数理解析研究所講究録
第212巻 1974年 1-7

代数函数を一般解としてもつ線型常微分方程式の例

東大理 高野恭一

§1、序

線型Fuchs型常微分方程式の大域的研究において、モノドロミー群が大きな役割を果すことはよく知られている。しかし群が実際に計算できるのは非常に限られていて、昔からよく知られている Riemann の方程式、Jordan-Pochhammer の方程式（以下 J.P. と略す）と、Levelt によって1963年頃に計算され最近大久保謙二郎氏によって別の方法で計算された generalized hypergeometric equation（以下 G.H. と略す）などがある。これらの方程式はいずれも accessary parameters を含んでいないという事情にあることに注意したい。

モノドロミー群がわかると、それを用いて解の色々な性質を調べることが可能になる。例えば、群が有限群になる条件を求めれば、一般解が代数函数になるための条件がわかる。周知のように、これに関しては Riemann の方程式に対する

Schwarz [5] の有名な仕事がある。そこで私は J.P. と G.H. についてそのモノドロミー群が有限群となるための必要十分条件を求めることを考えてみた。G.H. についてはまだ条件を出していないが、J.P. についての結果を得たので報告する。

J.P. の群が有限群であるとすれば、それは必然的に群論でいう finite unitary group generated by reflections（u.g.g.r. と略す）となることがわかる。一方 u.g.g.r. については Shephard & Todd[6] の分類表がある。この表を使えば J.P. の群が有限群となるための条件が決定される。このように方法は全く群論的であるし、Shephard-Todd の表を用いるだけだから理論的むづかしさはないが、計算は大変である。

私は有限群論について全く知らなかったので、坂内英一氏（東大）に全面的に教わりながら計算した。G.H. についての結果を得たら別の機会に報告したい。

§2 Jordan-Pochhammer の方程式とその Monodromie gr.

Jordan-Pochhammer の方程式とは次の形の方程式。

$$(1)\quad Q(x)y^{(n)} - \mu Q'(x)y^{(n-1)} + \frac{\mu(\mu+1)}{2}Q''(x)y^{(n-2)} - \cdots\cdots$$
$$- R(x)y^{(n-1)} + (\mu+1)R'(x)y^{(n-2)} - \cdots\cdots = 0$$

ここに

$$Q(x) = (x-a_1)\cdots\cdots(x-a_n),$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{x-a_j} \quad .$$

この方程式は $x=a_1,\cdots a_n, \infty$ 以外に特異点をもたない n 階の線型 Fuchs 型微分方程式で、各特異点における特性指数は

$$x=a_j \;;\; 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-2,\ \mu+n-1+\alpha_j,\quad (j=1,\cdots n)$$

$$x=\infty \;:\; -(\mu+1), -(\mu+2), \cdots\cdots, -(\mu+n-1), -(\mu+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

である。また (1) は

$$(2) \qquad \int_{\Gamma_j} (u-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots\cdots(u-a_n)^{\alpha_n-1}(u-x)^{\mu+n-1}\,du \quad , j=1,\cdots n$$

の形の基本解をもつ。但し Γ_j は $u=a_j, x$ を回る二重結びの道としておく。

基本解の積分表示があるから、(1) のモノドロミー群を計算することは容易で、(2) の被積分函数の branch や $a_1,\cdots a_n$ の並べ方、Γ_j のとり方を適当にきめてやると、(1) のモノドロミー群は

$$(3) \qquad a_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ -(1-\varepsilon_1), & \cdots & -(1-\varepsilon_{j-1}), & \varepsilon_j\varepsilon_0, & -\varepsilon_0(1-\varepsilon_{j+1}), & \cdots & -\varepsilon_0(1-\varepsilon_n) \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$j=1,\cdots n$

から生成されることが確められる[3]。i.e. $G=\langle a_1, \cdots a_n\rangle$

ここで

(4) $\varepsilon_j = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_j)$ $j=1,\cdots\cdots n$

$\varepsilon_0 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\mu)$。

御前靈広氏は[3]，(1)が rational functions 上 irreducible であるための必要十分条件が

(5) $\varepsilon_0 \neq 1$, $\varepsilon_j \neq 1$, $j=1,\cdots\cdots n$, $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n \neq 1$

であることを示した。この条件は後で用いられる。

§3. $G=\langle a_1, \cdots\cdots a_n\rangle$ が有限群になる条件

定理「(1)の群 $G=\langle a_1, \cdots a_n\rangle$ ((3)) が irreducible とする。(即ち条件(5)が満たされているとする。) このとき G が有限群となるのは、次のいずれかの場合である。

