D)$

が成立つ事を証明しよう。もしこれが成立ぬとすれば，基本近傍列 $\{\pi_i(D)\}$ に対して，$\pi_i(D)$ に属する要素 x_i, y_i をとって

$$|B(x_i, y_i)| > i \quad \text{for all } i$$

と出来る。

今 $P_i(y) = B(x_i, y)$ とおくと，$x_i \to 0$ であるから連続線形汎関数の列 $\{P_i(y)\}$ は，任意の $y \in D$ に対して有界である。従って，linear ranked space における一様有界性定理[9] によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある近傍 $r\pi_{j_0}(D) + y_0$ $(r > 0)$ が存在して，

$$|P_i(y)| < \varepsilon \quad \text{if } y \in r\pi_{j_0}(D) + y_0 \text{ and all } i$$

が成立つ。かくて $y \in \pi_{j_0}(D)$ なる任意の y に対して

$$\begin{aligned} |B(x_i, y)| &= |B(x_i, r^{-1}(ry + y_0) - r^{-1}y_0)| \\ &\leqq r^{-1}|B(x_i, ry + y_0)| + r^{-1}|B(x_i, y_0)| \\ &\leqq r^{-1}\varepsilon + r^{-1}\sup_n |P_n(y_0)| \end{aligned}$$

これは $\exists y_i \in \pi_i(D)$

$$|B(x_i, y_i)| > i \quad \text{for all } i \quad \text{に反する。}$$

よって，ある非負の数 M と，ある自然数 i, j が存在して，

$$|B(x, y)| \leqq M \quad \text{for } x \in \pi_i(D),\ y \in \pi_j(D).$$

が成立つ。さて，$K > \max(i, N)$ に対しては，

$$\{\lambda_K^{-(i+1)} e_K\} \subset \pi_i(D)$$

また，$h > max(j, N)$ に対しては

$$\{\lambda_h^{-(j+1)} e_h\} \subset \mathfrak{U}_j(D)$$

従って，$|B(\lambda_k^{-(i+1)} e_k, \lambda_h^{-(j+1)} e_h)| \leqq M.$

従って，$\sum_{k,h=1}^{\infty} \lambda_k^{-(i+2)} \lambda_h^{-(j+2)} |B(e_k, e_h)| \leqq \sum_{k,h=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \lambda_h^{-1} M$

故に，$\sum_{h=1}^{\infty} |\lambda_h^{-(j+2)} B(e_k, e_h)|$ は収束する。

$\lambda_h = |\mu_h|^{-1}$ であったから，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ に，ある要素 b_k が存在して，$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n^{j+2} B(e_k, e_h) = b_k$ となる。一方任意の $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$，$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ に対して，$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$，$y_m = \sum_{k=1}^{m} \eta_k e_k$ とおくと，$x_n \to x$，$y_m \to y$ であるから

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= \sum_{k,h=1}^{\infty} \xi_k \eta_h B(e_k, e_h) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{h=1}^{\infty} \mu_h^{-(j+2)} \eta_h \mu_h^{(j+2)} B(e_k, e_h) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (T^{j+2} y, b_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-(i+2)} \xi_k \mu_k^{(i+2)} (T^{j+2} y, b_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (T^{i+2} x, a_k)(T^{j+2} y, b_k)
\end{aligned}$$

但し，$a_k = \mu_k^{(i+2)} e_k$ とする。

§8 Measure

この節では，linear ranked space $\hat{D}$ に Gaussian measure を定義する。

Definition　Aを$\{e_k\}_{k=1,\cdots,n}$から生成されたn次元の部分空間E_nにおけるBorel setとする。次の様に集合Zを定義する。

$$Z=\left\{x\in\hat{D}\ ;\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in A \quad \text{for } x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\right\}$$

そして,これを部分空間E_nにおけるBorel base AをもつBorel cylinder set Zとよぶ。

上に定義したcylinder setsは集合の代数となる。即ち
(1) 任意のBorel cylinder setのcomplementはBorel cylinder setである。
(2) 任意の2つのBorel cylinder setsの共通部分はBorel cylinder setである。
(3) 任意の2つのBorel cylinder setsの和はBorel cylinder setである。

さて, Borel cylinder setのclassを拡張しよう。部分空間E_iにおけるBorel baseをもつBorel cylinder setのclassを$\mathcal{R}_i$とかく事にする。次に$\bigcup_i \mathcal{R}_i$に属する要素のcountable unionと,そのcomplementの全体を$\mathcal{B}_0$とかく事にする。そして$\mathcal{B}_0$を0番目のclassのBorel setと

