

Elementary dynamical system の

abstract local dynamical system への extendability について

神戸大 理 浦 太郎

§ 1. 序

力学系の古典的な公理は、色々の面で強すぎるので、もっと微分方程式の研究にふさわしいものを導入することが、色々と試みられている。著者もこの意図をもって、微分方程式の基礎定理から再出発して、新しい公理系を導入することを考えた。かくて自励系方程式の解の存在性、加法性、連続性より、 F -族と書く曲線群を導入し、これが \mathcal{F} -族と書く、non-extendability 条件をみたす曲線族を一意的に定めることを示した。([5], [6])。一方、これより遅れて、同じ立場から、O. Hájek は局所力学系という概念と、その germ と呼ばれる概念を導入して、後者が前者を一意的に定めることを証明した ([2], [3])。

F -族と germ, \mathcal{F} -族と局所力学系とは、本質的に同値であることが感知されているが、これは [1] において厳密に

証明された。Hájekの公理系の方が記述が楽であるから、今後はこれに従って説明していく。

局所力学系は、phase space の位相構造と、実数直線尺の topological abelian group の構造とを準據として定義される。しかし、この系の構造をしらべる場合には、 \mathbb{R} の abelian group の構造から入るとき、phase space の位相には関係しない、いわば純代数的部分を切離して、しらべておくと便利なことが多い。恰も topological group の研究に先立って、abstract group の基礎的な研究をしておかすべきであるのと同様である。Hájek は、この事に基いて、abstract local dynamical system という概念を導入し、その構造をしらべることを考えた ([3])。ついで、彼は局所力学系の germ に当るものを求めようと、elementary dynamical system なる概念を導入した [4]、これは 目的の半分しか果たさなかつた ([4])。すなわち、「elementary dynamical system が定める abstract local dynamical system は高々一つしかない」ことはいえるが、「そのような系が少くとも一つあるかどうかは、わからない。わからないという意味は、この論文の一つの結果として知られるように、そのような abstract local dynamical system が一つもないような elementary

dynamical system があるということである。そこで、Hájek は「そのような abstract local dynamical system が少なくとも一つ存在するために、elementary dynamical system が満たすべき条件如何？」という問題を提起した ([4])。本論文の目的はこの問題に完全な回答を本えることである。その回答は本文で説明する "No-Intersection Property (Axiom)" と呼ばれるものであって、問題の条件として、必要^{十分}条件でもある。この意味で回答は完全である。

我々の問題を微分方程式論の言葉で表現すれば、微分方程式の局所的な解について、どんな性質が保証されれば、その解は、方程式の定義域の境界から境界に至るまで接続ができるか、ということである。したがって本論文の目的は、その条件を、いわば代数的条件として求めることである。

なお、局所力学系は元来自励系方程式の抽象化であって、強制系方程式の研究には不向きであり、強いて用いるためには、特殊な工夫をしなければならぬが、ここで扱っているような問題に関するかぎり、強制系でも parametrized system を取扱えば十分であるので、我々の結果は強制系にも直接応用できる。

証明は一切省略するが、主定理の証明の段階が察知されるよう、Lemmas と Propositions の配置を考慮しなおしである。詳細な証明と、同じ主題のもっと広い category での取扱について、別の論文として、何かの雑誌に発表する予定である ([7])。

§2. No-Intersection Axiom.

定義 1. π が phase space X の上の D を定義域とする局所力学系であるとは、

X は位相空間であって、 D は $D = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times D_x$ の形に書ける $X \times \mathbb{R}$ の部分であり、各 $x \in X$ に対して、 D_x は、実数直線 \mathbb{R} (standing notation) の 0 を含む開区間で、

(C0). D は $X \times \mathbb{R}$ の中で open, $\pi : D \rightarrow X$ は連続写像,

(CI) すべての $x \in X$ に対して $\pi(x, 0) = x$

(CII) $(x, t), (x, t+s), (\pi(x, t), s) \in D$ ならば、 $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$

