数理解析研究所講究録
第 208 巻 1974 年 88-103

場の理論におけるハミルトニアンの正準変換

阪府大 工　　宮武　修

要約：　こゝで主としてとり扱かう対象は，点状核子と相互作用をしている3次元空間におけるスカラー中間子の場である．核子は空間に固定されていて，spin 及び isospin の自由度をもつが，励起状態をもたないとする．一般に場の全ハミルトニアンを $H=H^0+gH'$ と書き，これに次々に正準変換を施し，Hをできる丈け対角形にもつてゆくことを試みる．これらの正準変換で用いられるユニタリ作用素は，普通の時間をふくまない摂動級数から導かれるものである．Nを1つの正整数とし，Hにn回正準変換を施して H_n が得られたとすると，H_n は $H_n=H^0+W^{(N)}+R^{(N)}$ の形にかゝれる．こゝでnはNによってきまる正整数，$W^{(N)}$ はgについてN次の多項式でエネルギーに対して対角形であり，$R^{(N)}$ は $O(g^{N+1})$ である．$W^{(N)}$ はC−数と核子間のポテンシヤルとエネルギー保存の散乱に寄与する作用素とから成る．以上の一般論を展開し

たあとで，これをスカラー中間子の場に適用して次の諸問題をあつかう．1° 新しく得られる真空状態に関する H の期待値を計算する，2° 2次及び3次の散乱行列要素を算出する．核子をはじめから点状とすると，発散の困難がおこるから，吾々はまず，運動量を cut-off して諸公式を誘導し，そのあとで cut-off をとり除くことにする．

§1．序

中性スカラー中間子場が空間に固定された核子と相互作用をしている場合には，その全ハミルトニアン H は適当な正準変換によって容易に対角形にすることができる[1]．しかし核子が spin や isospin をもっている場合には，H の対角化は簡単にできない．この研究の目的は，このように簡単に対角化できない H に順次に正準変換をほどこして，出来るだけ対角形に近い作用素をつくって行こうとするものである．n 個のユニタリ作用素 U, U_1, ……, U_{n-1} を使って，H が次々に H_1, H_2, …, H_n に変換されたとする：

$$H_1 = U^{-1} H U, \quad H_2 = U_1^{-1} H_1 U_1, \cdots, H_n = U_{n-1}^{-1} H_{n-1} U_{n-1}, \quad (1.1)$$

こゝで U, U_1, …, U_{n-1} は摂動級数をもとにして作られたものである．さて $\lim_{n\to\infty} H_n = H_\infty$ は結合定数 g に関してべき展開可能かというと，一般には不可能である．しかしその場合

でも，g に関する漸近級数としての意味をもつことがある．

Friedrichs[2] 等は $U^+HU^-=H^0$，$U^-U^+=1$ なる $U^\pm$ を逐次近似で求めようとした．吾々の場合 $\mathcal{U}_{n-1}=UU_1\cdots U_{n-1}$ とおくと $\mathcal{U}_{n-1}$ はユニタリで

$$H_n=\mathcal{U}_{n-1}^{-1}H\,\mathcal{U}_{n-1}=H^0+W^{(N)}+R^{(N)} \qquad (1.2)$$

とかゝれる．$W^{(N)}$ は対角形で g に関して N 次，$R^{(N)}$ は残余で $O(g^{N+1})$，N は正整数，n は N によってきまる正整数である．散乱その他実際計算には $W^{(N)}$ を用いて行われる．

