数理解析研究所講究録
第213巻 1974年 64-83

順序機械と有向グラフのツアー

東北大　工学部　浅野　孝夫
渋井　理郎
高浪　五男

1. まえがき

順序機械の故障診断問題に対する従来の主たる研究は、与えられた順序機械の最短な故障検査系列をいかにして求めるかについてなされている。この論文では、ツアーの概念を用いて、p-状態r-入力強連結順序機械のクラス$\mathfrak{M}_p^r$に対して、故障検査系列の最短長の極めてよい上界を与えている。同時に$\mathfrak{M}_p^r$のツアーの長さの上限も与えている。これらは、順序機械の故障検査系列を求める際、一つの基準になるものと思われる。$r=2, r=\infty$の場合はやや不完全なところもあるが、すでにA.K. Dewdney とA.L. Szilard によって同様の議論がなされている。[2]

2. 諸定義と基本的概念

［定義1］ 有限状態ムーア型機械(ムーア型機械)Mとは 5組の

順序対$M=(I,O,S,\alpha,\beta)$であり，$I,O,S\neq\phi$ でIは可算入力集合，Oは有限出力集合，Sは有限状態集合，α は$\alpha:S\times I\to S$なる状態遷移関数，βは$\beta:S\to O$なる出力関数である。■

$M(s)$は初期状態sのムーア型機械を表わす。Mの任意の状態s,s'に対して、sからs'に向わせる入力系列が存在するとき、Mを強連結という。

次の有向グラフに関する定義は文献1に基ずくもので、特に説明のない用語は文献1を参照してもらいたい。

〔定義2〕 有向グラフDとは2組の順序対$D=(V(D),X(D))$であり、$V(D)\neq\phi$, $V(D)\cap X(D)=\phi$で$V(D)$は有限点集合，$X(D)$は有限有向線集合で $X(D)\subseteq V(D)\times V(D)-\{(v,v)\mid v\in V(D)\}$である。■

$x=(u,v)\in X(D)$のとき、$x^+=u$を有向線xの始点，$x^-=v$を終点という。$v\in V(D)$の出次数$d^+(v)$は$d^+(v)=|\{x\in X(D)\mid x^+=v\}|$である。$W=v_0x_1v_1\cdots v_{n-1}x_nv_n$で各$x_i$が$x_i^+=v_{i-1}$, $x_i^-=v_i$のときWを有向遊歩道といい，各x_iが$x_i^+=v_{i-1}$ $x_i^-=v_i$ か$x_i^-=v_{i-1}$, $x_i^+=v_i$ のいずれかであるときWを半遊歩道という。Wに含まれる有向線の総数をWの長さ$l(W)$という。WがDのすべての点を含むとき、WはDを生成するという。有向遊歩道$W=v_0x_1v_1\cdots v_{n-1}x_nv_n$で$v_0=v_n$のとき$W$を閉路という。$v_0=v_n$で$v_0,\cdots,v_{n-1}$がすべて相異なるとき，$W$をサーキットという。$D$の任意の2点を結ぶ有向遊歩道が存在するとき$D$を強連結といい、半遊歩道が

存在するときDを連結という。有向グラフ $D=(V,X)$、$D'=(V',X')$ で $V'\subseteq V$、$X'\subseteq X$ のとき、$D'\subseteq D$ で D' をDの部分グラフという。Dの極大な連結部分グラフをDの連結成分という。

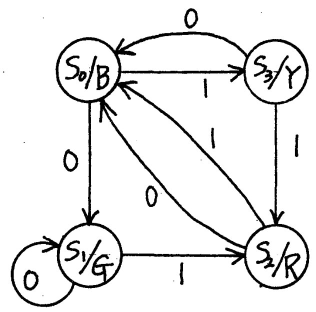
〔定義3〕ムーア型機械 $M=(I,O,S,\alpha,\beta)$ と有向グラフ $D_M=(V,X)$ で、$\varphi: S\rightarrow V$ なる全単射関数 φ が存在して、$X=\{(\varphi(s),\varphi(s'))\mid \exists i\in I,\ \alpha(si)=s'\neq s\}$ のとき、D_M をMの連結性グラフという■

$|I|=r$, $|S|=p$ ならば D_M で $|V|=p$, $|X|\leq pr$ であり、Vの各点 v で $d^+(v)\leq r$ である。また任意の有向グラフはあるムーア型機械の連結性グラフになる。Mが強連結であるための必要十分条件は D_M が強連結なことである。

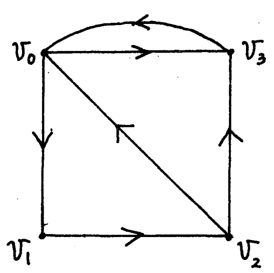
〔定義4〕$M(s)$ ですべての状態を通らせる最短入力系列を $M(s)$ の最短検査系列(長さ $\delta(M(s))$)という。S のすべての s で $M(s)$ の最短検査系列を考え、その中で最短なものをMの最短検査系列(長さ $\delta(M)$)という。$\delta(M)=\min\{\delta(M(s))\mid s\in S\}$ である。■

例

S \ I	0 $\alpha(s0)$	1 $\alpha(s1)$	$\beta(s)$
s_0	s_1	s_3	B
s_1	s_1	s_2	G
s_2	s_0	s_0	R
s_3	s_0	s_2	Y



M



D_M

$M(s_0)$ の最短検査系列 $\Delta=0101$　　対応する状態と遷移枝

の系列T　$T = s_0(s_0\,0)s_1(s_1\,1)s_2(s_2\,0)s_0(s_0\,1)s_3$

対応する出力系列　BGRBY

例からもわかるように$M(s)$に$M(s)$の最短検査系列$\Delta = i_1 \cdots i_n$を入力すれば、それに対応して状態と遷移枝の系列$(s=)s_0(s_0 i_1)s_1 \cdots (s_{n-1} i_n)s_n$が得られ、$\alpha$に故障がなければこの系列に$\beta$の定義域となる$\mathcal{S}$のすべての元が出現するので$\beta(s_0)\beta(s_1)\cdots\beta(s_n)$と実際の出力系列を比較して$\beta$のどの部分に故障があるかを診断できる。この意味で$M(s)$及び$M$の最短検査系列を求めることは重要である。しかし、一般に最短検査系列を求めることは非常に困難である。そこで$\mathfrak{M}_p^r$（p-状態r-入力強連結ムーア型機械のクラス）に対して、最短検査系列の長さの上限$\delta(\mathfrak{M}_p^r) = \sup\{\delta(M) \mid M \in \mathfrak{M}_p^r\}$ 及び $\delta(\overline{\mathfrak{M}}_p^r) = \sup\{\delta(M(s)) \mid M=(I,O,\mathcal{S},\alpha,\beta)\in\mathfrak{M}_p^r, s\in\mathcal{S}\}$を求めておけば、$M(\in\mathfrak{M}_p^r)$の最短検査系列及び$M(s)$の最短検査系列を見つける際、非常に有意義であると思われる。

