数理解析研究所講究録
第 211 巻 1974 年 1-12

PBIBD のアソシエート・クラスの reduction (II)

阪大・基工 景山三平

今回は，昨年の「群論と組み合せ論研究会」での話しの続きであります。

PBIBD の associate classes の reduction に関して，筆者は AMS('72, Vol.43) で，N_i を BIBD $(v_i, b_i, k_i, r_i, \lambda_i)$ とするとき，これらのいわゆる Sillitto 型の積 $N=N_1\otimes N_2 + N_1^*\otimes N_2^*$ (N_i^* は N_i の complementary BIBD) で構成される Rectangular association scheme をもつ高々 3 associate classes の PBIBD N が L_2 association scheme をもつ 2 associate classes の PBIBD へ reducible であるための必要十分条件は

$$(*) \qquad v_1 = v_2, \quad b_1(r_2-\lambda_2) = b_2(r_1-\lambda_1),$$
$$b_i \neq 4(r_i-\lambda_i), \quad i=1,2$$

であることを示した。ここではこの型の二つの方向への一般化を考えます。方法は標準的なVartakの方法（designの会合数λ_iと第2種のパラメーターp^i_{jk}を用いる……Vartak(1955)の方法は少し不完全であったのでそれを修正したものをGeneralized Vartak's conditionと呼ぶ）と筆者のもの（design Nの会合数とNN'の固有根を用いる）をそれぞれ使用する。

BIBD, m classのassociation scheme, PBIBD, 処理の間のassociation algebra等については前回詳しく述べましたので省略します。

先ず，一つの方向への一般化として，筆者の方法を用いて，

（定理1）。パラメーター$v, b_i, r_i, k, \lambda_i$のBIBD N_i ($i=1,2,3$)が与えられているとき，F_3 type association schemeをもつ高さ7 associate classesのPBIBD $N=N_1\otimes N_2\otimes N_3+N_1^*\otimes N_2^*\otimes N_3^*$がcubic association schemeをもつ3 associate classesのPBIBDへreducibleであるための必要十分条件は

$$b_i(r_j-\lambda_j)=b_j(r_i-\lambda_i)$$

for all $i,j\ (i\neq j)=1,2,3$ である。

［注意］仮定 $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ は, F_3 type association scheme をもつ 7 associate classes の PBIBD $N_1\otimes N_2\otimes N_3$ が cubic association scheme をもつ 3 associate classes の PBIBD へ reducible であるための必要十分条件であったが（AMS '72. Vol43 参照）, 同じ association scheme に基づいていても配置が異なると associate classes の reduction のための条件も一般には異なることに注意したい。定理1 の N は $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ だけでは not reducible である。勿論, 仮定 $v_1=v_2=v_3$, $k_1=k_2=k_3$ なしでも必要十分条件は導けるが, 条件(*)に似ず非常に複雑になるので省略します。

定理1 を BIBD のパラメーター間の関係式を用いて変形して

（系）パラメーター $v_i, b_i, r_i, k, \lambda_i$ の BIBD N_i $(i=1,2,3)$ が $r_1\lambda_2=r_2\lambda_1$, $r_2\lambda_3=r_3\lambda_2$, $r_1\lambda_3=r_3\lambda_1$ を満すとき, F_3 type association scheme をもつ高々 7 associate classes の PBIBD $N=N_1\otimes N_2\otimes N_3+N_1^*\otimes N_2^*\otimes N_3^*$ が cubic association scheme

をもつ 3 associate classes の PBIBD の reducible であるための必要十分条件は，

$$v_1 = v_2 = v_3$$

である。

定理1と比較して次の定理もうることを注意したい。

（定理2）。パラメーター $v_i, b_i, r_i, k_i, \lambda_i$ の BIBD N_i $(i=1,2,3)$ が $v_2=v_3$, $k_2=k_3$ を満すとき，F_3 type association scheme をもつ高さ 7 associate classes の PBIBD $N=N_1\otimes N_2\otimes N_3 + N_1^*\otimes N_2^*\otimes N_3^*$ が 5 associate classes の PBIBD の reducible であるための必要十分条件は

$$b_2(r_3-\lambda_3) = b_3(r_2-\lambda_2)$$

である。

定理1は，AMS（'72, Vol.43）を参照して，形式的に一般化できます。

（定理3）。パラメーター $v, b_i, r_i, k, \lambda_i$ をもつ BIBD N_i $(i=1,2,\cdots,m)$ が与えられているとき，F_m type association scheme をもつ高さ 2^m-1 associate classes の PBIBD