§2. 簡単なモデル

§3で述べられる一般論は，以下に述べる2つのモデルに適用される（§4以下）．用いられる記号は参考文献3），4）による．

1） 中性中間子の場

固定核子の位置を x_n とすると，古典波動方程式は

$$(\Box-\mu^2)\varphi=g\sum_n\delta(x-x_n) \qquad (2.1)$$

であたえられる．中間子場が体積 V の立方体に関して周期的であるとすると，全ハミルトニアン H は次のようにかゝれる．

$$H=H^0+gH', \qquad (2.2)$$

$$H^0=\sum_k H_k^0=\sum_k\frac{1}{2}(p_k^*p_k+\omega_k^2q_k^*q_k)=\sum_k\omega_k(a_k^*a_k+\tfrac{1}{2}),$$

$$H'=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_kV_k=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a_kV_k+a_k^*V_k^*),$$

$$V_k=\sum_n e^{ikx_n},$$

こゝで $k=\mathbf{K}$, $kx=(kx)=\mathbf{K}\mathbf{x}$, $\omega_k=\sqrt{\mathbf{K}^2+\mu^2}$.

2) isovector中間子場

Hは(2.2)の形にかゝれ，第n核子のspinをσ_n，isospinを$\tau_n^{(\lambda)}$，$\lambda=1, 2, 3$とすると

$$H^0=\sum_{\lambda k}\frac{1}{2}\left(p_{\lambda k}^* p_{\lambda k}+\omega_k^2 q_{\lambda k}^* q_{\lambda k}\right)=\sum_{\lambda k}\omega_k\left(a_{\lambda k}^* a_{\lambda k}+\frac{1}{2}\right),$$

$$H'=\sum_{\lambda k}\sqrt{2\omega_k}\,V_{\lambda k}\,q_{\lambda k}=\sum_{\lambda k}\left(V_{\lambda k}\,a_{\lambda k}+V_{\lambda k}^*\,a_{\lambda k}^*\right)$$

$$V_{\lambda k}=\sum_n V_{\lambda k n}=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_n \tau_n^{(\lambda)}(\sigma_n k)\frac{e^{ikx_n}}{\sqrt{2\omega_k}}.$$

§3. 一般論

全ハミルトニアン$H=H^0+gH'$において，H'にふくまれる中間子の運動量はcut-offされている．したがってH', Hはともに，H^0の固有ベクトル$|m\rangle$ではられるヒルバート空間$\mathfrak{H}(H^0)$で自己共役である．H^0, Hの固有値方程式は

$$H^0|m\rangle=E_m^0|m\rangle, \tag{3.1}$$

$$H\Phi_m=E_m\Phi_m \tag{3.2}$$

とかゝれ，正規直交条件$\langle m|n\rangle=\Phi_m^*\Phi_n=\delta_{mn}$が満足されているものとする．いまtime-independentな摂動展開

$$\Phi_m=|m\rangle+g\sum_n\frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m^0-E_n^0}|n\rangle+\cdots \tag{3.3}$$

を参考にして作用素

$$B(gH') = \sum_{mn} \frac{|n\rangle\langle n|gH'|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \qquad (3.4)$$

を作ってみると，反対称条件 $B^* = -B$ が成立することが分かるので，$B(gH')$をつかってユニタリ作用素

$$U = U_0 = \exp(B(gH')) \qquad (3.5)$$

を定義することができる．但し，（3.3）が意味をもつためにはH'は条件：

$$E_m^0 - E_n^0 = 0 \text{ のとき } \langle m|H'|n\rangle = 0 \qquad (3.6)$$

を満足しなければならない．さてUをつかった展開

$$U|m\rangle = |m\rangle + \frac{g}{1!}\sum_n \frac{\langle n|H'|m\rangle}{E_m^0 - E_n^0}|n\rangle + \cdots\cdots \qquad (3.7)$$

は（3.3）と右辺の級数が第2項まで一致する．

吾々はこれからHの正準変換に移るのであるが，そのために次の2つの定理を述べておく．

定理1．Vは作用素

$$B(V) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \qquad (3.8)$$

が定義できるような作用素である．このとき次の式がえられる：

$$[B(V), H^0] = V \qquad (3.9)$$

証明．

$$B(V)H^0 - H^0 B(V) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} E_m^0$$

$$-\sum_{mn} E_n^0 \frac{|n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} = \sum_{mn} |n\rangle\langle n|V|m\rangle\langle m| = V$$