例の図からもわかるように、$M(s)$の最短検査系列とD_Mの$\varphi(s)$から始まりD_Mを生成する最短有向遊歩道には対応が存在する。同様にMの最短検査系列とD_Mを生成する最短有向遊歩道が対応する。その長さをそれぞれ$\delta(D_M(\varphi(s)))$, $\delta(D_M)$とすれば、$\delta(D_M) = \delta(M)$, $\delta(D_M(\varphi(s))) = \delta(M(s))$である。$\mathfrak{D}_p^r = \{D_M \mid M\in\mathfrak{M}_p^r\}$とすれば連結性グラフの定義より、$\mathfrak{D}_p^r = \{D \mid D=(V,X)$ は強連結有向グラフで$|V|=p,\ \forall v\in V,\ d^+(v)\le r\}$となる。上記のことより$\delta(\mathfrak{D}_p^r) =$

$\sup\{\delta(D) \mid D \in \mathfrak{D}_p^r\}$, $\delta(\overline{\mathfrak{D}}_p^r) = \sup\{\delta(D(v)) \mid D=(V,X) \in \mathfrak{D}_p^r \ v \in V\}$ とすれば、$\delta(\mathfrak{M}_p^r) = \delta(\mathfrak{D}_p^r)$, $\delta(\overline{\mathfrak{M}}_p^r) = \delta(\overline{\mathfrak{D}}_p^r)$ である。よって $\mathfrak{D}_p^r$ で考えてよいことがわかる。この値を求めるためツアーを考える。

［定義5］ Mのある初期状態から出発させすべての状態を通らせ初期状態に戻す入力系列で最短なものをMのツアーと呼び、その長さを $\delta'(M)$ で表わす。■

［定義5′］ 有向グラフDのツアーとはDを生成する最短の閉路で、その長さを $\delta'(D)$ と表わす。■

Mが強連結ならばツアーが存在し、従って最短検査系列が存在する。最短検査系列の場合と同様ツアーでも $\delta'(M)=\delta'(D_M)$ となり、$\delta'(\mathfrak{M}_p^r) = \sup\{\delta'(M) \mid M \in \mathfrak{M}_p^r\}$ $\delta'(\mathfrak{D}_p^r) = \sup\{\delta'(D) \mid D \in \mathfrak{D}_p^r\}$ とすれば、$\delta'(\mathfrak{M}_p^r) = \delta'(\mathfrak{D}_p^r)$ となり、これを用いて $\delta(\mathfrak{D}_p^r)$, $\delta(\overline{\mathfrak{D}}_p^r)$ を求める。なお $W = v_0 x_1 v_1 \cdots v_{n-1} x_n v_0$ がツアーならば、$W' = v_i x_i v_{i+1} \cdots \cdots v_{n-1} x_n v_0 x_1 v_1 \cdots v_{i-1} x_i v_i$ もツアーとなる。Dが強連結でDのツアーがサーキットでDのすべての有向線を含むときDをサーキットという。

3．$\delta'(\mathfrak{D}_p^r)$ の決定

［定義6］ 有向グラフ $D=(V,X)$ で f が $f: X \to N$ (N は非負整数の集合) なる関数のとき、f をDの半鎖という。■

$\mathrm{vol}\, f = \sum_{x \in X} f(x)$ を f の容量という。Dの半鎖 f, g で $h_1 = f+g$ を $h_1(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in X)$ で定義する。Xのすべての x で $f(x) \geqq g(x)$

ならば$f \geqq g$といい，$f \geqq g$であるxで$f(x) > g(x)$ならば$f > g$という。$f \geqq g$のとき、$h_2 = f - g$を$h_2(x) = f(x) - g(x)\ (x \in X)$で定義する。$X$のすべての$x$で$f(x) = k$（一定）ならば、$f = k$と表わす。$f > 0$のとき$|f| = (V(|f|), X(|f|))$を$f$の台グラフと呼び、$|f| \subseteq D$で

$X(|f|) = \{x \mid x \in X, f(x) > 0\}$　$V(|f|) = \{v \in V \mid \exists x \in X(|f|), v = x^+ \text{ or } v = x^-\}$

である。半鎖cが$0 < c \leqq 1$で$|c|$がサーキットのときcをサーキット半鎖という。有向グラフD, D'（$D' \subseteq D$）でDの半鎖をf, g、D'の半鎖をf', g'とする。$f'(x) = f(x)\ (x \in X(D'))$のとき$f'$を$f$の$D'$への制限といい、$g(x) = g'(x)\ (x \in X(D'))$，$g(x) = 0\ (x \in X(D) - X(D'))$のとき$g$を$g'$の$D$への拡張という。$\mathrm{vol}\, g = \mathrm{vol}\, g'$である。

［定義7］　強連結有向グラフ$D = (V, X)$の半鎖fが次の条件1、2、3、4をみたすとき、fをDの強循環という。

1. Vの各点vで　$\sum_{x^+ = v} f(x) = \sum_{x^- = v} f(x)$
2. $V(|f|) = V$　　3. $|f|$は連結
4. 1、2、3の条件をみたすDの任意の半鎖gに対して

　$\mathrm{vol}\, f \leqq \mathrm{vol}\, g$ ∎

上の条件1をみたすDの半鎖fに対して、$f(v) = \sum_{x^+ = v} f(x)$とすれば、$\mathrm{vol}\, f = \sum_{v \in V(D)} f(v)$となる。$D$の有向遊歩道$W$に対して、$W$の中に有向線$x$が$k_x$回出現すれば$f_W(x) = k_x$として$f_W$を定義すれば、$f_W$は$D$の半鎖となり$\mathrm{vol}\, f_W = l(W)$である。