$n=3$

[1] $\varepsilon_0=\omega$, $\varepsilon_j=-\omega^2$ $j=1,2,3$

[1]′ $\varepsilon_0=\omega^2$, $\varepsilon_j=-\omega$ $j=1,2,3$

[2] $\varepsilon_0=-\omega^2$, $\varepsilon_j=-\omega^2$ $j=1,2,3$

[2]′ $\varepsilon_0=-\omega$. $\varepsilon_j=-\omega$ $j=1,2,3$

[3] $\varepsilon_0=-\omega^2$ $\varepsilon_i=\varepsilon_j=-\omega^2$, $\varepsilon_k=\omega$, $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$

[3]′ $\varepsilon_0=-\omega$ $\varepsilon_i=\varepsilon_j=-\omega$ $\varepsilon_k=\omega^2$ 〃

$n=4$

[4] $\varepsilon_0=-\omega^2$, $\varepsilon_j=-\omega^2$ $j=1,2,3,4$

[4]′ $\varepsilon_0=-\omega$, $\varepsilon_j=$ $j=1,2,3,4$ 」

注。[1], [1]' は imprimitive で $\cong G(3,1,3)$ order $=54$

- [2] ~ [4] は primitive
- [1] ~ $\left\langle \begin{pmatrix} & \omega & \\ \omega^2 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \omega \\ & \omega^2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \omega \\ & 1 & \\ \omega^2 & & \end{pmatrix} \right\rangle$
- [2] [2]', [3] [3]' は Hessian gr. と呼ばれるもので
- [2], [2]' $\cong$ (分類表 No. 25)　　order $= 216 \times 3 = 648$
- [3], [3]' $\cong$ (〃 No 26)　　order $= 216 \times 6 = 1296$
- [4], [4]' $\cong$ (〃 No 32)　　order $= 216 \times 6!$
- $n \geqq 5$ のときはすべて無限群となる。

定理の証明の方針

1. a_j の固有値は $\underbrace{1, \cdots\cdots, 1}_{n-1\text{コ}}, \varepsilon_j \varepsilon_0$

   $a_i a_j$ の 〃　$\underbrace{1, \cdots\cdots}_{n-2\text{コ}} 1, \varepsilon_0, \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_0$

   であることに注意する。

2. G が finite gr. ならば、G は、u.g.g.r. である。

   ($G = \langle a_1, \cdots a_m \rangle \subset GL(n, \mathbb{C})$ が u.g.g.r. とは、$\forall a_j$ の固有値が $\underbrace{1, \cdots\cdots, 1}_{n-1\text{コ}}$, 1のベキ根 であること。)

3. G : u.g.g.r. irreducible, $\# G < \infty$ ならば G は Shephard-Todd の分類表のどれかの群と similar である。

4. 分類表の群はよくわかっていて(有限群の専門家には!) unitary reflections ($a_1, \cdots a_n$ だけとはかぎらない!)の order, それらの積の order の条件から、$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_0$ が高々とりうる値が1に注意しながら決められる。

5. 4より G が finite gr. になりうる候補者を全て、数え あげる。

6. 「$G \subset GL(n,\mathbb{C})$ が finite gr. ならば G-不変な positive definite な Hermitian matrix H が存在する」
(H が G-不変とは $\forall g \in G$ に対して $gHg^* = H$)
という lemma を用いて上の候補者をさらにしぼる。

7. G が働く vector 空間を $\mathbb{C}^n$, a_j の $\varepsilon_j\varepsilon_0$ 固有ベクトルを e_j とする。G を自然に $PGL(n,\mathbb{C})$ へ落したものを $\overline{G}$, e_j を $\mathbb{P}^{n-1}$ へ落したものを $\overline{e}_j$ とかく。
$\#\{\overline{g}\overline{e}_j \in \mathbb{P}^{n-1} ; \ j=1,\cdots n, \ \overline{g} \in \overline{G}\}$ を計算する。
この計算がめんどうである。これが無限ならば G は無限群であり、我々の場合には、$\{e_j\}_{j=1,\cdots n}$ が $\mathbb{C}^n$ を張っているので、これが有限ならば G は有限群である。また、我々は分類表を用いて調べているので、上の計算をどこまでも続けてやるという必要はない。

以上のようにして調べていけば、定理が証明される。詳しいことは講演で述べる。

文献

[1] N. Bourbaki ; Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chap.'s 4, 5, 6.

[2]. E. L. Ince; Ordinary differential equations, 1926

[3] 御前憲広; Pochhammerの方程式がreducibleになる条件,
1973 (修論)

[4] H. H. Mitchell, Determination of all primitive collineation groups in more than four variables which contain homologies, Amer. J. Math. 36, (1914) 1–12,

[6] G. C. Shephard and J. A. Todd; Finite unitary reflection groups, Can. J. Math. 6 (1954), 274–304.

[5] H. A. Schwarz; Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, J. für die reine und angew. Math., 75 (1872), 292–335.