数理解析研究所講究録
第 211 巻 1974 年 67-74

2つの2重可移 suborbits を持つ rank 5の原始置換群

東大　大学院　伊藤達郎

G = a primitive group on Ω, $|\Omega| < \infty$, を $\Omega \times \Omega$ 上に自然に働らかせたときの orbits を

Γ_0 = diagonal, $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = \Delta$, Γ_3, … Γ_{r-1}, (r は G の rank)

とする。$\alpha \in \Omega$ の stabilizer を G_α とすると、

$\Gamma_i(\alpha) = \{ \beta \in \Omega \mid (\alpha, \beta) \in \Gamma_i \}$

は G_α-orbit になり、G_α-orbits はすべてこうして得られる。

<u>Cameron の定理</u>　以上のような状況の下で

(1) $(*) \begin{cases} G_\alpha = 2\text{重可移 on } \Gamma(\alpha) \text{ and } \Delta(\alpha) \\ 1 < v < w, \ |\Gamma(\alpha)| = v, \ |\Delta(\alpha)| = w \end{cases}$

$\Rightarrow \quad r \geqq 5$

(2) $\begin{cases} (*), \ r = 5 \\ w = v + 1 \end{cases} \Rightarrow$ $v = 11$, $w = 12$, $|\Omega| = 266$
$G \cong J_1$ Janko group of order 175560

この定理の(2)の一つの拡張として次の事が得られた。

定理

$$\begin{cases} (*)\ ,\ r=5 \\ \Gamma\circ\Gamma \neq \Delta\circ\Delta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} v=11\ ,\ w=12\ ,\ |\Omega|=266 \\ G\cong J_1 \end{matrix}$$

ただし

$$\Gamma_i\circ\Gamma_j = \{(\alpha,\beta)\in\Omega\times\Omega \mid \alpha\neq\beta,\ \exists\gamma\in\Omega \text{ s.t. } (\alpha,\gamma)\in\Gamma_i\ ,\ (\gamma,\beta)\in\Gamma_j\}$$

注意 $\begin{cases} (*)\ ,\ r=5 \\ w\geqq 2v \text{ or } w=v+1 \end{cases} \Rightarrow \quad \Gamma\circ\Gamma\neq\Delta\circ\Delta$

定理の証明 $v>2$ としてよい。([7] の theorem 18.7 による。)

I (i) $\Gamma=\Gamma'$, $\Delta=\Delta'$ self-paired

ただし $\Gamma'=\{(\alpha,\beta)\in\Omega\times\Omega \mid (\beta,\alpha)\in\Gamma\}$

$\Delta'=\{(\alpha,\beta)\in\Omega\times\Omega \mid (\beta,\alpha)\in\Delta\}$

(ii) G_α-orbits は次の 5 つ

$\{\alpha\}$, $\Gamma(\alpha)$, $\Gamma\circ\Gamma(\alpha)$, $\Delta\circ\Delta(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$

$|\Gamma\circ\Gamma(\alpha)| = \dfrac{v(v-1)}{k}$ $\quad k\leqslant\dfrac{v-1}{2}$ $\quad$ for some positive

$|\Delta\circ\Delta(\alpha)| = \dfrac{w(w-1)}{l}$ $\quad l\leqslant\dfrac{w-1}{2}$ $\quad$ integer k, l.

(iii) $\Gamma\circ\Delta=\Delta\circ\Gamma=\Delta\circ\Delta$

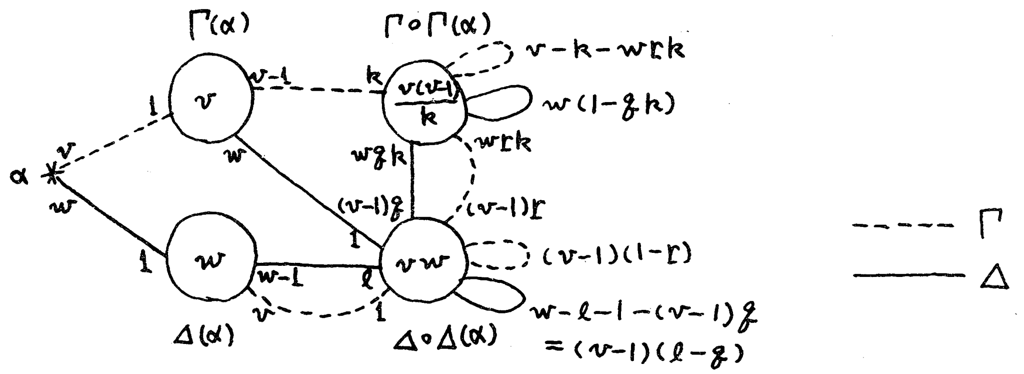
$|\Gamma\circ\Delta(\alpha)| = vw$ $\quad$ 特に $\quad w=lv+1$.