(CIII) (Non-Extendability). $D_x = (a_x, b_x)$ とおくと $a_x (b_x)$ が finite ならば、 $\pm \downarrow a_x (t \uparrow b_x)$ に対する $\pi(x, t)$ の cluster set は空

がみちされることをいう。

定義 2. μ が phase space X の上の \mathcal{D} を定義域とする continuous germ であるとは, 定義 1 において, π を μ , \mathcal{D} を \mathcal{D} と読みかえ, (CI), (CII) と

(CO') \mathcal{D} は $X \times \mathbb{R}^2$ $X \times \{0\}$ の近傍,

$\mu: \mathcal{D} \rightarrow X$ は連続写像

がみちされることをいう。(CIII) は不必要。

定義 3. π が phase set X の上の \mathcal{D} を定義域とする abstract local dynamical system (abst system と略記) であるとは 定義 1 において (CI) (CII) (= (AI), (AII)) と

(AII') (Non-Extendability): $\forall (x, t) \in \mathcal{D}$,

$$D_x = D_{\pi(x, t)} + t$$

がみちされることをいう。(この場合も D_x は 0 を含む開区間であるという仮定は踏襲する。ただし X は abstract set)。

定義 4. μ が phase set X の上の, \mathcal{D} を定義域とする elementary (dynamical) system であるとは, 定義 3 で π を μ に, \mathcal{D} を \mathcal{D} に読みかえ, (AI), (AII) とがみちされることをいう。

命題. (CI), (CII), (CIII) と (AI), (AII), (AII')

とは同値である。(左に phase set が位相空間の場合。)

定義 5. μ が phase set X 上の \mathcal{D} を定義域とする abstract germ であるとは, μ がそのような elementary system であるとして, さらに次の公理をみたすことをいう。

(AIII) (No-Intersection). $(x_1, t), (x_2, t) \in \mathcal{D}$ として, $\mu(x_1, t) = \mu(x_2, t)$ ならば, $x_1 = x_2$ である。

Proposition 1. Abstract system は abst. germ である。

Lemma 1. μ を elementary system とする。 $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \mathcal{D}$ に對して

$$A = \left\{ s \in (\mathcal{D}_{x_1} - t_1) \cap (\mathcal{D}_{x_2} - t_2) \mid \begin{array}{l} \mu(x_1, t_1 + s) \\ = \mu(x_2, t_2 + s) \end{array} \right\}$$

とおけば, A は \mathbb{R} の中で open である。

Lemma 2. μ が abstract germ \iff

Lemma 1 の集合 A はすべて closed である。

Proposition 2. μ が Hausdorff space X の上の elementary system として, かつ $x \in X$ に對して $\mu(x, \cdot) : \mathcal{D}_x \rightarrow X$ が連続ならば, Lemma 1 の集合 A は closed である。したがって μ は abstract germ である。

Proposition 3. Continuous germ is abstract germ である。

Example 1. $\mathbb{R}^2 \ni (\xi, \eta)$ (位相なし) に対応して

$$l_0 = \{(\xi, 0) \mid \xi \in \mathbb{R}\}, \quad l_1 = \{(\xi, 1) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$$

とおき $l_0 \cup l_1$ の上で

$$(\xi_1, \eta_1) \sim (\xi_2, \eta_2) \stackrel{d}{\iff} \xi_1 = \xi_2 > 0 \text{ または} \\ (\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$$

と定義すれば \sim は equivalence relation である。

$X = l_0 \cup l_1 / \sim$ とおき, $x = (\xi, \eta) \in X$ に対応して

$$\mathcal{D}_x = \begin{array}{ll} (-\infty, \infty) & \xi \leq 0 \\ (-\xi, \infty) & \xi > 0 \end{array}$$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{D}_x$$

$$\mu((\xi, \eta), t) = (\xi + t, \eta), \quad ((\xi, \eta), t) \in \mathcal{D}$$

とすれば μ は X の上の elementary system であるから, abstract germ ではない。

§ 3. Main Theorem.