［定理1］　Dを強連結有向グラフとする。fがDの強循環で

あるための必要十分条件は $f_T=f$ となるDのツアーTが存在することである。

(証明) f をDの強循環とすれば、条件1,2,3より各有向線 x を $f(x)$ 回通りDを生成する閉路Tが存在する[1]。$f_T=f$ で $l(T)=\mathrm{vol}\,f$ である。T' をDのツアーとすれば $l(T')\leq l(T)$ であり、$f_{T'}$ は強循環の条件1,2,3をみたし $\mathrm{vol}\,f\leq\mathrm{vol}\,f_{T'}$ であり、これより

$$l(T)=\mathrm{vol}\,f\leq\mathrm{vol}\,f_{T'}=l(T')\leq l(T)$$

となり $l(T)=l(T')$ でTもDのツアーである。

逆にDのツアーをTとすれば f_T は強循環の条件1,2,3をみたす。f' をDの強循環とすれば $\mathrm{vol}\,f'\leq\mathrm{vol}\,f_T$ であり、f' に対応してDを生成する閉路を T' とすれば $l(T)\leq l(T')$ であり、これより

$$\mathrm{vol}\,f_T=l(T)\leq l(T')=\mathrm{vol}\,f'\leq\mathrm{vol}\,f_T$$

よって $\mathrm{vol}\,f_T=\mathrm{vol}\,f'$ となり f_T はDの強循環である。■

この定理より $\delta(\mathcal{D}_p^r)$ は $\mathcal{D}_p^r$ の強循環の容量の上限となる。Dの強循環が f で $|f|=D$ のときDを強循環グラフという。$\mathcal{D}_p^r$ の任意の元 D' に対し D' の強循環を f' とし $|f'|=D$ とすれば、f' のDへの制限 f は $|f|=D$ でDの強循環となり $\mathrm{vol}\,f=\mathrm{vol}\,f'$ である。よって $\delta(\mathcal{D}_p^r)$ を求める際、$\mathcal{D}_p^r$ の強循環グラフで議論してよい。$\mathcal{D}_p^r$ は強連結な有向グラフのクラスだから、$p\geqq 2$ で考える。

〔定理2〕 Dを強循環グラフ、f をDの強循環、$|f|=D$ とする。このとき f はサーキット半鎖であるか、そうでないときはサ

ーキット半鎖Cが存在して、$|f-C|$が強循環グラフとなり$f-C$の$|f-C|$への制限$(f-C)'$が$|f-C|$の強循環となる。

(証明) fをサーキット半鎖でないとすれば、定理1より$f_T=f$となるツアーTが存在してTはサーキットではない。$T=u_1x_1u_2\cdots u_nx_nu_1$とすれば、Tにサーキット$u_ix_iu_{i+1}\cdots u_{j-1}x_{j-1}u_j(=u_i)$が含まれ、これに対応するサーキット半鎖をCとすれば$f-C\neq 0$であり$|f-C|$で$T'=u_1x_1u_2\cdots u_ix_ju_{j+1}\cdots u_nx_nu_1$はすべての点を含み、$|f-C|$は強連結となる。$(f-C)'$は$|f-C|$の強循環の条件1.2.3をみたすので、$g'$を$|f-C|$の強循環とすれば$\mathrm{vol}\,g'\leqq \mathrm{vol}(f-C)'$である。$g'$のDへの拡張を$g$とすれば$g+C$はDの強循環の条件1.2.3をみたすので$\mathrm{vol}\,f\leqq \mathrm{vol}(g+C)$となる。この二式と、

$\mathrm{vol}(g+C)=\mathrm{vol}\,g+\mathrm{vol}\,C=\mathrm{vol}\,g'+\mathrm{vol}\,C$, $\mathrm{vol}(f-C)'=\mathrm{vol}(f-C)=\mathrm{vol}\,f-\mathrm{vol}\,C$

を用いて$\mathrm{vol}(f-C)'=\mathrm{vol}\,g'$となり、$(f-C)'$は$|f-C|$の強循環で$|(f-C)'|=|f-C|$より$|f-C|$は強循環グラフとなる。■

[定理3] Dを強循環グラフ、fをDの強循環、$|f|=D$とする。このときfはサーキット半鎖の和$f=C_1+\cdots+C_n$に分解できる。

この証明は定理2を用いて簡単にできる。各C_iとC_jは可換であるので、一般に$|f-C_1|$は連結と限らない。$f(v)=k$のとき、$C_1,\cdots,C_n$のk個のサーキット半鎖で$C^1(v)=\cdots=C^k(v)=1$となる。

[補助定理1] Dを強循環グラフ、fをDの強循環、$|f|=D$ $f=C_1+\cdots+C_n$とする。$f-C_1\neq 0$とし$|f-C_1|$の各連結成分を$D_1,\cdots,D_\ell$

とする。f_jを$f-c_1$のD_jへの制限とする。このとき各D_jは強循環グラフであり、f_jがD_jの強循環で$|f_j|=D_j$である。

(証明) $f-c_1$はDの強循環の条件1をみたすので各D_jは強連結である。f_jのDへの拡張をf_j'とすれば、$x\in X(D_j)$で$f_j(x)=f_j'(x)=(f-c_1)(x)>0$であり、$x\in X(D)-X(D_j)$では$f_j'(x)=0$より$|f_j|=|f_j'|=D_j$であり、$f-c_1=f_1'+\cdots+f_l'$となる。$D_j$の強循環を$g_j$とし$g_j$のDへの拡張を$g_j'$とすれば、$f_j$は$D_j$の強循環の条件1,2,3をみたすので、

$vol\, g_j \leqslant vol\, f_j \quad (j=1,\cdots,l)$ ……①

また$g=c_1+g_1'+\cdots+g_l'$はDの強循環の条件1,2,3をみたすので、

$vol\, f \leqslant vol\, g$ ------②

①②と$vol\, f = vol\, c_1+vol\, f_1+\cdots+vol\, f_l$, $vol\, g = vol\, c_1+vol\, g_1+\cdots+vol\, g_l$ とを用いて、 $vol\, g_j = vol\, f_j \ (j=1,\cdots l)$

よってf_jはD_jの強循環であり、D_jは強循環グラフである。■

[補助定理2] $D\in\mathcal{D}_p^r$でDを強循環グラフ, fをDの強循環$|f|=D$、$f=c_1+\cdots+c_n$で$n\geqslant 2$とする。このとき $2\leqslant d^+(v)=f(v)\leqslant r$ となる点vが存在する。