よぶ。α を Ω より小なる順序数としたとき，α より小なる任意の順序数 β に対して，β 番目の class の Borel set は既に定義されたとする。その時 $\mathcal{B}_\alpha$ を α より小なる順序数の class の要素の countable union と，その complement の全体とする。この様にして，Ω より小なるすべての順序数に対して $\mathcal{B}_\alpha$ が定義される。そして $\bigcup_{\alpha<\Omega}\mathcal{B}_\alpha$ の要素を Borel cylinder set の Borel set とよぶことにする。

さて，Borel cylinder set に Gaussian measure を定義する。

Definition　部分空間 E_n における Borel base A をもつ Borel cylinder set Z に対し，次の様に Gaussian measure を定義する。

$$\mu(Z)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{x_n\in A}\exp\left(-2^{-1}\sum_{k=1}^{n}|(x_n,e_k)|^2\right)d_nx$$

但し，x_n は $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ の E_n への projection，即ち $x_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，$d_nx$ は $(x,x)_n=\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2$ に関する Lebesgue measure. $\mu(Z)$ を Z の Gaussian measure とよぶ。

Lemma 5　$\{\alpha_k\}$，$\alpha_k>0$ を任意の数列とする。その時 $S=\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k(\alpha_k)$，但し $S_k(\alpha_k)=\{x\in\hat{D}\,;\,|\xi_k|\leqq\alpha_k \text{ for } x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\}$，

とおくと，Sは seminorm $g_K(x)=|\xi_K|$ に関して sequential compact である。

(証明) $\{x_\nu\}$ を S の中の無限集合とする。すると，ある部分列 $\{x_{1,\nu}\}$ が存在して $\{(x_{1,\nu}, e_1)\}$ が収束する様に出来る。また，$\{x_{1,\nu}\}$ の部分列 $\{x_{2,\nu}\}$ が存在して，$\{(x_{2,\nu}, e_2)\}$ が収束する様に出来る。かくて，この操作を続けて，その対角線にとった部分列 $\{x_{\nu,\nu}\}$ は，すべての seminorm に関して収束する．そして $\beta_K = \lim_{\nu\to\infty}(x_{\nu,\nu}, e_K)$ とおくと，$x=\sum_{K=1}^{\infty}\beta_K e_K$ はその極限で，しかも $x \in S$.　　(証明終)

Theorem 24　$\{Z_K\}$ を open cylinder set の列で $\hat{D}=\bigcup_K Z_K$ とする。そのとき，$\sum_{K=1}^{\infty}\mu(Z_K) \geqq 1$.

(証明)　$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\{\alpha_K\}$，$(\alpha_K>0)$ を次の様な数列とする。

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{|(x,e_K)|>\alpha_K} exp(-2^{-1}|(x,e_K)|^2)\,(dx)^{(K)} < \varepsilon/2^K$$

但し，$(dx)^{(K)}$ は $|(x,e_K)|$ に関する Lebesgue measure.

このとき，$S=\bigcap_K S_K(\alpha_K)$，$S_K(\alpha_K)=\{x\in\hat{D};\ |(x,e_K)|\leqq\alpha_K\}$. とおくと　$S\subset\bigcup_{K=1}^{\infty}Z_K$ である．一方，Z_K は open base をもつ cylinder set 即ち Z_K は weak topology で open set であ

る。従って，SはZ_Kの有限ケでcoverされる。それを$Z_{n_1}\cdots\cdots$ Z_{n_k}とすれば，$S\subset\bigcup_{j=1}^{k} Z_{n_j}$

今$\bigcup_{j=1}^{k} Z_{n_j}$をZとかく事にすれば，$Z_K$はある有限次元部分空間$E_{n_K}$におけるBorel baseをもつので，Zは$m=\max_{j=1,\cdots k}(n_{n_j})$なる有限次元部分空間$E_m$のBorel set Aをbaseにする。