定理2．Vは自己共役作用素で（3．8）によつて反対称な$B(V)$が定義できるものとする．またWは任意の作用素である．$H = H^0 + V + W$とおくとき次の展開式がえられる：

$$e^{-B(V)} H e^{B(V)} = H^0 + W - \frac{1}{2!}[B(V), V] + \frac{2}{3!}[B(V), [B(V), V]]$$
$$-\frac{3}{4!}[B(V), [B(V), [B(V), V]]] + \cdots\cdot$$
$$-\frac{1}{1!}[B(V), W] + \frac{1}{2!}[B(V), [B(V), W]] - \frac{1}{3!}\cdots\cdots \quad (3.10)$$

証明．公式[5)]

$$e^{i\lambda B} A e^{-i\lambda B} = A + \frac{i\lambda}{1!}[B, A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[B, [B, A]] + \cdots\cdots \quad (3.11)$$

と，（3．9）を使えばよい．

定理2において$W = 0$とし，$B(V)$として（3.5）の$B(gH')$を用いると全ハミルトニアンHの第1回目の正準変換が行われる：

$$H_1 = U^{-1} H U = H^0 - \frac{1}{2!}T_2 + \frac{2}{3!}T_3 + \cdots\cdot + (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}T_n + \cdots\cdot \quad (3.12)$$

但しT_nはn重交換子で

$$T_n = [B(gH'), [B(gH'), [\cdots, [B(gH'), gH']\cdots]]]. \quad (3.13)$$

運動量の cut-off が行われているから，gH'も$B(gH')$も有限個の発生，消滅演算子a_k^*，a_kの1次結合である．従って，

T_n は n 個の a_k, a_k^* の積の有限和である.

次に2回目の正準変換を行うために定理3を述べる:

<u>定理3</u>. C は p 個の消滅演算子 a_k と $q=n-p$ 個の発生演算子 a_k^* の積であって, a_{k_u} が m_u 個, $a_{l_v}^*$ が n_v 個ふくまれているとする. 任意の2つの状態 $|i\rangle$, $|f\rangle$ のエネルギーをそれぞれ E_i^o, E_f^o としたとき, 行列要素 $\langle f|C|i\rangle$ が0にならないためには, 等式

$$E_f^o - E_i^o = S \tag{3.14}$$

が成りたつことが必要である. こゝに S は

$$S = -\sum_{u=1}^{p} m_u \omega_{k_u} + \sum_{v=1}^{q} n_v \omega_{l_v} \tag{3.15}$$

であたえられ, $|i\rangle$, $|f\rangle$ には無関係, C だけに依存する.

証明は容易だから省略する.

<u>定義</u>. 消滅・発生演算子 a_k, a_k^* の積 C に付随してきまる S の大きさによつて, 次の3つのクラスを定義する. こゝで ε は任意の正数である. class (W) は $S=0$ なる C の集り, class (V) は $|S|>\varepsilon$ なる C の集り, class (R) は $S\neq 0$ で $|S|\leqq\varepsilon$ なる C の集りである.

N を一定の正整数とするとき, 任意の整数 n ($\leqq N$) に対する T_n は有限個の C をもつ. そのうちのある C は class(R) に属する. しかし ε を十分小さくすると, class (R) にぞくする C をすべて class (V) に属するようにできる. このように

して，εを十分小さくとつて，class(R) にぞくするCはすべてT_n $(n>N)$のみに含まれるようにしておく．そうすると級数(3.12)は次のように書かれる：

$$H_1 = H^0 - \frac{1}{2!}(W_1^{(2)} + V_1^{(2)}) + \frac{2}{3!}(W_1^{(3)} + V_1^{(3)})$$
$$- \frac{N-1}{N!}(W_1^{(N)} + V_1^{(N)}) + \frac{N}{(N+1)!}T_{N+1} - \cdots\cdots$$
$$= H^0 + W_1 + V_1 + R_1 \tag{3.16}$$