(証明) $n\geqslant 2$より、$r\geqslant d^+(v)\geqslant 2$となる点$v$が必ず存在する。命題が成立しないとすれば、$d^+(v)\geqslant 2$となるすべての$v$で$f(v)>d^+(v)$ ($|f|=D$より$d^+(v)\geqslant f(v)$だから)となる。そのような点の一つをu_1とする。$2\leqslant d^+(u_1)\leqslant r$ かつ $f(u_1)>d^+(u_1)$である。u_1から始まる$f(x_i)\geqslant 2$, $f(u_i)\geqslant 2$の無限有向遊歩道$W=u_1x_1u_2\cdots u_nx_nu_{n+1}\cdots$を考え

る。$d^+(u_n)=1$ なら u_n を始点とする有向線を x_n とし x_n の終点を u_{n+1} とする。$d^+(u_n)\geqq 2$ なら u_n を始点とする有向線で f の値の最大なものを x_n とし x_n の終点を u_{n+1} とする。いずれの場合も $f(u_n)\geqq 2$ ならば $f(x_n)\geqq 2$, $f(u_{n+1})\geqq 2$ となる。$f(u_1)\geqq 2$ だからすべての n で $f(u_n)\geqq 2$, $f(x_n)\geqq 2$ となる。$V(D)$ は有限だからある $u_i x_i u_{i+1}\cdots u_{j-1} x_{j-1} u_j$ ($u_j=u_i$) でサーキットを形成し対応するサーキット半鎖を C とすれば、$|C|$ に含まれる有向線 x に対し、$(f-C)(x)=f(x)-1>0$ であり、$|C|$ に含まれない x に対し、$(f-C)(x)=f(x)>0$ となる。これより $|f-C|=D$ であり、$f-C$ は D の強循環の条件1,2,3をみたして、

$$\mathrm{vol}(f-C)<\mathrm{vol}\,f$$

となる。これは f が D の強循環であることに矛盾する。∎

［定理4］ $D\in\mathfrak{D}_p^r$ で D を強循環グラフ、f を D の強循環、$|f|=D$、$f=C_1+\cdots+C_n$ とする。各 C_i に対して $V(|C_i|)-V(|f-C_i|)\neq\phi$ とし、$i\leqq j$ ならば $f(v_i)\leqq f(v_j)$ となるように $V(D)$ の点を並べる。このとき $n=1$ ならすべての点 v で $f(v)=1$ である。$n\geqq 2$ ならば

1、$1\leqq k\leqq n$ の各 k で　$f(v_k)=1$

2、$0\leqq i\leqq j$ のすべての i で $f(v_{n+i})=1$ で $f(v_{n+j+1})\neq 1$ とすれば

$$1\leqq k\leqq p-(n+j) \text{ の各 } k \text{ で}\quad f(v_{n+j+k})\leqq k(r-1)+1$$

（証明） $r=1$ のとき $n=1$ となりすべての点で $f(v)=1$ である。$r\geqq 2$ では n に関する帰納法を用いる。$n=1$ では明らかである。$2\leqq n\leqq r$ のとき $f(v)\geqq d^+(v)\geqq 2$ となる点が存在する。各 i に対

て $v_i \in V(|C_i|)-V(|f-C_i|)$ とすれば1の部分はつねに成立する。またすべての v で $f(v)\leqq n \leqq r-1+1$ より2の部分も成立する。

$n(>r)$ 未満で命題が成立して n で初めて成立しなかったと仮定する。そのような D, f を考える。各 i で $v_i \in V(|C_i|)-V(|f-C_i|)$ とすれば1の部分はつねに成立する。よって2の部分が成立しない。v_{n+j+1} から数えて m 番目の v_{n+j+m} で初めて2の部分が成立しなかったとする。v_{n+j+m} の存在は仮定より明らか。よって

$f(v_{n+j+m}) > m(r-1)+1$, $f(v_{n+j+k}) \leqq k(r-1)+1$ $(1\leqq k\leqq m-1)$

となる。補助定理2より $2\leqq d^+(v)=f(v)\leqq r$ となる点が存在するので $2\leqq f(v_{n+j+1})=a\leqq r$ となり $m\geqq 2$ となる。v_{n+j+1} を含むサーキットを $|C_1|\cdots|C_a|$ とすれば、$C_1(v_{n+j+1})=\cdots=C_a(v_{n+j+1})=1$ となる。$f'=f-(C_1+\cdots+C_{a-1})$ と定義する。$|f'|$ の連結成分を $D_1,\cdots,D_k$ とし、f' の D_i への制限を f_i とする。補助定理1を用いて、各 D_i が強循環グラフで f_i が D_i の強循環で $|f_i|=D_i$ となることがわかる。$m'\geqq m$ ならば、$f'(v_{n+j+m'})\geqq f(v_{n+j+m'})-(a-1)>m(r-1)+1-(a-1)\geqq(m-1)(r-1)+1$ だから $\{v \mid v=v_{n+j+m'}\ m'\geqq m\}$ で f' の値の最小のものを u とすれば

$$f'(u)>(m-1)(r-1)+1 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。u を含む強連結成分を D_1 とする。$f'=C_a+\cdots+C_n$ であるから f_1 の D への拡張 f_1' は $C_a\cdots C_n$ のいくつかのサーキット半鎖の和として表現される。$f_1'=C_1'+\cdots+C_{n_1}'$ で $n_1<n$ である。$V(D)$ の点を $i\leqq j$ ならば $f(u_i)\leqq f(u_j)$ かつ $u=u_S$ のとき $s<S$ ならば $f(u_s)$

