数理解析研究所講究録
第210巻 1974年 61-66



# Connes の新しい crossed product と integrable representation について

天王寺高校　　榎本雅俊

最近、Connes がいくつかの興味ある概念を crossed product と関連して展開していますので、ここではそれについて、簡単に紹介したいと思います.

先ず、Connes は新しく crossed product を次の様に導入しています.

(Def. 1) $G$ を locally compact group with the left Haar measure $dg$ とし，$\lambda$ を $G$ の left regular representation とする．$M$ を von Neumann algebra，$\sigma$ を $G$ から $M$ への Connes の意味での representation (i.e., $G$ から $M$ の automorphisms 全体の作る group への $\sigma$-weakly continuous homomorphism) とする．この時，$M \otimes_\sigma G$ (crossed product of $M$ by $\sigma$) を、次の set で Def. する.

$\{ y \in M \otimes \mathcal{L}(L^2(G)) ; (\sigma_g \otimes A\lambda(g)) y = y \text{ for } {}^\forall g \in G \}$. (但し，$A\lambda(g)(x) = \lambda(g) x \lambda(g)^{-1}$ (ここで，$x \in \mathcal{L}(L^2(G))$).

この様に crossed product を新しく Def. すると．従来のもの

との関係が問題になるが、discreteの場合には、このDef. はもとのcrossed productと一致する。continuousの場合には、locally compact abelian groupの時に一致する。この事実を使うと次のpropositionが簡単に示される。

(Prop. 2) $M$をtype I factor、$\sigma$をlocally compact abelian group $G$から$M$へのrepresentationとする。この時、$M \otimes_\sigma G$は、type I von Neumann algebraになる。

(pr.) $M$はtype I factorだから、$\sigma_g$は$M$のinner automorphismである。だから、$\sigma_g(x) = u_g x u_g^*$ (但し、$u_g$は$M$のunitaryで、$x$は$M$の任意の元) と書ける。$M \otimes_\sigma G$は、$\sigma \otimes A\lambda$のfixed algebraだから、$M \otimes_\sigma G = \{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}'$になるが、$\{u_g \otimes \lambda(g) ; g \in G\}$は可換なsetだから、$M \otimes_\sigma G$はtype Iになる。

次に、integrable representationについて述べます。先ず、

(Def. 3) $G$をlocally compact group with the left Haar measure $dg$とし、$M$をvon Neumann algebra、$\sigma$を$G$から$M$へのrepresentationとする。$\{x \in M ; \int_G \sigma_g(xx^*)dg \in M\}$が$M$でweakly denseである場合に、$\sigma$をintegrableであるという。

この時、$\{x \in M ; \int_G \sigma_g(xx^*)dg \in M\}$はleft idealであることに注意する。

integrable representationの例としては、$G$をlocally compact group with the left Haar measure $dg$ として、$M=\mathcal{L}(L^2(G))$, $U_g=A\lambda(g)$ とすれば、これが1つの例を与えていることがわかります。integrable representation については、次の事が成り立ちます。

(1) $G$ を locally compact group, $U$ を $G$ から von Neumann algebra $M$ への representation. $N$ を $\sigma$-finite von Neumann algebra とする。もし、$U\otimes 1$ が $G$ から $M\otimes N$ への integrable representation であるとすると、この時、$U$ は integrable になる。

(pf.) $N$ は $\sigma$-finite だから、faithful normal state $\Phi$ が $N$ 上に取れる。$E=1\otimes\Phi$ を考えると、$E$ は $M\otimes N$ から $M\otimes\mathbb{C}$ への conditional expectation である。この時、$E(U_g\otimes 1)(x)=(U_g\otimes 1)E(x)$ $(x\in M\otimes N)$ が成り立つ。もし、$x>0$, $\int_G (U_g\otimes 1)(x)dg \in M\otimes N$ であれば、$E(x)>0$, $\int_G (U_g\otimes 1)(E(x))dg\in M\otimes\mathbb{C}$.
$U\otimes 1$ が integrable から、$^{\exists}(x_\alpha)\subset(M\otimes N)^+$ ($M\otimes N$ の positive elements 全体); $x_\alpha\uparrow 1$ (strongly), $\int_G (U_g\otimes 1)(x_\alpha)dg \in M\otimes N$ for $^{\forall}\alpha$. $E(x_\alpha)$ を考えることにより、$U$ が integrable であることがわかる。

(2) $G$ を locally compact group, $U, V$ を $G$ から von Neumann algebra $M, N$ への representation とする。もし、$U$ が integrable とすると、この時、$U\otimes V$ は integrable となる。