そこで$\hat{D}$からE_mへのprojectionをPとすれば

$$P(S)\subset A$$

また，$P(S)=\bigcap_{K=1}^{m}P(S_K(\alpha_K))$であるから，Aと$P(S_K(\alpha_K))$の$E_m$に関する補集合を$A'$，$S'_K(\alpha_K)$とかくと

$$A'\subset\bigcup_{K=1}^{m}S'_K(\alpha_K)$$

E_mにおける$S'_K(\alpha_K)$をbaseにもつcylinder setを$S'_K(\alpha_K)^*$とかくと

$$\mu\left(\bigcup_{K=1}^{m}S'_K(\alpha_K)^*\right)\geqq\mu(\hat{D}-Z)=1-\mu(Z)$$

μの有限加法性から，

$$\sum_{K=1}^{m}\mu(S'_K(\alpha_K)^*)\geqq1-\mu(Z)=1-\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k}Z_{n_j}\right)$$
$$\geqq1-\sum_{j=1}^{k}\mu(Z_{n_j})$$

仮定から

$$\mu(S'_K(\alpha_K)^*)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{|(x,e_K)|>\alpha_K}\exp(-2^{-1}|(x,e_K)|^2)(dx)^{(1)}<\varepsilon/2^K$$

故に
$$\sum_{K=1}^{m}(\varepsilon/2^K)\geqq1-\sum_{j=1}^{k}\mu(Z_{n_j})$$
$$\varepsilon>1-\sum_{j=1}^{k}\mu(Z_{n_j})$$

従って、 $\sum_{j=1}^{h} \mu(Z_{n_j}) > 1 - \varepsilon$

εは任意であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqq 1$$ (証明終)

Theorem 25. Gaussian measure μ が countably additive である必要且十分な条件は $\mathfrak{H} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ となる様な、互に素な Borel cylinder set の列 $\{Z_k\}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$$

となることである。

(証明) 十分であることのみを証明する。Zを cylinder set とし、$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ を互に素な cylinder set Z_k への分解であるとする。すると

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{H} - Z) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right)$$

が成立つ。$\mathfrak{H} - Z$ も cylinder set だから、仮定より

$$\mu(\mathfrak{H} - Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$$

μの有限加法性より

$$\mu(\mathfrak{H} - Z) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right)$$

従って $$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k).$$

Theorem 26 Gaussian measure μ が countably additiveである必要且十分な条件は $\hat{\mathfrak{H}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}Z_k$ なる様なBorel cylinder setの列$\{Z_k\}$に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)\geqq 1$$

となることである。

(証明) 十分であることのみを証明する。今互に素なBorel cylinder setの列$\{Z_k\}$をとる。(但し, $\hat{\mathfrak{H}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}Z_k$).

μの有限加法性より $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)\leqq 1$

一方この定理の仮定より

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)\geqq 1$$

従って $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(Z_k)=1$. (証明終)

Lemma 6 Xを$\hat{\mathfrak{H}}$の部分集合であって, E_nへのprojection A_nはBorel setであるとする。そしてZ_nをBorel base A_nをもつBorel cylinder setとすると,

$$\mu(X)=\lim_{n\to\infty}\mu(Z_n)$$

が成立つ。

(証明) 仮定によって,次の式が成立つ.

$$Z_1=\{x\in\hat{\mathfrak{H}};\ \xi_1e_1\in A_1 \text{ for } x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k\}$$

$$Z_2=\{x\in\hat{\mathfrak{H}};\ \xi_1e_1+\xi_2e_2\in A_2 \text{ for } x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_ke_k\}$$

一般に $Z_n=\{x\in\hat{\mathfrak{H}};\ \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in A_n \quad \text{for } x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\}$.

従って $X=\bigcap_{n=1}^{\infty}Z_n$, 故に $X'=\bigcup_{n=1}^{\infty}Z_n'$.

$$\mu(X')=\mu(Z_1')+\mu(Z_2'-Z_1')+\cdots+\mu(Z_n'-Z_{n-1}')+\cdots$$

$$1-\mu(X)=\mu(Z_1')+\mu(Z_2'\cap Z_1)+\cdots+\mu(Z_n'\cap Z_{n-1})+\cdots$$

しかるに, $\mu(Z_2)+\mu(Z_2')=1$

$$\mu(Z_2)+\mu(Z_2'\cap Z_1)+\mu(Z_2'\cap Z_1')=1$$

$Z_2'\supset Z_1'$ より $\mu(Z_2)=1-\mu(Z_1')-\mu(Z_2'\cap Z_1)$

一般に $\mu(Z_n)=1-\mu(Z_1')-\cdots-\mu(Z_n'\cap Z_{n-1})$

従って, $\mu(X)=\lim_{n\to\infty}\mu(Z_n)$ (証明終)

Theorem 27 $\mu(X)=0$ ならば, $\mu(X+e_h)=0$.