$< f'(u_s)$ となるように並べる。この点列で $\{v_{n+j+k} \mid 1\leqslant k\leqslant m-1\}$ の各点は $f'(v_{n+j+k})\leqslant f(v_{n+j+k})\leqslant k(r-1)+1\leqslant (m-1)(r-1)+1< f'(u)$ であり $f(u)>1$ であるので、$v_1,\cdots,v_{n+j+m-1}$ の各点はこの系列で u より前にくる。また $\{v_{n+j+m'} \mid m'\geqslant m\}$ の u と異なる各点 v は、$f'(u)\leqslant f'(v)$ より u より後にくる。$f'(v_{n+j+1})=1$ だからこの点列で u より前にきて f' の値が2以上の点は高々 $m-2$ 個である。$V(D_1)$ の点をこの順序関係で並べる。それを $u'_1,\cdots,u'_{p_1}$ とする。$V(D_1)$ の点に関しては $f'=f'_1=f_1=C'_1+\cdots+C'_{n_1}$ である。$u'_i\in V(|C'_i|)-V(|f-C'_i|)$ とすれば f_1 で1の部分は成立する。また $f_1(u)>1$ より $f_1(v)\neq 1$ となる最初の点を $u'_{n_1+j_1+1}$ とすれば、$u=u_{n_1+j_1+m'}$ となり上の議論より $m'\leqslant m-1$ である。D_1, f_1 は命題の条件をみたし $n_1<n$ だから帰納法の仮定より命題が成立する。

$$f'(u)=f_1(u)=f_1(u_{n_1+j_1+m'})\leqslant m'(r-1)+1\leqslant (m-1)(r-1)+1 \quad \cdots ②$$

①②よりこれは矛盾である。よって命題は $n\geqslant 1$ で成立する。■

$k\leqslant x<k+1$ (k 整数) のとき $[x]=k$ とし $[\frac{0}{0}]=0$ と定義する。

[補助定理3] $D\in \mathcal{D}_p^r$ で D を強循環グラフ、f を D の強循環、$|f|=D$、$f=C_1+\cdots+C_n$ で各 C_i に対して $V(|C_i|)-V(|f-C_i|)\neq\phi$ とする。このとき、$p\geqslant n+\left[\frac{n-1}{r-1}\right]$ である。

(証明) $r=1$ では $n=1$ となり $p\geqslant 2$ だから命題が成立する。$r\geqslant 2$ では、$v_i\in V(|C_i|)-V(|f-C_i|)$ とすれば $D'=D-\{v_1,\cdots,v_n\}$ は連結となる[(1)]。D' の有向線の総数を l' とすれば D' は連結であるので

$l' \geqq p-n-1$ [1] である。$p=n+[\frac{n-1}{r-1}]-t$ $(t \geqq 1)$ とする。Dで$V(D')$の各点の出次数は高々rだから、$V(D')$から出ている有向線の総数lは　$l \leqq (p-n)r = ([\frac{n-1}{r-1}]-t)r$ ……①

l本のうち $(l' \leqq)$ $l-n$本が$V(D')$の点を結んでいる。

$$l-n \geqq l' \geqq p-n-1 \quad \cdots\cdots ②$$

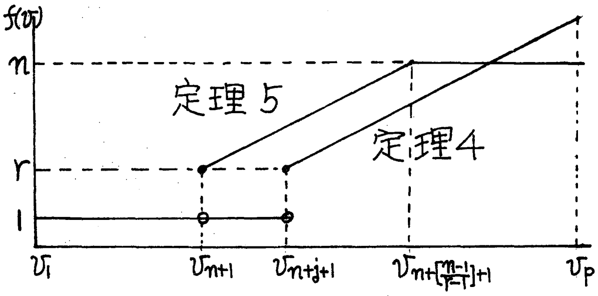
①②より　$[\frac{n-1}{r-1}](r-1) \geqq n-1+t(r-1)$ ……③

しかるに　$n-1 \geqq [\frac{n-1}{r-1}](r-1)$, $t(r-1) \geqq (r-1) > 0$ より③は矛盾。■

[定理5]　$D \in \mathcal{D}_p^r$でDを強循環グラフ, fをDの強循環、$|f|=D$ $f=C_1+\cdots+C_n$で各C_iに対して $V(|C_i|)-V(|f-C_i|) \neq \phi$ とする。$V(D)$の点を$i \leqq j$ならば$f(v_i) \leqq f(v_j)$となるように並べる。このとき

1. $1 \leqq k \leqq n$ の各kで　$f(v_k)=1$
2. $1 \leqq k \leqq [\frac{n-1}{r-1}]$ の各kで　$f(v_{n+k}) \leqq k(r-1)+1$
3. $1 \leqq k \leqq p-(n+[\frac{n-1}{r-1}])$ の各kで　$f(v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+k}) \leqq n$

(証明)　すべての点で$f(v) \leqq n$より3の部分はつねに成立。1の部分は$v_i \in V(|C_i|)-V(|f-C_i|)$とすることができるので成立する。2の部分は定理4より明らかである。■



定理4と定理5の関係を左図に示す。

定理5の条件をみたす強循環fの容量$\mathrm{vol}\, f$は　$\mathrm{vol}\, f \leqq n+\sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{r-1}]}(k(r-1)+1)+(p-(n+[\frac{n-1}{r-1}]))n = g'(n,p,r)$　である。

ここで　$h(p,r)=\sup\{g'(n,p,r) \mid 1 \leqq n+\left[\frac{n-1}{r-1}\right] \leqq p\}$ とすれば、$\mathfrak{D}_p^r$ の任意の元 D' に対して、D' の強循環 $f'=C_1'+\cdots+C_n'$ が各 C_i' で、$V(|C_i'|)-V(|f'-C_i'|) \neq \phi$ のとき、$\mathrm{vol}\, f' \leqq h(p,r)$ となる。やや複雑な計算を行うことによって、次の系1、系2が得られる。

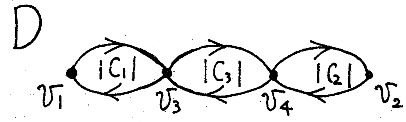
[系1]　$p=s(2(r-1)+1)+t$ $(0 \leqq t \leqq 2(r-1))$ のとき、$n=s(r-1)+1+sg(t-2)\left\{\frac{t-2}{2}\right\}$ $\left(sg(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}\quad \{x\}=-[-x]\right)$ で

$$h(p,r)=g'(n,p,r)=pn+n-n^2+\tfrac{1}{2}s(s(r-1)+r+1-2n)$$ である。

[系2]　$r=2$ ならば $p_1 \geqq 4, p_2 \geqq 5$ で、$r \geqq 3$ ならば $p_1 \geqq 3, p_2 \geqq 3$ で、

$$h(p_1+p_2,r) \geqq h(p_1,r)+h(p_2,r)+p_1+p_2-2$$ である。

証明は計算だけなので省略する。系2はこれ以上改善できない。定理5の条件をみたす強循環に対して容量の上界が、$h(p,r)$ と定まったが、一般に定理5の条件が必ずしも成立するとは限らない。右の図がその例