(pf.) $U$ が integrable ということから、$^{\exists}(a_\alpha)\subset M^+$; $a_\alpha\uparrow 1$

(strongly), $\int_G \sigma_g(a_\alpha)dg \in M$. 故に、$a_\alpha \otimes 1 \subset (M\otimes N)^+$; $a_\alpha \otimes 1 \uparrow 1$ (strongly), $\int_G (\sigma_g \otimes \tau_g)(a_\alpha \otimes 1)dg \in M\otimes N$ より、$\sigma \otimes \tau$ は integrableになる。

integrable representationを与える条件としては、次のような条件がある。

(Theorem 4) $G$を locally compact abelian group かつ metrizable であるとする。$\sigma$を$G$から von Neumann algebra $M$ への representation で、for $\forall \gamma \in \Gamma (=\hat{G})$, $M(\sigma; \{\gamma\}) \ni \exists$ unitary の条件を満足しているとすると、この時に、$\sigma$は integrableになる。

証明の方針は、$\sigma \otimes 1$ が integrable であることを示せばよい訳です。これは、$\sigma \otimes A\lambda$を考えると、$A\lambda$ は integrableより、$\sigma \otimes A\lambda$は integrable になる。だから、$\sigma \otimes 1$ と $\sigma \otimes A\lambda$が unitary同値であることを示せばよい。

又、integrable representationとその fixed algebra の関係については次の事が成り立つ。

(Theorem 5) $G$を locally compact abelian group, $\sigma$を$G$から factor $M$への representation で、$\sigma$を $(M^\sigma)' \cap M$ へ制限した時、integrable とすると、この時、$(M^\sigma)' \cap M$ は type I である。

これを示すには、次の Theorem を示せば十分である。

(Theorem 6) $G$を locally compact abelian group, $\tau$を$G$から von Neumann algebra $N$への integrable representation で、

$N^{\sigma} \subset \mathrm{Center}\, N$ とする。この時、$N$ は type I である。

何故かと言えば、$N = (M^{\sigma})' \cap M$ とし、$\sigma|_N = \sigma$ とする。この時、$x \in N^{\sigma}$ とすると、$x \in M^{\sigma}$ で、$x \in \mathrm{Center}\, N$。つまり、$N^{\sigma} \subset \mathrm{Center}\, N$ となるから。

(Theorem 6) について、$N^{\sigma} = \mathbb{C}$ (ergodic) としてもよい。この時、$\hat{G} = \Gamma$ として、$\Gamma(\sigma) = S_p(\sigma)$ は $\Gamma$ の closed subgroup である。$G/\Gamma(\sigma)^{\perp}$ を考えることにより、始めから $\Gamma(\sigma) = \Gamma$ としてよい。$\Gamma(\sigma) = \Gamma$ より、$N \otimes_{\sigma} G$ は type I factor であり、$(N \otimes G) \otimes \Gamma = N \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ から、$(N \otimes G) \otimes \Gamma$ は (prop. 2) から type I に注意すると、$N$ は type I になる。

最後に、Connes は2 von Neumann algebras の間に次のような新しい概念を導入している。

(Def. 6) $M_1, M_2$ を von Neumann algebras とする。$M_1, M_2$ が du même genre と呼ばれるのは、for $\forall_{0 \neq} e_1 \in M_1^P$ ($M_1$ の projection 全体) ($\forall_{0 \neq} e_2 \in M_2^P$), $\exists_{0 \neq} f_1 \leq e_1$, $\exists_{0 \neq} f_2 \leq e_2$; $f_1 \in M_1^P$, $f_2 \in M_2^P$,
$M_{1, f_1} \cong M_{2, f_2}$ を満たすこととする。

これに関して、du même genre を与えるものとしては、

(Theorem 7) $G$ を locally compact group with the left Haar measure $dg$, $M$ を von Neumann algebra, $\sigma$ を $G$ から $M$ への integrable representation とする。この時、$M^{\sigma}$ と $M \otimes_{\sigma} G$ は、du même genre である。

これを示すには、次の2つのLemmaを順次使えばよい.

(Lemma 8) $G, M, U$ を Theorem 7 のものとする. この時.

$\exists x(\neq 0) \in M \otimes \mathcal{L}(L^2(G))$ ; $x(1 \otimes \lambda(g)) = (U_g \otimes 1)(x)$ $(\forall g \in G)$

証明は. 具体的構成による.

(Lemma 9) $U, G, M$ を Theorem 7 のものとする. この時.

$U \otimes 1$ と $U \otimes A\lambda$ は unitary 同値である.

証明は. (Lemma 8) と Connes の 2×2 matrix の方法を使う.