こゝでNは偶数にとつてあり

$$W_1 = -\frac{1}{2!}W_1^{(2)} + \frac{2}{3!}W_1^{(3)} - \cdots\cdots - \frac{N-1}{N!}W_1^{(N)},$$
$$V_1 = -\frac{1}{2!}V_1^{(2)} + \frac{2}{3!}V_1^{(3)} - \cdots\cdots - \frac{N-1}{N!}V_1^{(N)}, \tag{3.17}$$
$$R_1 = \frac{N}{(N+1)!}T_{N+1} - \frac{N+1}{(N+2)!}T_{N+2} + \cdots\cdots$$

$W_1^{(m)}$はW－型，V_1はV－型のCの集りである．W_1，V_1，R_1はそれぞれ自己共役である．

以上の準備のもとに2回目の正準変換を行なう．(3.17)のV_1はV－型であるから，反対称作用素

$$B(V_1) = \sum_{mn} \frac{|n\rangle\langle n|V_1|m\rangle\langle m|}{E_m^0 - E_n^0} \tag{3.18}$$

と，これにともなうユニタリ作用素$U_1 = \exp(B(V_1))$とが定義できる．このU_1を用いて(3.16)のH_1を変換すると，定理2によつて次のH_2がえられる：

$$H_2 = U_1^{-1}H_1U_1 = H^0 + W_1 + R_1 - \frac{1}{2!}[B(V_1), V_1] + \frac{2}{3!}\cdots\cdots$$

$$- [B(V_1), W_1] + \frac{1}{2!}[B(V_1), [B(V_1), W_1]] - \cdots$$

$$- [B(V_1), R_1] + \frac{1}{2!}[B(V_1), [B(V_1), R_1]] - \cdots \tag{3.19}$$

$$= H^0 + W_1 + W_2 + V_2 + R_2 . \tag{3.20}$$

こゝで W_2, V_2, R_2 のきめ方は次の通りである：(3.19) において，$O(g^{N+1})$ なる位数をもつ項はすべて R_2 に入れる．2行目にある $[R(V_1), W_1]$ は V_2 に入れる．残りの

$$\begin{aligned}&[B(V_1), V_1], \quad [B(V_1), [B(V_1), V_1]], \cdots \\ &[B(V_1), [B(V_1), W_1]], \cdots\end{aligned} \tag{3.21}$$

はいづれも N 次以下であって，これらに含まれる各単項は class (W), class (V) のいづれかに属するように ε を小さくとっておく．すぐ分かるように W_2, V_2 はいづれも g^4 からはじまり，R_2 は g^{N+1} からはじまる．

次に3回目の正準変換に移る．(3.20) の V_2 は自己共役で V-型である．したがって，反対称作用素 $B(V_2)$ を使ってユニタリ作用素 $U_2 = \exp(B(V_2))$ が定義できる．これから

$$\begin{aligned}H_3 = U_2^{-1} H_2 U_2 = H^0 + W_1 + W_2 + R_2 - \frac{1}{2!}[B(V_2), V_2] + \frac{2}{3!} \cdots\cdots \\ - [B(V_2), W_1] + \frac{1}{2!}[B(V_2), [B(V_2), W_1]] - \cdots \\ - [B(V_2), W_2] + \frac{1}{2!}[B(V_2), [B(V_2), W_2]] - \cdots \\ - [B(V_2), R_2] + \frac{1}{2!}[B(V_2), [B(V_2), R_2]] - \cdots\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$= H^0 + W_1 + W_2 + W_3 + V_3 + R_3 .$$

W_3 , V_3 , R_3 をきめる要領は W_2, V_2, R_2 をきめるときの要領と同じである.