(証明) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\mu(X+e_h)<\varepsilon$ となることを証明する。$\alpha_k>0$ を

$$\begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_{|(x,e_k)|>\alpha_k}\exp(-2^{-1}|(x,e_k)|^2)\,(dx)^{(k)}<(\varepsilon/2^k) \\ \text{但し } (dx)^{(k)} \text{ は } |(x,e_k)| \text{ に関する Lebesgue measure} \end{cases}$$

を満足する実数とする。

$S=\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k(\alpha_k)$, 但し $S_k(\alpha_k)=\{x\in\hat{\mathfrak{H}};\ |(x,e_k)|\leqq\alpha_k\}$ とすれば

$$\mu(\hat{\mathfrak{H}}-S)=\mu(\hat{\mathfrak{H}}-\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k(\alpha_k))\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon/2^k=\varepsilon$$

今 $S_1 = S - e_k$, $X_1 = X \cap S_1$, $X_2 = X - X_1$ とおく． y を $X_2 + e_k$ に属する要素とすると，

$$y - e_k \in X_2 = X \cap (\hat{D} - S_1)$$

従って， $y - e_k \in \hat{D} - S_1$

これより $X_2 + e_k \subset \hat{D} - S$ を得る

よって $\mu(X_2 + e_k) \leqq \mu(\hat{D} - S) < \varepsilon$.

また，X_1 の部分空間 E_n への projection を A_n とし，A_n を base とする cylinder set を Z_n とする。すると

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots\cdots \supset Z_n \supset \cdots\cdots \supset X_1$$

従って， $\mu(Z_n) \longrightarrow \mu(X_1) = 0$

よって， $Z_1 + e_k \supset Z_2 + e_k \supset \cdots \supset Z_n + e_k \supset \cdots \supset X_1 + e_k$

$$\mu(Z_n + e_k) \geqq \mu(X_1 + e_k)$$

さて $X_1 = X \cap S_1 \subset S_1$ だから，$n > k$ なる自然数 n に対しては

$$Z_n \subset \left[\bigcap_{i=1}^{k-1} S_i(\alpha_i)\right] \cap \{x \in \hat{D}; |(x+e_k, e_k)| \leqq \alpha_k\} \cap \left[\bigcap_{i=k+1}^{n} S_i(\alpha_i)\right]$$

従って，

$$\mu(Z_n + e_k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n + e_k} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2\right) d_n x$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} |(x, e_i)|^2 + |(x+e_k, e_k)|^2 + \sum_{i=k+1}^{n} |(x, e_i)|^2\right)\right] d_n x$$

$$\leqq \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2\right) d_n x\right] e^{+\alpha_k + \frac{1}{2}}$$

$$= (e^{+\alpha_n + \frac{1}{2}}) \mu(Z_n)$$

従って　　$\mu(X_1 + e_k) = 0.$

よって、　$\mu(X + e_k) = \mu(X_1 + e_k) + \mu(X_2 + e_k) < \varepsilon$　を得る

（証明終）

文　　献

[1] J.E. Roberts : Rigged Hilbert spaces in quantum mechanics. Commun. Math. Phys.3,98-119 (1966).

[2] K. Kunugi : Sur les espaces completes et régulièrement complete.I. Proc. Japan Acad.,30,553-556 (1954).

[3] ———— : Sur la méthode des espaces rangés.I,II.Proc. Japan Acad.,42,318-322,549-554 (1966).

[4] M. Washihara : On ranked spaces and linearity. Proc. Japan Acad.,43,584-589 (1967).

[5] I.M. Gel'fand and N.Y. Vilenkin : Generalized Functions, Vol.4 (1964).

[6] A. Pietsch : Nuclear locally convex spaces, (1972).

[7] Y. Nagakura : The theory of nuclear spaces treated by the method of ranked space. I,II,III,IV.Proc. Japan Acad.,47,337-341,342-345,870-874,875-879 (1971).

[8] ———— : The theory of nuclear spaces treated by the method of ranked space.V,VI,VII. Proc. Japan Acad.,48,110-115,221-226,394-397 (1972).

[9] ———— : On Banach-Steinhaus theorem. Proc. Japan Acad.,49,333-336 (1973).