数理解析研究所講究録
第 210 巻 1974 年 17-31

非有界作用素の作る algebras

東北大 教養　御園生 善尚

§1 序

Powers [2] は $*$-algebra の Hilbert 空間上への必ずしも有界でない作用素の作る algebra への表現を考察しているが，その主な結果は $*$-表現についてである。この小論の目的の一つは，一般な表現に対してその共役表現を考えることにより，$*$-表現の共役表現の共役表現を考え，これが $*$-表現であることを示すことである。（定理 2.9） Powers の定義によれば，表現された algebra の commutant は，一般の場合には必ずしも algebra にならない．目的の他の一つは，異なる定義を与えることにより，algebra となる commutant を考察し，共役表現の commutant 等との関係を調べることである．（定理 3.7）

§2 共役表現

以下考察する Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の作用素は必ずしも有界性を仮定しないが，その定義域はすべて$\mathfrak{H}$で稠密であるものとする．$\mathfrak{H}$上の作用素 A に対して，$\mathfrak{D}(A)$ によりその定義域を表わすものとする．

つぎの (i), (ii), (iii) をみたす $*$-operation をもつ，複素数体上の algebra $\mathfrak{A}$ を $*$-algebra という：

(i) $A^{**}=A$,

(ii) $(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$,

(iii) $(AB)^*=B^*A^*$.

ここに $A, B\in\mathfrak{A}$ で，α, β は複素数である．以下考える $*$-algebra はすべて単位元 I をもつと仮定する．

<u>定義 2.1</u>　Algebra $\mathfrak{A}$ の各元 A に対して，Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の作用素 $\pi(A)$ が対応し，共<u>通</u>の稠密な定義域 $\mathfrak{D}(\pi)$ をもち，かつつぎの条件をみたすとき，π を $\mathfrak{A}$ の$\mathfrak{H}$上への表現という．

(1) $\pi(I)$ は$\mathfrak{H}$上の恒等作用素である．

(2) 任意の $A, B\in\mathfrak{A}$, $f\in\mathfrak{D}(\pi)$ および複素数 α, β に対して

$$\pi(\alpha A+\beta B)=\alpha\pi(A)+\beta\pi(B)$$

(3) 任意の $A, B\in\mathfrak{A}$, $f\in\mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$\pi(A)\mathfrak{D}(\pi)\subset\mathfrak{D}(\pi),\quad \pi(A)\pi(B)f=\pi(AB)f$$

<u>定義 2.2</u>　π_1, π_2 を algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とする．$\mathcal{D}(\pi_1) \supset \mathcal{D}(\pi_2)$ で，かつ任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して

$$\pi_1(A) \supset \pi_2(A)$$

であるとき，π_1 を π_2 の拡大であるといい，$\pi_1 \supset \pi_2$ とかく．

π を algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とし，S を $\mathfrak{A}$ の任意の有限部分集合とするとき

$$\| f \|_S = \sum_{A \in S} \| \pi(A) f \|, \qquad f \in \mathcal{D}(\pi)$$

により，$\mathcal{D}(\pi)$ 上に semi-norm $\| \cdot \|_S$ が定義される．

<u>定義 2.3</u>　上の semi-norm により導入される $\mathcal{D}(\pi)$ 上の位相に関して $\mathcal{D}(\pi)$ が完備であるとき，π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への閉表現という．

任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\mathcal{D}(\pi(A))$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\pi(A)^*$ が定義される．いま

$$\mathcal{D}(\pi^*) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{D}(\pi(A)^*)$$

とすれば，$\mathcal{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ の線形部分集合で，

$$\pi^*(A) f = \pi(A^*)^* f \qquad (f \in \mathcal{D}(\pi^*))$$

により，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{H}$ 上の作用素への写像 π^* が定義される．$\mathcal{D}(\pi)$ は $\mathfrak{H}$ で必ずしも稠密ではないので，π^* は定義 2.1 の

意味での$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上の表現にならない．これに関して，つぎの補題がなりたつ．

<u>補題 2.4</u>　$\mathcal{D}(\pi^*)$が$\mathfrak{H}$で稠密ならば，π^*は$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上への閉表現である．