このようにして, n 回目の正準変換の結果は次のように書くことができる:

$$H_n = U_{n-1}^{-1} H_{n-1} U_{n-1} = H^0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n + V_n + R_n . \quad (3.23)$$

こゝで W_k は W－型の単項式, V_n は V－型の単項式の有限和である. $W_1, W_2, \cdots, W_n, V_n$ の g についての最高べきはいづれも N であるが, 最低べキについては, W_1 は 2, W_k $(k \geqq 2)$ は $4(k-1)$, V_k は $2k$ である. したがって $n = N/2 + 1$ とおくと (3.23) は次のようにかゝれる:

$$\begin{aligned} H_n &= H^0 + W_1 + W_2 + \cdots + R^{(N)} \\ &= H^0 + W^{(N)} + R^{(N)} \end{aligned} \qquad (3.24)$$

こゝで $W^{(N)} = W_1 + W_2 + \cdots$ で $R^{(N)}$ は $O(g^{N+1})$ である. (3.24) が応用上大切な式であるが, 次の事実は重要である: $W^{(N)}$ において g^2 の項は W_1 だけにあらわれ, g^4 の項は $W_1 + W_2$ だけにあらわれる等々.

これまで行った n 回の正準変換をひとまとめにして行うことにすると, $H_n = \mathcal{U}_{n-1}^{-1} H \,\mathcal{U}_{n-1}$ とかゝれる. こゝで $\mathcal{U}_{n-1} = U U_1 U_2 \cdots U_{n-1}$ はユニタリである. したがって, もとの固有値方程式 (3.2) は $\mathcal{U}_{n-1} H_n \mathcal{U}_{n-1}^{-1} \Phi_m = E_m \Phi_m$, すなわち

$$(\mathcal{U}_{n-1} H^0 \mathcal{U}_{n-1}^{-1} + \mathcal{U}_{n-1}(W^{(N)} + R^{(N)})\mathcal{U}_{n-1}^{-1})\Phi_m = E_m \Phi_m \quad (3.25)$$

とかいれる．この方程式において $\mathcal{U}_{n-1} H^0 \mathcal{U}_{n-1}^{-1}$ は新しい無摂動ハミルトニアンとみなされ，したがつて $\mathcal{U}_{n-1}|m\rangle$ は新しい基礎ベクトルである．（3．25）の左辺の第2項は新しい相互作用項である．一般にもとの場の作用素A──たとえば a_k，a_k^* 等──は新しい座標系では $\bar{A} = \mathcal{U}_{n-1} A \mathcal{U}_{n-1}^{-1}$ でおきかえられる．尚，もとの全ハミルトニアンHの新しい真空状態に関する期待値 は $\langle 0|H_n|0\rangle = \langle H_n\rangle_0$ であたえられ，新しい2つの状態 $\mathcal{U}_{n-1}|l\rangle$，$\mathcal{U}_{n-1}|m\rangle$ に関する，新しい相互作用項の行列要素は $\langle m|W^{(N)} + R^{(N)}|l\rangle$ であたえられることが分かる．

吾々はこゝで3つの注意を述べておく．

N．B．1．H_n の自己共役性と U_n のユニタリ性．

cut-off の操作で，Hが自己共役で，Uがユニタリであることは明らかである．V_{n-1} は自己共役である．何となれば V_{n-1} は a_k, a_k^* の積から成る単項式と，それのエルミット共役な単項式を含み，しかもこれら単項式の有限和だからである．このことから U_{n-1} はユニタリとなり，従つて H_n の自己共役性が導かれる．故に帰納法によって H_{n-1}，U_{n-1} が所期の性質をもつことが帰結される．