∵ (i) [2] の section 1 と [3] の theorem 1 による。

(ii) [2] の theorem 2.2 による。

(iii) π_1 と π_2 をそれぞれ G_α on $\Gamma(\alpha)$ と G_α on $\Delta(\alpha)$ の permutation character とすると、$\pi_1\cdot\pi_2$ は G_α on $\Gamma(\alpha)\times\Delta(\alpha)$ の permutation character。$\pi_1 = 1 + \psi_1$, $\pi_2 = 1 + \psi_2$, (ただし 1 は principal character) とすると、ψ_1, ψ_2 はそれぞれ degree $v-1$, $w-1$ の irreducible character になるから、$(1, \pi_1 \cdot \pi_2) = \sum_{x \in G_\alpha} \pi_1(x)\pi_2(x) / |G_\alpha| = (\pi_1, \pi_2) = 1$。従って G_α は $\Gamma(\alpha) \times \Delta(\alpha)$ 上可移、よって $\Gamma \circ \Delta$ は single suborbit。[4] と同様にして $|\Gamma \circ \Delta(\alpha)| = vw$, $\Gamma \circ \Delta = \Delta \circ \Delta$。

II.



図

$(v-1)r = |\Gamma \circ \Gamma(\alpha) \cap \Gamma(e)| \qquad e \in \Delta \circ \Delta(\alpha)$

$(v-1)g = |\Gamma \circ \Gamma(\alpha) \cap \Delta(e)|$

とすると

$k = 1$, $g = \dfrac{l}{1+l}$, $r = \dfrac{1}{1+l}$

$1 + l \mid v - 1$.

∵ $B = (b_{ij})$ $n \times n$ 行列, $n = |\Omega|$ を Γ に対応する incidence matrix とする。すなわち $b_{ij} = \begin{cases} 1, & (j, i) \in \Gamma \\ 0, & (j, i) \notin \Gamma \end{cases}$.

C, D, E をそれぞれ $\Gamma \circ \Gamma$, $\Delta \circ \Delta$, Δ に対応する

incidence matrix とする。Gを自然に $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群とみなして、Gの各元と可換な $n \times n$ 行列全体を $V(G)$ と書けば、I = 単位行列, B, C, D, E は $V(G)$ のベクトル空間としての基底をなす。Γ に関するグラフの diameter は 4 (maximal diameter) だから、$V(G)$ は algebra として B で生成される。特に $V(G)$ は可換。図より次の関係式がわかる。

$$B^2 = vI + kC$$
$$BE = D$$
$$E^2 = wI + lD$$
$$EC = w(1-gk)C + (v-1)gD$$
$$ED = wB + wgkC + (v-1)(l-g)D + (w-1)E$$

従って

$$\big(E(E-lB)\big)(E+B) = w(E+B)$$
$$\| $$
$$E\big((E-lB)(E+B)\big) = wB + wk(g-l+gkl)C + (v-1)(l-g-klg)D + wE.$$

故に $g - l + gkl = 0$, $g = \frac{l}{1+kl}$. 一方 $g(v-1)$, gkw は intersection number だから整数。よって

$1+kl \mid l(v-1)$, $1+kl \mid lv+1$, $1+kl \mid l+1$, $k=1$,

$g = \frac{l}{1+l}$, $1+l \mid v-1$。同様にして、$B(BE) = B^2E$ から

$r = 1 - gk = \frac{1}{1+l}$ を得る。

III. $s = l+1$, $t = \frac{v-1}{1+l}$ とおくと、II により $s(\geq 2)$, $t(\geq 1)$ は整数。Γ に対応する intersection matrix は、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ v & 0 & 1 & & \\ & v-1 & t-1 & t & \\ & & v-t & v-t-1 & v \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) minimal polynomial of B

= min. poly. of M

= characteristic poly. of M

$= (x-v)F_4(x)$

ここに $F_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2stx^2 - (3st - t + 2)x + (st+1)(t-1)$

$F_4(x) = 0$ の根は、相異る実数。

(ii) θ を $F_4(x) = 0$ の根、$m(\theta)$ を θ の B の固有値としての重複度とすると、

$$m(\theta) = \frac{-nv(v-1)(v-t)t}{(\theta - v)F_4'(\theta)F_3(\theta)}, \quad n = |\Omega|$$

ここに

$$F_4'(x) = \frac{dF_4(x)}{dx}, \quad F_3(x) = x^3 + x^2 - (2st - t + 1)x - (st - t + 1).$$

∵ (i) [5] による。

(ii) [1] の Prop. B の証明と同様。

IV. $F_4(x) = 0$ は少くとも 1 つは整数でない根をもつ。

∵ $t \leqq 8(s-1)^2$ のとき

$F_4\left(\sqrt{\frac{t}{2}} - 1\right) > 0$, $F_4\left(\sqrt{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) < 0$,

$F_4(-\sqrt{\frac{t}{2}}-1)<0$, $F_4(-\sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2})>0$.