証明　(1)，(2)がなりたつことは容易にわかる．(3)を示すために，任意の$A\in\mathfrak{A}$に対して$\pi^*(A)\mathcal{D}(\pi^*)\subset\mathcal{D}(\pi^*)$であることを示そう．$f\in\mathcal{D}(\pi^*)$，$B\in\mathfrak{A}$とするとき，任意の$g\in\mathcal{D}(\pi)$に対して

$$
\begin{aligned}
|(\pi^*(A)f,\ \pi(B)g)| &= |(\pi(A^*)^*f,\ \pi(B)g)| \\
&= |(f,\ \pi(A^*)\pi(B)g)| \\
&= |(f,\ \pi(A^*B)g)| \\
&= |(\pi(A^*B)^*f,\ g)| \\
&\leqq \|\pi(A^*B)^*f\|\cdot\|g\|
\end{aligned}
$$

$g\in\mathcal{D}(\pi)$は任意であったから，$\pi^*(A)f\in\mathcal{D}(\pi(B)^*)$．ゆえに

$$
\pi^*(A)f\in\bigcap_{B\in\mathfrak{A}}\mathcal{D}(\pi(B)^*)=\mathcal{D}(\pi^*).
$$

すなわち$\pi^*(A)\mathcal{D}(\pi^*)\subset\mathcal{D}(\pi^*)$が示された．(3)の後半がなりたつことは容易に示される．ゆえにπ^*は$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上への表現である．

つぎにπ^*が閉表現であることを示そう．$\{f_\alpha\}$を定義2.3で考えた位相に関する$\mathcal{D}(\pi^*)$の *Cauchy net* であるとする．

$\{f_\alpha\}$ が $\mathfrak{H}$ で通常の位相に関して Cauchy net であることは明らかである．ゆえに $f_\alpha \to f$ となる $f \in \mathfrak{H}$ が存在する．同様に $\{\pi(A)^* f_\alpha\}$ も $\mathfrak{H}$ における Cauchy net である．$\pi(A)^*$ は閉作用素であるから，$f \in \mathfrak{D}(\pi(A)^*)$ でかつ $\pi(A)^* f_\alpha \to \pi(A)^* f$．$A \in \mathfrak{A}$ は任意であるから $f \in \mathfrak{D}(\pi^*)$ で，$\mathfrak{A}$ の任意の有限集合 S に対して

$$\sum_{A \in S} \| \pi^*(A)(f_\alpha - f) \| \to 0$$

である．すなわち $\mathfrak{D}(\pi^*)$ は定義 2.3 の位相で完備であり，π^* が閉表現であることが示された．

この補題により，つぎの定義が可能である．

<u>定義 2.5</u>　$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるとき，π^* を π の共役表現といい，$\pi = \pi^*$ をみたす表現を自己共役表現という．

<u>補題 2.6</u>　π_1, π_2 を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現でかつ $\pi_1 \subset \pi_2$ とする．もし $\mathfrak{D}(\pi_2^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密ならば $\pi_1^* \supset \pi_2^*$ である．

証明　仮定から，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi_1(A) \subset \pi_2(A)$．ゆえに $\pi_1(A)^* \supset \pi_2(A)^*$．したがって

$$\mathfrak{D}(\pi_1^*) = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi_1(A)^*) \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi_2(A)^*) = \mathfrak{D}(\pi_2^*).$$

$\mathfrak{D}(\pi_2^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\mathfrak{D}(\pi_1^*)$ も $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに共役表現 π_1^*, π_2^* が考えられる．π_1^* が π_2^* の拡大であ

ることは明らかであろう．

補題 2.7　$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるとき，π^* の共役表現 π^{**} は π の閉拡大である．

証明　$A \in \mathfrak{A}$ とする．$\mathfrak{D}(\pi^*)$ が $\mathfrak{H}$ で稠密であるから，$\mathfrak{D}(\pi(A)^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに $\pi(A)^{**}$ が存在して，$\pi(A)^{**} = \overline{\pi(A)}$．一方 $\pi^*(A^*) \subset \pi(A)^*$ であるから $\pi^*(A^*)^* \supset \pi(A)^{**}$ である．ゆえに

$$\mathfrak{D}(\pi^{**}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi^*(A^*)^*) \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)^{**}) \supset \mathfrak{D}(\pi).$$

すなわち $\mathfrak{D}(\pi^{**})$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに補題 2.4 から π^{**} は $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への閉表現である．また，任意の $A \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$\pi(A)f = \pi(A)^{**}f = \pi^*(A^*)^*f = \pi^{**}(A)f$$

ゆえに π^{**} は π の拡大である．

Powers [2] により，つぎの定義をする．

定義 2.8　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現とする．任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi(A^*) \subset \pi(A)^*$ をみたすとき，π を $*$－表現またはエルミート表現という．