N．B．2．$R^{(N)}$ は n，$N\to\infty$ に対して0になるかどうかは

分からない．もし $\lim_{n\to\infty} H_n = H_\infty$ とおいて

$$H_\infty = H^0 + W_1 + W_2 + \cdots \tag{3.26}$$

とかゝれて，これが収束すると仮定すると，H_∞，したがって H の固有値は $g=0$ の近傍で g のベキ級数に展開できることになり．通常このことは期待できない．故に $n, N\to\infty$ に対して $R^{(N)}$ は 0 にならないのが普通である．

N．B．3．この論文であつかうスカラー中間子の場合には正則摂動の理論が適用できて[7] $n, N\to\infty$ に対して $R^{(N)}\to 0$ となることが期待される．

いづれにしても，$m<N$ のとき，m 次の過程の計算をしようとする時には，$R^{(N)}$ の有無にかゝわらず，$W^{(N)}$ の中から g^m の項だけをひろい出して計算すればよい．

§4．中性中間子の場合への応用

このときは

$$B(H') = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} V_k^* p_k = -\frac{1}{\sqrt{2V}} \sum_k V_k^* \omega_k^{-\frac{3}{2}} (a_k^* - a_k)$$

となり，

$$H_1 = U^{-1} H U = H^0 + W_1 = H^0 - \frac{g^2}{2} \sum_{n,n'} u(x_n - x_{n'})$$

がえられて１回の正準変換で H_1 は対角化されている．こゝで

$$u(x) = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ikx}}{\omega_k^2}.$$

この場合には，cut-off をとり除くと $\mathfrak{h}(H_0)$ と $\mathfrak{h}(H)$ とが直交

すること，また核子による中間子の散乱は起らないことなどが結論される．

§5．Isovector スカラー中間子への応用．

この場合には一挙にHを対角化するユニタリ作用素を見出すことは困難である．§2であたえたHに§3の理論を適用すると次の諸結果がえられる．くわしい計算は省略する．

(1)

$$B(H') = i\sum_{\lambda k}\frac{1}{\omega_k}\sqrt{\frac{2}{\omega_k}}V^*_{\lambda k}p_{\lambda k} = \sum_{\lambda k}\frac{1}{\omega_k}\left(V_{\lambda k}a_{\lambda k} - V^*_{\lambda k}a^*_{\lambda k}\right)$$

(2) 核子が1個，空間の原点に固定しているとき2次の近似で

$$\langle H_n\rangle_0 = -\frac{3g^2}{2V}\sum_k\frac{k^2}{\omega_k^2}.$$

(3) 運動量の cut-off が行われているとき $\langle H_1\rangle_0$ は有限である．

(4) (2)の条件のもとで，4次の近似では

$$\langle H_n\rangle_0 = -\frac{3g^2}{2V}\sum_k\frac{k^2}{\omega_k^2}$$
$$+\frac{3}{4}\left(\frac{g}{\sqrt{2V}}\right)^4\sum_{kk'}\frac{\omega_k+\omega_{k'}}{(\omega_k\omega_{k'})^3}\Big\{\left(3k^2k'^2+(kk')^2-(k\times k')^2\right)$$
$$-2\left(\frac{\omega_k-\omega_{k'}}{\omega_k+\omega_{k'}}\right)^2\left(2(kk')^2+(k\times k')^2\right)\Big\}.$$

(5) $|k|>K$ なる k をすべて cut-off すると

$$|\langle H_n\rangle_0| \sim \frac{-1}{2\pi^2}K^3 + \frac{\delta}{6\pi^4}K^5,$$

δ は小なる正数である．

(6) 2次の散乱の行列要素

$$p\pi_k^- \rightarrow p\pi_{k'}^- \quad : \quad -\frac{g^2}{V}\frac{k^2}{\omega_k^2}(\cos\theta + i\sin\theta\cdot n\sigma)$$

$$p\pi_k^- \rightarrow n\pi_{k'}^0 \quad : \quad -\frac{g^2}{V}\frac{k^2}{\omega_k^2}\,2\cos\theta$$

$$p\pi_k^+ \rightarrow p\pi_{k'}^+ \quad : \quad -\frac{g^2}{V}\frac{k^2}{\omega_k^2}(\cos\theta - i\sin\theta\cdot n\sigma),$$