故に　$F_4(x)=0$ の根 θ_2, θ_3 があって

$$\sqrt{\frac{t}{2}}-1<\theta_2<\sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2},\quad -\sqrt{\frac{t}{2}}-1<\theta_3<-\sqrt{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}.$$

特に　$-2<\theta_2+\theta_3<-1$. よって　θ_2 か θ_3 は整数でない。

$t>8(s-1)^2$ のとき

$\rho=\sqrt{s+\sqrt{s^2-s}}$ とおけば. 前と同様にして $F_4(x)=0$ の根

θ_1, θ_4 があって

$$\rho\sqrt{t}-\frac{1}{2}<\theta_1<\rho\sqrt{t},\quad -\rho\sqrt{t}-\frac{1}{2}<\theta_4<-\rho\sqrt{t}.$$

特に　$-1<\theta_1+\theta_4<0$. よって　θ_1 か θ_4 は整数でない。

V. $s=2$, $t=5$.

㋑ 整数 α, β, γ, δ と有理数 ξ, λ, μ, ν を次の式をみたすように決める。

$$-\frac{1}{t}(x-v)F_4'(x)F_3(x)\equiv\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \mod F_4(x)$$

$$(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)(x-\xi)\equiv\lambda x^2+\mu x+\nu \mod F_4(x)$$

θ を $F_4(x)=0$ の根で整数でないものとする.

$$\Theta_1(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

$$\Theta_2(x)=\frac{\lambda x^2+\mu x+\nu}{x-\xi}$$

とおくと、III の (ii) により

$$m(\theta)=\frac{nv(v-1)(v-t)}{\Theta_1(\theta)}=\frac{nv(v-1)(v-t)}{\Theta_2(\theta)}.$$

ここで　$F_4(\xi)\neq 0$ に注意する。（ $F_4(\xi)\neq 0$ の証明：

$$-2<\xi=\frac{\beta}{\alpha}-2=-1-\frac{(s-3)t}{s(s-1)t+2(s-2)}\begin{cases}=-\frac{1}{2} & s=2\\ =-1 & s=3\\ <-1 & s\geqq 4\end{cases}$$

$s \neq 3$ なら ζ は代数的整数でないから $F_4(\zeta) \neq 0$, $s=3$ なら $F_4(\zeta) = 3t^2 \neq 0$.) $R = \Theta_1(\theta) = \Theta_2(\theta)$ は $m(\theta)$ が整数だから有理数。θ は. $\lambda x^2 + \mu x + \nu - R(x-\zeta)$, ($\lambda, \mu, \nu, R, \zeta \in \mathbb{Q}$) の根で、非整数だから、$\mathbb{Q}[x]$ で既約な多項式 $H(x)$

$$H(x) = x^2 + Px + Q \qquad P, Q \in \mathbb{Z}$$

の根としてよい。$H(x)$ は $\Theta_1(x) - R$, $\lambda x^2 + \mu x + \nu - R(x-\zeta)$ を $\mathbb{Q}[x]$ の中で割り切る。従って.

$$\begin{cases} \alpha P^2 - \beta P - \alpha Q + \gamma = 0 \\ Q = -\zeta P + \dfrac{\zeta\mu + \nu}{\lambda} \end{cases}$$

$$(P-1)^2 = 1 + \frac{\zeta\mu+\nu}{\lambda} - \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$= 3st + t + 1 - \frac{X}{Y}$$

ここに $X = (9s^3 - 37s^2 + 35s + 9)t^2 + (9s^2 - 26s + 1)t$

$$Y = (s^4 - 2s^3 + s^2)t^2 + (3s^3 - 5s^2 - 3s + 9)t + (2s^2 - 2s - 4)$$

$(P-1)^2 \in \mathbb{Z}$ より $\dfrac{X}{Y} \in \mathbb{Z}$。$s \geqq 2$, $t \geqq 1$ のとき $\dfrac{X}{Y}$ が整数になるのは $s=2$, $t=5$ のときにかぎる。

文献

[1] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 20 (1973), 191–208.

[2] P. J. Cameron, Permutation groups with multiply transitive suborbits, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 427–440.

[3] P. J. Cameron, Primitive groups with most suborbits doubly transitive, Geometriae Dedicata 1 (1973), 434–446.

[4] P. J. Cameron, Another characterization of the small Janko group, J. Math. Soc. Japan 25 (1973).

[5] D. G. Higman, Intersection matrices for finite permutation groups, J. Algebra 6 (1967), 22–42.

[6] D. Livingstone, On a permutation representation of the Janko group, J. Algebra 6 (1967), 43–55.

[7] H. Wielandt, "Finite Permutation Groups", Acad. Press, New York–London, 1964.