Powers は共役表現を $*$－表現に対してのみ考察している．われわれの共役表現に関する定義は，容易にわかるように，$*$－表現の場合は Powers の定義と一致する．

$*$-表現に関してつぎの定理がなりたつ．

<u>定理 2.9</u>　π を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき，π^{**} はまた $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現である．

証明　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき

$$\mathfrak{D}(\pi^*) = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)^*) \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}(\pi(A)) = \mathfrak{D}(\pi)$$

ゆえに $\mathfrak{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．したがって，補題 2.7 の証明からわかるように $\mathfrak{D}(\pi^{**}) \supset \mathfrak{D}(\pi)$ であり，$\mathfrak{D}(\pi^{**})$ は $\mathfrak{H}$ で稠密である．ゆえに π^{**} の共役表現 π^{***} が考えられる．補題 2.7 から

$$\pi^{**} \supset \pi \quad , \quad \pi^{***} \supset \pi^*$$

である．ゆえに補題 2.6 から

$$\pi^{***} \subset \pi^*$$

をうる．ゆえに $\pi^* = \pi^{***}$．一方 π が $*$-表現であるから，$\pi \subset \pi^*$ で，補題 2.6 より $\pi^* \supset \pi^{**}$ である．したがって

$$\pi^{**} \subset \pi^{***}$$

すなわち π^{**} は $*$-表現である．

定理の証明からつぎの系をうる．

<u>系 2.10</u>　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき，$\pi^* = \pi^{***}$ である．さらに π^* は π^{**} の閉拡大である．

§3 $\pi(\mathfrak{A})$ の commutants

π を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への表現とする。以下では条件：

$$\overline{\mathfrak{D}(\pi^*)} = \mathfrak{H}$$

を仮定する。π が $*$-表現のときは，定理 2.9 の証明から，この条件はみたされている。

<u>定義 3.1</u>　任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi)$ および $g \in \mathfrak{D}(\pi^*)$ に対して

$$(C\pi(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^*(A^*)g)$$

をみたす $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素 C の集合を $(\mathfrak{A}, \pi)'$ であらわす。また任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f, g \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$(C\pi(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi(A^*)g)$$

をみたす $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の集合を $\pi(\mathfrak{A})'$ であらわす。

π が $*$-表現であるとき，$\pi(\mathfrak{A})'$ の定義は Powers の定義と一致し，さらに $(\mathfrak{A}, \pi)' \subset \pi(\mathfrak{A})'$ である。$(\mathfrak{A}, \pi)'$，$\pi(\mathfrak{A})'$ に関してつぎがなりたつことは容易にわかる。

(i)　$(\mathfrak{A}, \pi)'$，$\pi(\mathfrak{A})'$ は $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ の線形部分集合である。

(ii)　$(\mathfrak{A}, \pi)'$，$\pi(\mathfrak{A})'$ は弱閉である。

(iii)　$C \in \pi(\mathfrak{A})'$ ならば $C^* \in \pi(\mathfrak{A})'$ である。

<u>補題 3.2</u>　$C \in (\mathfrak{A}, \pi)'$ ならば $C\mathfrak{D}(\pi) \subset \mathfrak{D}(\pi^{**})$ で，任意の $A \in \mathfrak{A}$，$f \in \mathfrak{D}(\pi)$ に対して

$$C\pi(A)f = \pi^{**}(A)Cf$$

証明　仮定から，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f\in\mathfrak{D}(\pi)$ および $g\in\mathfrak{D}(\pi^*)$ に対して

$$(C\pi(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^*(A^*)g)$$

ゆえに

$$|(C\pi(A)f,\ g)| \leqq \|C\pi(A)f\|\cdot\|g\|$$

したがって $Cf\in\mathfrak{D}(\pi^*(A^*)^*)$．$A$ は任意であったから $Cf\in\mathfrak{D}(\pi^{**})$，さらに

$$\begin{aligned}(C\pi(A)f,\ g) &= ((\pi^*(A^*))^*Cf,\ g)\\ &= (\pi^{**}(A)Cf,\ g)\end{aligned}$$

$\mathfrak{D}(\pi^*)$ は $\mathfrak{H}$ で稠密であるから

$$C\pi(A)f = \pi^{**}(A)Cf$$

<u>補題 3.3</u>　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき，つぎの結果がなりたつ．

(1)　任意の $A\in\mathfrak{A}$，$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ に対して $C\pi^*(A)\subset\pi^*(A)C$．

(2)　任意の $A\in\mathfrak{A}$，$C\in(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ に対して $C\pi^{**}(A)\subset\pi^{**}(A)C$．