$N = N_1 \otimes N_2 \otimes \cdots \otimes N_m + N_1^* \otimes N_2^* \otimes \cdots \otimes N_m^*$ が C_m type association scheme をもつ PBIBD の reducible であるための必要十分条件は

$$b_i (r_j - \lambda_j) = b_j (r_i - \lambda_i)$$

が $i, j\ (i \neq j) = 1, 2, \cdots, m$ すべてに対して同時に成立することである。

次に、もう一つの方向として、Sillitto 型の積の本来の意味における一般化を Vartak の方法（Generalized Vartak's condition）を用いて考えよう。即ち、N_i をパラメーター $v_i, b_i, r_i, k_i, \lambda_i\ (i=1,2,\cdots)$ の BIBD とするとき、

$$N^{(1)} = N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*,\quad N^{(2)} = N^{(1)} \otimes N_3 + N^{(1)*} \otimes N_3^*,$$
$$\cdots,\quad N^{(m)} = N^{(m-1)} \otimes N_{m+1} + N^{(m-1)*} \otimes N_{m+1}^*$$

なる型の計画を考察する。

以下の考察で有用な次の補題を準備します。

（補題）。N_1 を m associate classes の PBIBD

($v^{(1)}, b^{(1)}, r^{(1)}, k^{(1)}, \lambda_i^{(1)}, n_i^{(1)}, p_{jk}^{(1)i}$, $i,j,k=0,1,\cdots,m$) , N_2 を BIBD ($v_2, b_2, r_2, k_2, \lambda_2$) とそれぞれします。このとき、$N=N_1\otimes N_2+N_1^*\otimes N_2^*$ は、次のパラメーターをもつ高々 $2m+1$ associate classes の PBIBD である：

$$v=v^{(1)}v_2 \quad , \quad b=b^{(1)}b_2 ,$$

$$r=r^{(1)}r_2+(b^{(1)}-r^{(1)})(b_2-r_2),$$

$$k=k^{(1)}k_2+(v^{(1)}-k^{(1)})(v_2-k_2),$$

$$\lambda_1=r^{(1)}\lambda_2+(b^{(1)}-r^{(1)})(b_2-2r_2+\lambda_2),$$

$$\lambda_{2i}=r_2\lambda_i^{(1)}+(b^{(1)}-2r^{(1)}+\lambda_i^{(1)})(b_2-r_2),$$

$$\lambda_{2i+1}=\lambda_2\lambda_i^{(1)}+(b^{(1)}-2r^{(1)}+\lambda_i^{(1)})(b_2-2r_2+\lambda_2)$$
$$+2(r^{(1)}-\lambda_i^{(1)})(r_2-\lambda_2),$$

$$n_1=v_2-1, \quad n_{2i}=n_i^{(1)}, \quad n_{2i+1}=(v_2-1)n_i^{(1)}$$

$i=1,2,\cdots,m$。更に $i,j=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\lambda_1=\lambda_{2i} \iff b^{(1)}(r_2-\lambda_2)=b_2(r^{(1)}-\lambda_i^{(1)}),$$

$$\lambda_1=\lambda_{2i+1} \iff (r^{(1)}-\lambda_i^{(1)})b_2=4(r^{(1)}-\lambda_i^{(1)})(r_2-\lambda_2),$$

(1) $$\lambda_{2i}=\lambda_{2j+1} \iff b_2(\lambda_j^{(1)}-\lambda_i^{(1)})=(r_2-\lambda_2)[b^{(1)}-4(r^{(1)}-\lambda_j^{(1)})],$$

$$\lambda_{2i}=\lambda_{2j} \Longleftrightarrow \lambda_i^{(1)}=\lambda_j^{(1)},$$

$$\lambda_{2i+1}=\lambda_{2j+1} \Longleftrightarrow (\lambda_i^{(1)}-\lambda_j^{(1)})[b_2-4(r_2-\lambda_2)]=0$$