Proposition 4. 集合 X の上の abstract germs 全体の族を Φ とする。 $\mu_1, \mu_2 \in \Phi$ に対応して

$$\mu^1 \ll \mu^2 \stackrel{d}{\iff} \mathcal{D}^1 \subset \mathcal{D}^2, \quad \mu_1 = \mu_2 |_{\mathcal{D}^1}$$

とすれば, \ll は Φ の上の partial order である。

Lemma 3. μ, μ', μ^2 を同じ集合 X の上の abst. germs とする。 $\mu \ll \mu'$ か $\mu \ll \mu^2$ ならば、 Φ の中に $\sup(\mu', \mu^2)$ がある。

Lemma 4. Φ^* を Φ の部分で \ll によって directed なるものとするならば、 Φ の中に $\sup \Phi^*$ がある。

Proposition 5. μ^0 を \rightarrow の abst. germ とするとき $\mu^0 \ll \mu$ なる μ 全体の集合を Φ^0 とすれば、 Φ^0 の中に $\sup \Phi^0$ がある。

Lemma 5. μ が abstract germ で abstract system でなければ $\mu \leq_{\neq} \mu^*$ なる abstract germ がある。

Theorem 1. μ を X の上の abst. germ とすると、 X の上の abst system π で

$\pi|_{\mathcal{D}} = \mu$ なるものは、 \rightarrow あって \rightarrow にかきける。

(π を μ によって張られる abstract system とする)。

Theorem 2. π を abst. germ μ によって張られる abst. system とする。 $x_0 \in X$ とすると、 \mathbb{Z} の index を持つ \mathcal{D} 内の \rightarrow の chains

$(\tau_k, \sigma_k), (\tau_k, \sigma_k)$ $k \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$(1) \quad \mu(\tau_{k-1}, \tau_{k-1}) = \mu(\tau_k, \sigma_k),$$

(2) 任意の $t \in D_x$ に対し, $k \in \mathbb{Z}$ と $\tau \in \mathcal{D}_{x_k}$ が存在して

$$\pi(x_0, t) = \mu(x_k, \tau).$$

参考. π を continuous germ μ で張られる continuous system とする. $x_0 \in X$ とする. 正負の整数を index とする \mathcal{D} の中の chain

(x_k, τ_k) が存在して

$$(1) \quad \mu(x_k, \tau_k) = x_{k+1},$$

(2) 任意の $t \in D_{x_0}$ に対し, $k \in \mathbb{Z}$ と $\tau \in \mathcal{D}_{x_k}$ が存在して

$$\pi(x_0, t) = \mu(x_k, \tau).$$

Example 2. $X = \mathbb{R}$ とし, すべての $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対し $\mathcal{D}_x = \{t \mid |t| < \frac{1}{2}|x|\}$ とおき, さらに $\mathcal{D}_0 = (-1, 1)$ とし $\mathcal{D} = \bigcup \{x\} \times \mathcal{D}_x$ とする.

$\mu: \mathcal{D} \rightarrow X$ を $\mu(x, t) = x + t$ と定義すれば,

μ は abstract germ である. μ の張る abstr.

system π は $\pi: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, $\pi(x, t) = x + t$ で与えられる. 定理 2 の chains はあるか, 参考で述べた sequence はない.

References

- [1] Ahmad, S., On Ura's Axioms and Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 181 - 191.
- [2] Hájek, O., Structure of Dynamical Systems, Comment. Math. Univ. Carolinae, 6 (1965), 53 - 72.
- [3] Hájek, O., Local Characterization of Local Semi-dynamical Systems, Math. Syst. Theory, 2 (1968), 17 - 25.
- [4] Hájek, O., Dynamical Systems in the Plane, Academic Press, London and New York, 1968.
- [5] 浦 太郎: 特性曲線の延長と安定の問題,
数学, 第9巻 (1958), 137 - 148, 218 - 235.
- [6] Ura, T., Sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, Funkcial. Ekvac., 2 (1959), 143 - 200.
- [7] Ura, T., On Local Determinacy of Abstract Local Dynamical Systems (in preparation).