(3)　$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)' \iff C^*\in(\mathfrak{A},\pi^{**})'$

(4)　$(\mathfrak{A},\pi^*)'$，$(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は algebra である．

証明　系 2.10 から $\pi^*=\pi^{***}$，ゆえに $\pi^{**}=\pi^{****}$．したがって，(1)，(2) は補題 3.2 から明らかである．

(3) を示そう．$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ とすれば，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f\in$

$\mathcal{D}(\pi^*)$ および $g\in\mathcal{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^*(A^*)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A)g)$$

ゆえに

$$(\pi^*(A^*)f,\ C^*g) = (f,\ C^*\pi^{**}(A)g)$$

$\pi^* = \pi^{***}$ であるから

$$(C^*\pi^{**}(A)g,\ f) = (C^*g,\ \pi^{***}(A^*)f)$$

ゆえに $C^*\in(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ が示された．逆も同様である．

(4)を示すために，$C_1,C_2\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ とし，$A,\ f,\ g$ を上のようにとれば

$$\begin{aligned}(C_1C_2\pi^*(A)f,\ g) &= (C_1\pi^*(A)C_2f,\ g)\\ &= (\pi^*(A)C_1C_2f,\ g)\\ &= (C_1C_2f,\ \pi^*(A)^*g)\\ &= (C_1C_2f,\ \pi^{**}(A^*)g)\end{aligned}$$

すなわち $C_1C_2\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ であり，$(\mathfrak{A},\pi^*)'$ は *algebra* である．$(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ が *algebra* であることも同様に示される．

<u>補題 3.4</u>　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき，$(\mathfrak{A},\pi^*)'\subset\pi^{**}(\mathfrak{A})'$，$(\mathfrak{A},\pi^{**})'\subset\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ で，$(\mathfrak{A},\pi^*)'\cap(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は *von Neumann algebra* である．

証明　$C\in(\mathfrak{A},\pi^*)'$ とすれば，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f\in\mathcal{D}(\pi^*)$ および $g\in\mathcal{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^*(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

系 2.10 から π^* は π^{**} の拡大であるから，任意の $A\in\mathfrak{A}$，$f, g\in\mathfrak{D}(\pi^{**})$ に対して

$$(C\pi^{**}(A)f,\ g) = (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

すなわち，$C\in\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ である．ゆえに

$$(\mathfrak{A},\pi^*)' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$$

が示された．$(\mathfrak{A},\pi^{**})' \subset \pi^{**}(\mathfrak{A})'$ であることも同様に示される．

$(\mathfrak{A},\pi^*)'$，$(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は弱閉であるから，$(\mathfrak{A},\pi^*)'\wedge(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は弱閉である．また，補題 3.3 から $(\mathfrak{A},\pi^*)'\wedge(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ が自己共役な algebra であることも容易にわかる．したがって $(\mathfrak{A},\pi^*)'\wedge(\mathfrak{A},\pi^{**})'$ は von Neumann algebra である．

<u>定義 3.5</u>　π を $\mathfrak{A}$ の $\mathfrak{H}$ 上への表現とし，$A\in\mathfrak{A}$ に対して $\overline{\pi(A)}$ の極分解を $\overline{\pi(A)} = V_{\pi(A)}|\overline{\pi(A)}|$ であらわす．いま

$$|\overline{\pi(A)}| = \int_0^\infty \lambda\, dE_{\pi(A)}(\lambda)$$

を $|\overline{\pi(A)}|$ のスペクトル分解とするとき

$$\{V_{\pi(A)},\ E_{\pi(A)}(\lambda)\ |\ A\in\mathfrak{A}\}$$

により生成される von Neumann algebra を $R(\mathfrak{A},\pi)$ で表わすことにする．

定義から容易にわかるように，任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して，

$$\overline{\pi(A)}\ \eta\ R(\mathfrak{A},\pi),\qquad \pi(A)^*\ \eta\ R(\mathfrak{A},\pi)$$

が [1] の意味でなりたつ.

補題 3.6　$C \in R(\mathfrak{A}, \pi)'$ であるための必要十分条件は, 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して C が $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換なことである.

証明　$C \in R(\mathfrak{A}, \pi)'$ とすれば, 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して C が $\pi(A)$ および $\pi(A)^*$ と可換なことは明らかである.