が成立する。

［注意］一般に m associate classes のPBIBD (v, b, r, k, λ_i) M の complement もやはり M と同じ association scheme に基づく PBIBD（もし $b+\min_i \lambda_i \geqq 2r$ ならば）となるので，$N_1 \otimes N_2 + N_1^* \otimes N_2^*$ は $N_1 \otimes N_2$ と同じ association scheme をもつ。したがって p_{jk}^i についても同様だから省略。更にもし N_1 が F_m type association scheme に基づいているとき，N は F_{m+1} type association scheme に基づく。

この補題を用いると，$N^{(m)}$ $(m=1, 2, \cdots)$ のパラメーターが容易に求められるし，reduction 等の議論もしやすい。

例えば design $N^{(2)}$ について考える。

$$N^{(2)}=N^{(1)} \otimes N_3 + N^{(1)*} \otimes N_3^*$$

$$= N_1\otimes N_2\otimes N_3 + N_1^*\otimes N_2^*\otimes N_3 + N_1\otimes N_2^*\otimes N_3^* + N_1^*\otimes N_2\otimes N_3^*$$

は F_3 type association scheme に基づく高々 7 associate classes の PBIBD ($v^{(2)}, b^{(2)}, r^{(2)}, k^{(2)}, \lambda_i^{(2)}, n_i^{(2)}, p^{(2)i}_{jk}$) になる。 $N^{(1)}$ の本来の構造より

(i) $b_i = 4(k_i-\lambda_i)$, $i=1,2,3$ $\Longrightarrow$ $N^{(2)}$: BIBD

(ii) $b_i=4(k_i-\lambda_i)$, $i=1,2$, $b_3\neq 4(k_3-\lambda_3)$

$\Longrightarrow$ $N^{(2)}$: rectangular association scheme に基づく 3 associate classes の PBIBD。このとき、筆者(AMS'72)の定理 4 より、この $N^{(2)}$ は更に L_2 association scheme に基づく PBIBD へは not reducible である。

は容易に分る。更に他の場合の reduction については、関係式(1)などを用いて適当な $\lambda_i^{(2)}$ の間の等式関係の下で、7 associate classes の PBIBD から l associate classes ($l=5,4,3,2$) の PBIBD へ reducible となるための必要十分条件を Vartak の条件や それを一般化した Kageyama の条件 (to appear in Ann. Inst. Stat. Math.) より求められるが 非常に多くの場合が存在する。その一部を挙げると、

必要十分条件が自動的に満されているものとして

○ $\lambda_4^{(2)}=\lambda_5^{(2)}$, $\lambda_6^{(2)}=\lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1=4(k_1-\lambda_1)$) の下で

7 associate classes から 5 associate classes の PBIBD へ reducible（略して "7→5 へ reducible" と書く）。

- $\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(2)}=\lambda_5^{(2)}, \lambda_6^{(2)}=\lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1=4(r_1-\lambda_1), b_2=4(r_2-\lambda_2)$) の下で，7→4 へ reducible。
- $\lambda_1^{(2)}=\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}, \lambda_5^{(2)}=\lambda_6^{(2)}=\lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_2=4(r_2-\lambda_2), b_3=4(r_3-\lambda_3)$) の下で，7→3 へ reducible。このとき reduced design は F_2 type association scheme に基づく PBIBD となる。
- $\lambda_1^{(2)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_4^{(2)}=\lambda_5^{(2)}=\lambda_6^{(2)}=\lambda_7^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1=4(r_1-\lambda_1), b_3=4(r_3-\lambda_3)$) の下で，7→2 へ reducible。このとき reduced design は N'_2 type association scheme に基づく PBIBD となる。