である。$f=C_1+C_2+C_3$ で $V(|C_3|)-V(|f-C_3|)=\phi$ である。以下このような場合も含めて議論する。

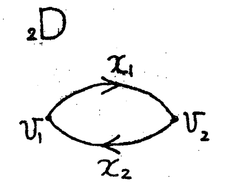
[補助定理4]　D を強循環グラフ、f を D の強循環、$|f|=D$、$f=C_1+\cdots+C_n$ で、$V(|C_i|)-V(|f-C_i|)=\phi$ となる C_i が存在するとする。このとき $|f-C_i|$ は非連結である。また $|f-C_i|$ の連結成分を $D_1,\cdots,D_l$ $(l \geqq 2)$ とし、$f-C_i$ の D_j への制限を f_j とし f_j の D への拡張を f_j とすれば、$|f-f_j|$ は強循環グラフで $f-f_j$ の $|f-f_j|$ への制限 $(f-f_j)'$ がその強循環で $|f-f_j|=|(f-f_j)'|$ である。$V(|f_j|)-V(|f-f_j|) \neq \phi$ である。

(証明) $|f-C_i|$が連結ならば、$V(|f-C_i|)=V(D)$より $f-C_i$ はDの強循環の条件1,2,3をみたし $vol(f-C_i)<vol\,f$ となり矛盾である。補助定理1より $D_j=|f_j|$ で f_j がその強循環である。Dが連結だから各 D_k は $|C_i|$ と共通点をもち $|f-f_j|$ は連結である。$(f-f_j)'$ が $|f-f_j|$ の強循環になり $|f-f_j|=|(f-f_j)'|$ となることは補助定理1の証明とほぼ同様である。また $V(|f_j|)-V(|f-f_j|)=\phi$ とすれば $V(|f-f_j|)=V(D)$ より $f-f_j$ はDの強循環の条件1.2.3をみたし $vol(f-f_j)<vol\,f$ となり、fがDの強循環ということに矛盾する。∎

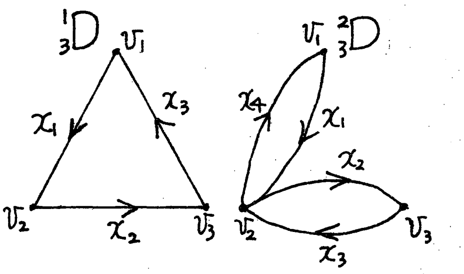
[定理6] $D\in\mathcal{D}_p^r$, Dを強循環グラフ、fをDの強循環 $|f|=D$ とする。このとき $vol\,f\leqq h(p,r)$ である。

(証明) $r=1$ のときDはサーキットになり $f=1$ で $vol\,f=p=h(p,1)$
$r\geqq 2$ ではpに関する帰納法を用いて証明する。

I) $p=2$ のとき 強循環グラフは右図の有向グラフだけである(1)。強循環fは $f=1$ となり
$vol\,f=2=h(2,r)$



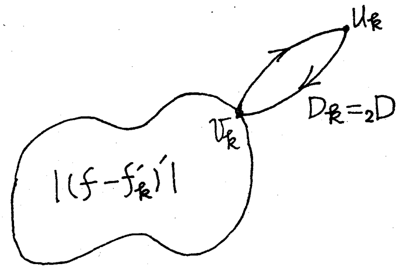
II) $p=3$ のとき 強循環グラフは ${}_3^1D$, ${}_3^2D$ の二つだけである(1)。${}_3^1D$ の強循環を f_1、${}_3^2D$ の強循環を f_2 とすれば $f_1=1$ $f_2=1$ で
$3=vol\,f_1\leqq vol\,f_2=4=h(3,r)$



III) $p(\geqq 4)$ 未満で命題が成立すると仮定してpの場合を考える。
$f=C_1+\cdots+C_n$ で各 C_i が $V(|C_i|)-V(|f-C_i|)\neq\phi$ ならば定理5より、

$\mathrm{vol}\, f \leqq h(p,r)$である。よって$f=C_1+\cdots+C_n$である$C_i$が存在して、$V(|C_i|)-V(|f-C_i|)=\phi$の場合を考える。補助定理4より$|f-C_i|$は非連結で各連結成分を$D_1,\cdots,D_\ell$とすれば$\ell \geqq 2$である。$|V(D_j)|=p_j$, $|V(|C_i|)|=p'$とすれば、$p=p_1+\cdots+p_\ell$であり、また$u_j \in V(|f_j|)-V(|f-f_j|)$より$p' \leqq p-\ell \leqq p-2$である。（なお補助定理4の記号をそのまま使用する。）

(i) $p_k=2$となる$|f_k|=D_k$が存在するとき



$u_k \in V(|f_k|)-V(|f-f_k|)$の存在により$|V(|(f-f_k)'|)|=p-1<p$となり補助定理4より$(f-f_k)'$, $|(f-f_k)'|$は帰納法の仮定をみたすので$\mathrm{vol}(f-f_k)' \leqq h(p-1,r)$となる。$\mathrm{vol}\, f=\mathrm{vol}(f-f_k)'+\mathrm{vol}\, f_k'$より$\mathrm{vol}\, f \leqq h(p-1,r)+2$　しかるに$p \geqq \ell p_k \geqq 4$であり、$p \geqq 4$のとき$h(p-1,r)+2 \leqq h(p,r)$（計算より）となるので$\mathrm{vol}\, f \leqq h(p,r)$。

(ii)′ $p_k=2$となるD_kが存在しない場合で$r \geqq 3$のとき　各p_jで$3 \leqq p_j < p$であり補助定理1よりf_j, $|f_j|=D$は帰納法の仮定をみたす。

$\mathrm{vol}\, f_j \leqq h(p_j,r)$　$(j=1,\cdots,\ell)$　となる。よって

$$\mathrm{vol}\, f=\mathrm{vol}\, C_i+\mathrm{vol}\, f_1+\cdots+\mathrm{vol}\, f_\ell \leqq p-\ell+h(p_1,r)+\cdots+h(p_\ell,r)$$

系2より、$p_a \geqq 3$, $p_b \geqq 3$で$h(p_a,r)+h(p_b,r) \leqq h(p_a+p_b,r)$だから

$$\mathrm{vol}\, f \leqq p-\ell+h(p_1,r)+\cdots+h(p_\ell,r) \leqq p-2+h(p-p_\ell,r)+h(p_\ell,r)$$