逆に, C が任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換であるとする. $\pi(A)^* = \overline{\pi(A)}^*$ であるから, C は $\overline{\pi(A)}^*\overline{\pi(A)}$ と可換で, したがって $|\overline{\pi(A)}|$ と可換である. ゆえに C は $E_{\pi(A)}(\lambda)$ と可換である. また C^* が $|\pi(A)|$ と可換であることも容易にわかる. つぎに C が $V_{\pi(A)}$ と可換であることを示そう. $V_{\pi(A)}$ は $|\overline{\pi(A)}|$ の range の閉包 $\overline{R(|\pi(A)|)}$ から $\overline{\pi(A)}$ の range の閉包 $\overline{R(\overline{\pi(A)})}$ への等距離作用素で, $f \in \mathfrak{D}(\overline{\pi(A)})$ とするとき

$$C V_{\pi(A)}|\overline{\pi(A)}|f = C\,\overline{\pi(A)}f = \overline{\pi(A)}\,Cf,$$

$$V_{\pi(A)}C|\overline{\pi(A)}|f = V_{\pi(A)}|\overline{\pi(A)}|Cf = \overline{\pi(A)}\,Cf.$$

ゆえに

$$C V_{\pi(A)}|\overline{\pi(A)}|f = V_{\pi(A)}C|\overline{\pi(A)}|f$$

すなわち, $\overline{R(|\pi(A)|)}$ 上で $C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)}C$ がなりたつ. $g \in \overline{R(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$, $f \in \mathfrak{D}(|\overline{\pi(A)}|)$ とすれば

$$(Cg, |\overline{\pi(A)}|f) = (g, C^*|\overline{\pi(A)}|f)$$

$$= (g, |\overline{\pi(A)}| C^* f) = 0$$

ゆえに $Cg \in \overline{\mathcal{R}(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$. したがって

$$V_{\pi(A)} C g = 0$$

一方, $V_{\pi(A)} g = 0$ であるから

$$C V_{\pi(A)} g = 0$$

ゆえに $\overline{\mathcal{R}(|\overline{\pi(A)}|)}^{\perp}$ 上で $C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C$ である. 以上から $\mathfrak{H}$ 上で

$$C V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C$$

C が $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換なとき, C^* も $\overline{\pi(A)}$ および $\pi(A)^*$ と可換であるから, $C^* V_{\pi(A)} = V_{\pi(A)} C^*$. ゆえに

$$C V_{\pi(A)}^* = V_{\pi(A)}^* C$$

以上から $C \in R(\mathfrak{A}, \pi)'$ が示された.

<u>定理 3.7</u>　π を $*$-algebra $\mathfrak{A}$ の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上への $*$-表現とするとき, $R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$, $R(\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ および $(\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ は互いに一致してかつ $\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ に含まれる.

証明　$C \in R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$ とすれば, 補題 3.6 から任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して C は $\overline{\pi^*(A)}$ および $\pi^*(A)^*$ と可換である. ゆえに任意の $f \in \mathcal{D}(\pi^*)$, $g \in \mathcal{D}(\pi^{**})$ に対して

$$\begin{aligned}(C \pi^*(A) f, g) &= (C \overline{\pi^*(A)} f, g) \\ &= (\overline{\pi^*(A)} C f, g) \\ &= (C f, \pi^*(A)^* g)\end{aligned}$$

$$= (Cf,\ \pi^{**}(A^*)g)$$

ゆえに $C \in (\mathfrak{A}, \pi^*)'$. 同様にして, $C \in (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ をうる. したがって

$$R(\mathfrak{A}, \pi^*)' \subset (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

逆に, $C \in (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ とすれば, 補題 3.3 から C は任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して $\pi^*(A)$ と可換である. したがって $\overline{\pi^*(A)}$ と可換である. $C^* \in (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$ であるから, C^* は $\pi^*(A)$ と可換である. ゆえに C は $\pi^*(A)^*$ と可換である. したがって, 補題 3.6 から $C \in R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$ である. すなわち

$$(\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})' \subset R(\mathfrak{A}, \pi^*)'$$

ゆえに

$$R(\mathfrak{A}, \pi^*)' = (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

である. 同様にして

$$R(\mathfrak{A}, \pi^{**})' = (\mathfrak{A}, \pi^*)' \cap (\mathfrak{A}, \pi^{**})'$$

である. これらが $\pi^{**}(\mathfrak{A})'$ に含まれることは補題 3.4 から明らかである.

文　献

[1] F. Murray and J. von Neumann, Rings of operators, Ann. Math., vol. 37 (1936), pp. 116 - 229

[2] R. T. Powers, Self-adjoint algebras of unbounded

operators, Comm. Math. Phys., vol. 21 (1971), pp. 85 – 124.