必要十分条件として関係がでてくるものとして，

- $\lambda_1^{(2)}=\lambda_2^{(2)}, \lambda_5^{(2)}=\lambda_6^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_2(r_3-\lambda_3)=b_3(r_2-\lambda_2)$) の下で 7 associate classes から 5 associate classes の PBIBD へ reducible であるための必要十分条件は $\nu_1=\nu_2$ である。（略して "7→5 へ reducible $\Leftrightarrow \nu_1=\nu_2$" と書く）。
- $\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}=\lambda_4^{(2)}=\lambda_5^{(2)}$ ($\Leftrightarrow b_1=4(r_1-\lambda_1), b_2=4(r_2-\lambda_2)$) の下で

$7 \to 4$ の reducible $\Leftrightarrow v_3 = v_1 = 2$。

- $\lambda_1^{(2)} = \lambda_3^{(2)} = \lambda_4^{(2)} = \lambda_6^{(2)}, \lambda_5^{(2)} = \lambda_7^{(2)}$ $(\Leftrightarrow b_1 = 4(r_1 - \lambda_1), b_3 = 4(r_3 - \lambda_3))$

  の下で，$7 \to 3$ の reducible $\Leftrightarrow v_2 = v_3$。

- $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_4^{(2)}, \lambda_3^{(2)} = \lambda_5^{(2)} = \lambda_6^{(2)}$ $(\Leftrightarrow b_1(r_3 - \lambda_3) = b_3(r_1 - \lambda_1), b_2(r_3 - \lambda_3) = b_3(r_2 - \lambda_2))$

  の下で，$7 \to 3$ の reducible $\Leftrightarrow v_1 = v_2 = v_3$。

  このとき reduced design は C_3 type association scheme に基づく PBIBD となる。

これからでも，同じ方法の下でも associate classes を適当に combine することにより 種々な型の PBIBD の reducible となることが分る。

一般に $m \geq 1$ に対して

$$N^{(m)} = N^{(m-1)} \otimes N_{m+1} + N^{(m-1)*} \otimes N_{m+1}^{*}$$

を考える。ここで $N^{(m-1)*} = N^{(m-2)} \otimes N_m^{*} + N^{(m-2)*} \otimes N_m$，$N^{(0)} \equiv N_1$ (i.e., $v^{(0)} = v_1, b^{(0)} = b_1, r^{(0)} = r_1, k^{(0)} = k_1, \lambda_1^{(0)} = \lambda_1$) で，$N^{(m)}$ は $m+1$ 個の BIBD N_i のクロネッカー積からなる 2^m 個の項の和に展開される。

このの $N^{(m)}$ は F_{m+1} type association scheme に基づく PBIBD になるが，補題及 Kageyama の結

件を用いて $N^{(2)}$ の場合と同様に論じられる。

最後に その中でも 本来の構造から分る系統的なものとして

(i) $b_i = 4(r_i - \lambda_i)$, $i=1,2,\cdots,n+1$ $\Rightarrow$ $N^{(n)}$: BIBD

(ii) $b_i = 4(r_i - \lambda_i)$, $i=1,2,\cdots,n$, $b_{n+1} \neq 4(r_{n+1} - \lambda_{n+1})$

$\Rightarrow$ $N^{(n)}$: rectangular association scheme に基づく 3 associate classes の PBIBD。

(iii) $b_i = 4(r_i - \lambda_i)$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $b_j \neq 4(r_j - \lambda_j)$, $j=n,n+1$,

$\Rightarrow$ $N^{(n)}$: F_3 type association scheme に基づく 7 associate classes の PBIBD。

等と順次でてくるが, 上の 3 つの場合は 本質的には $N^{(2)}$ のときの議論に含まれている。

文献

- Bose, R.C. and Mesner, D.M. (1959): Ann. Math. Statist. 30 21–38.
- Kageyama, S. (1972): Ann. Math. Statist. 43 1528–1540.
- Kageyama, S. (1973): Ann. Inst. Statist. Math.

(to appear).

- Kageyama, S. (1973): Ann. Statist. (to appear).
- 景山三平 (1973): 数理解析研究所講究録 128 1–8.
- Sillitto, G. P. (1957): Biometrika 44 228–229.
- Vartak, M. N. (1955): Ann. Math. Statist. 26 420–438.