再び系2を用いて　$\mathrm{vol}\, f \leqq h(p,r)$

こうして$r \geqq 3$のとき$p \geqq 2$で命題が成立することが証明された。以後$r=2$についてのみ考える。

(ii)″ $P_k=2$ となる D_k が存在しないで $P_k=3$ となる D_k が存在するとき

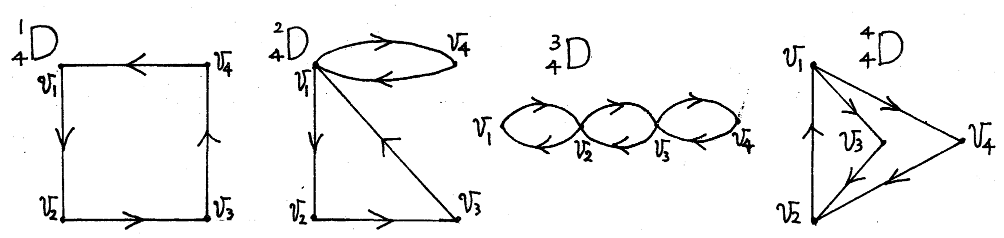
ⓐ D_k と $|C_i|$ の共通点1個のとき　$D_k={}^1_3D$　$D_k={}^2_3D$ のいずれにしても　$\mathrm{vol}\,f=\mathrm{vol}(f-f_k')'+\mathrm{vol}\,f_k \leqq h(P-2,2)+4$　となる。$P_j \geqq 3$ より、$P=P_1+\cdots+P_\ell \geqq 3\ell \geqq 6$ だから計算して　$h(P,2)\geqq h(P-2,2)+4$　より

$\mathrm{vol}\,f\leqq h(P,2)$

ⓑ D_k と $|C_i|$ の共通点が2個のとき（ⓐはないとする）$D_k={}^1_3D$ となる。$D_k={}^2_3D$ は D が強循環グラフということよりおこり得ない。　$\mathrm{vol}\,f=\mathrm{vol}(f-f_k)'+\mathrm{vol}\,f_k \leqq h(P-1,2)+3$　となる。$P\geqq 6$ だから $P=6$ と $P\geqq 7$ に分けて考える。$P\geqq 7$ では計算の結果 $h(P-1,2)+3\leqq h(P,2)$ だから　$\mathrm{vol}\,f\leqq h(P,2)$ である。$P=6$ では $P_1=3, P_2=3$　となり、D_1, D_2 は $|C_i|$ と共通点を2個もち $D_1=D_2={}^1_3D$ となる。$P'\leqq P-2=4$　より　$\mathrm{vol}\,f=\mathrm{vol}\,C_i+\mathrm{vol}\,f_1+\mathrm{vol}\,f_2\leqq 4+3+3=10$

しかるに $h(6,2)=11$ だから　$\mathrm{vol}\,f\leqq h(6,2)$

(iii) $P_k=2,3$ となる D_k が存在しなくて $P_k=4$ となる D_k が存在するとき、4点よりなる強循環グラフは $r=2$ で下の4通りだけとなる。[1]



ⓐ D_k と $|C_i|$ の共通点が1個のとき、D_k が ${}^1_4D, {}^2_4D, {}^3_4D, {}^4_4D$ のいずれであっても $\mathrm{vol}\,f=\mathrm{vol}(f-f_k)'+\mathrm{vol}\,f_k\leqq h(P-3,2)+6$　となる。各 $P_j\geqq 4$ だから $P\geqq 8$ となり $h(P,2)\geqq h(P-3,2)+6$ となり $\mathrm{vol}\,f\leqq h(P,2)$。

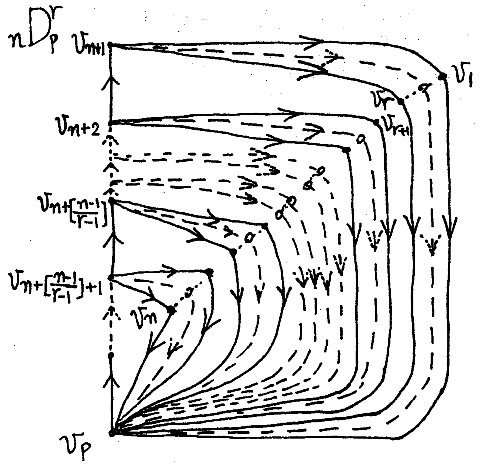
ⓑ D_kと$|C_i|$の共通点が2個のとき(ⓐはないとする) D_kが${}_4^1D, {}_4^2D, {}_4^3D,$ ${}_4^4D$ の可能ないずれであっても $vol\, f = vol(f-f_k)' + vol\, f_k' \leqq h(p-2,2)+6$

$p \geqq 8$ より $h(p-2,2)+6 \leqq h(p,2)$ だから $vol\, f \leqq h(p,2)$

ⓒ D_kと$|C_i|$の共通点が3個のとき(ⓐ,ⓑはないものとする。) $D_k = {}_4^1D$ である。(Dが強循環グラフだから他は起り得ない) $p \geqq 8$だから, $p \geqq 10$, $p=9$, $p=8$の場合に分けて考える。 $p \geqq 10$ のとき、 $vol\, f = vol(f-f_k)' + vol\, f_k \leqq h(p-1,2)+4$ であり $h(p-1,2)+4 \leqq h(p,2)$ だから $vol\, f \leqq h(p,2)$ である。 $p=9$ のとき、$p_1=p_k=4$, $p_2=5$ となり $l=2$となる。$p' \leqq p-2=7$より $vol\, f = vol\, f_1 + vol\, f_2 + vol\, C_i \leqq h(4,2)+h(5,2)+7$。系2より $h(4,2)+h(5,2)+7 \leqq h(9,2)$ だから $vol\, f \leqq h(9,2)$である。 $p=8$のとき $p_k=p_1=4$, $p_2=4$, $l=2$ となり、 $D_1=D_2={}_4^1D$ となる。$vol\, f = vol\, C_i + vol\, f_1 + vol\, f_2 \leqq 6+4+4=14$。しかるに $h(8,2)=17$ より $vol\, f \leqq h(8,2)$ である。