こゝで

$$K'K = k'k\cos\theta \quad , \quad K\times K' = k'k\sin\theta\cdot n.$$

尚3次の散乱行列要素はたとえば

$$\pi_{k_0}^+ + n \rightarrow p + \pi_{k_0'}^0 + \pi_{k_0''}^0$$

では次のようになる：

$$\frac{4ig^3}{V\sqrt{V}}\frac{1}{(\omega_{k_0''}\omega_{k_0'}\omega_{k_0})^{\frac{3}{2}}}\times\Big\{\omega_{k_0''}\big[(k_0'k_0'')(\sigma k_0)-(k_0k_0')(\sigma k_0'')$$

$$-(k_0k_0')(\sigma k_0'')\big]+\omega_{k_0'}\big[(k_0'k_0'')(\sigma k_0)-(k_0k_0')(\sigma k_0'')-(k_0k_0')(\sigma k_0'')\big]$$

$$+\omega_{k_0}\big[(k_0''k_0)(\sigma k_0')+(k_0'k_0)(\sigma k_0'')\big]\Big\}.$$

これら散乱の問題では中間状態を考える必要はない．$W^{(N)}$ はつねにエネルギーに関して対角形であるからである．

付録

級数（3．26）が収束しない例を考察しよう．その簡単な例

は非調和振動子

$$H = H^0 + gH' = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + gx^4$$

であたえられる．$g \geqq 0$ のとき H の固有値は点スペクトルをなすが，$g < 0$ のときは点スペクトルをもたない．故に $g=0$ は固有値の特異点である．このことは別の見地からも結論できる[8]．ところで $x = i(a - a^*)/\sqrt{2}$ とおいて H を

$$H = a^*a + \frac{1}{2}(a - a^*)^4 = H^0 + gW_1 + gV_1 \qquad (A.1)$$

と書いてみる．こゝで W_1 は対角形で V_1 は非対角形である．すると本文のやり方で $B(gV_1)$ とこれに付随するユニタリ作用素 $U = \exp(B(gV_1))$ が定義できて，正準変換

$$H_1 = U^{-1}HU = H^0 + gW_1 - \frac{1}{2}[B(gV_1), gV_1] + \cdots$$

$$- \frac{1}{1!}[B(gV_1), gW_1] + \cdots \qquad (A.2)$$

が行われる．以下本文にあるような正準変換をくり返すのであるが，これを無限に続行して (3.26) のような級数をつくったとしても，それは，$g=0$ における特異点のために発散する．しかし g が正で十分小さいとき (A.2) のはじめの2項の和 $H^0 + gW_1$ の固有値は H の固有値に十分良い近似で接近している．とくに H の小さい固有値ほどその近似がよろしい．その証明は省略するが，H の固有値を WKB 法で求めてみてもそうなっていることが分かる．

参考文献

1) O. Miyatake, J. Inst. Polytech., Osaka City Univ. 3 (1952), 145 ; L. van Hove, Physica 18 (1952), 145

2) K. Friedrichs, Perturbation of Spectra in Hilbert Space, (Am. Math. Soc. Povidence, 1965)

3) G. Wentzel, Quantum Theory of Fields (Interscience Publishers, INC., New York 1949)

4) G. C. Wick, Rev. Mod. Phys. 27 (1955), 339

5) S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory (Row, Peterson, and Company, Evanton, Illinois 1961) p. 174

6) O. Miyatake, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 328

7) Y. Kato, Prog. Theor. Phys., 26 (1961), 99 ; N. Mugibayashi and Y. Kato, Prog. Theor. Phys., 31 (1964), 300

8) F. R. Halpern, Journ. Math. Phys., 14 (1973), 219