(iv)各$p_j \geqq 5$のとき $vol\, f = vol\, f_1 + \cdots + vol\, f_l + vol\, C_i$ だが $l \geqq 2$より $p_j < p$ だから $vol\, f_j \leqq h(p_j,2)$ $(j=1,\cdots,l)$ である。系2より $p_j \geqq 5$, $p_k \geqq 5$, $r=2$ で $h(p_j,2)+h(p_k,2) \leqq h(p_j+p_k,2)$ だから $vol\, f \leqq h(p-p_k,2)+h(p_k,2)+p-2$ となる。再び系2を用いて、 $vol\, f \leqq h(p,2)$ こうして$r=2$でも命題が成立する。∎

定理6より $\delta'(\mathscr{L}_p^r) \leqq h(p,r)$ であることがわかった。$\delta'(\mathscr{L}_p^r) = h(p,r)$なることを示すために、$g'(n,p,r)$をツアーの長さにもつ有向グラフ${}_nD_p^r$ を考える。



$_nD_p^r$ で $v_1,\cdots,v_n$ の各点 v_i で $d^+(v_i)=1$ であり v_i を始点とする有向線は v_p を終点としている。また $[\frac{n-1}{r-1}]=0$ なら v_{n+1} を始点とする有向線は $v_1,\cdots,v_n$ を終点として $d^+(v_{n+1})=n$ である。$[\frac{n-1}{r-1}]\geq 1$ なら，$v_{n+1},\cdots v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]}$ の各 v_{n+k} で $d^+(v_{n+k})=r$ であり $d^+(v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+1})=n-[\frac{n-1}{r-1}](r-1)$ である。v_{n+1} を始点とする有向線は $v_1,\cdots,v_r$ を終点とし，v_{n+k} $(2\leq k\leq[\frac{n-1}{r-1}])$ を始点とする有向線は v_{n+k-1} と $v_{(k-1)(r-1)+2},\cdots,v_{k(r-1)+1}$ を終点とする。$v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+1}$ を始点とする有向線は $v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]}$ と $v_{[\frac{n-1}{r-1}](r-1)+2},\cdots v_n$ を終点とする。$[\frac{n-1}{r-1}]\geq 0$ で $v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+2},\cdots,v_p$ の各 $v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+k}$ で $d^+(v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+k})=1$ であり，$v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+k}$ を始点とする有向線は $v_{n+[\frac{n-1}{r-1}]+k-1}$ を終点とする。$_nD_p^r$ のツアーの長さが $g(n,p,r)$ になることは明らかである。$p=s(2(r-1)+1)+t$ $(0\leq t\leq 2(r-1))$ のとき $n_0=s(r-1)+1+sg(t-2)\{\frac{t-2}{2}\}$ とすれば $_{n_0}D_p^r$ のツアーの長さは $h(p,r)$ になる。こうして $\delta(\mathfrak{M}_p^r)=\delta(\mathfrak{D}_p^r)=h(p,r)$ となることが示された。

4. $\delta(\mathfrak{M}_p^r)$, $\delta(\overline{\mathfrak{M}}_p^r)$ について

$D\in\mathfrak{D}_p^r$ のツアーは D を生成する最短有向遊歩道より少なくとも1長い。よって $\delta(\mathfrak{D}_p^r)\leq\delta(\overline{\mathfrak{D}}_p^r)\leq\delta(\mathfrak{D}_p^r)-1=h(p,r)-1$ である。しかるに $_{n_0}D_p^r$ で v_p から出発して $_{n_0}D_p^r$ を生成する最短有向遊歩道の長さは $h(p,r)-1$ となる。よって $\delta(\overline{\mathfrak{M}}_p^r)=\delta(\overline{\mathfrak{D}}_p^r)=h(p,r)-1$

となる。$\delta(\mathscr{L}_p^r)$に対しては $r=1$ で $\delta(\mathscr{L}_p^1)=p-1$, $p=2$ で $\delta(\mathscr{L}_2^r)=1$ なることは明らか。$r\geqq 2,\ p\geqq 3$ では $n\geqq 2$ のとき ${}_nD_p^r$ を生成する最短有向遊歩道は v_1 から v_2 に向うもので、その長さは $g'(n,p,r)-(p-n+1)$ となる。$h'(p,r)=\max\{g'(n,p,r)-p+n-1 \mid 2\leqq n+[\frac{n-1}{r-1}]\leqq p\}$ とする。$n=1$ のとき ${}_1D_p^r$ を生成する最短有向遊歩道の長さは $p-1$ である。$r\geqq 2,\ p\geqq 3$ では $h'(p,r)\geqq g'(2,p,r)-p+1\geqq p-1$ となり $\{{}_nD_p^r \mid 1\leqq n+[\frac{n-1}{r-1}]\leqq p\}$ の有向グラフを生成する最短有向遊歩道の長さの最大値は $h'(p,r)$ である。われわれは $r\geqq 2,\ p\geqq 3$ では

$$\delta(\mathscr{L}_p^r)=\delta(\mathfrak{M}_p^r)=h'(p,r)$$

と予想する。計算は省略するが、$p=s(2(r-1)+1)+t\ \ (0\leqq t\leqq 2(r-1))$ で $p\geqq 3,\ r\geqq 2$ のとき $n_0'=s(r-1)+1+sg(t-1)\{\frac{t-1}{2}\}$ で

$$h'(p,r)=g'(n_0',p,r)-p+n_0'-1=p(n_0'-1)+2n_0-n_0^2-1+\frac{1}{2}s(s(r-1)+r+1-2n_0')$$

（むすび） $\delta'(\mathfrak{M}_p^r)=\delta'(\mathscr{L}_p^r)$, $\delta(\overline{\mathfrak{M}}_p^r)=\delta(\overline{\mathscr{L}}_p^r)$ は決定できたが、$\delta(\mathfrak{M}_p^r)=\delta(\mathscr{L}_p^r)$については予想を提案するにとどまった。今後に残された問題は$\delta(\mathfrak{M}_p^r)$の決定と、順序機械の最短検査系列を求めるアルゴリズムを見つけることである。

最後になりましたが日頃適切なご指導をして下さいました、斎藤伸自教授、本多波雄教授、那須正和助教授、西関隆夫氏に深く感謝致します。

（参考文献） (1) F. Harary "Graph Theory" Addison-Wesley 1969

(2) A.K. Dewdney and A.L. Szilard "Tours in Machines and Digraphs" IEEE. Trans. Comput., vol C-22 July 1973 P.P. 635－639