数理解析研究所講究録
第213巻 1974年 123-152



# プッシュダウンオートマトンに対応する無限状態オートマトンの性質

京大 工　　山崎 進　上林 弥彦

## 1 まえがき

有限オートマトンに関連した問題は，それが決定可能であるために，従来から種々議論されてきたが，無限の状態をもつオートマトン（プッシュダウンオートマトン等）の各クラスでは，主として受理または生成される系列集合の性質が，扱われてきた．われわれは有限オートマトンにおける種々の問題が，どのクラスの無限の状態をもつオートマトンにまで拡張できるかという点に興味をもち，まずプッシュダウンオートマトンに対応して，無限状態オートマトンを考え，そのオートマトンの性質，とくにそのオートマトンの状態の制御を中心に考察した．

ここでは，先に，プッシュダウンオートマトンのスタック上の系列集合の性質を明らかにし，これを基礎に，プッシュダウンオートマトンに対応する，可算無限個の状態をもつ無

限状態オートマトンを定義し，そのオートマトンの状態間の制御について論じ，プッシュダウンオートマトンの2つの状態において一方から他方へ制御可能であるかどうかを決定する1つのアルゴリズムを示す．また制御可能な場合，その制御系列全体は文脈自由形言語になるが，その最短系列を求める1つのアルゴリズムを与える．さらに無限状態オートマトンのある種の部分オートマトンの性質の1つとして，その強連結性が決定できるかどうかを吟味する．

## 2 プッシュダウンオートマトンのスタック上の系列集合の性質

ここでは，プッシュダウンオートマトンにおいて，そのオートマトンの受理集合が入力されるとき，そのオートマトンのスタック上の系列集合を構成的に求める．

### 2.1 諸定義

[定義1] プッシュダウンオートマトン(PDA)は，$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$である．ここに$K$は状態の有限集合，$\Sigma$は入力アルファベット，$\Gamma$はプッシュダウンアルファベット，$q_0\in K$は初期状態，$F\subseteq K$は最終状態の集合，$Z_0\in\Gamma$はスタートシンボル，$\delta\subseteq K\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\times K\times\Gamma^*$である．（$\varepsilon$は長さ0の単位記号）．

$\delta(q, a, Z) \ni (p, \beta)$ のとき, $a:(q, Z\gamma) \vdash_M (p, \beta\gamma)$ ($p, q \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$, $\beta, \gamma \in \Gamma^*$) と表わす. $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $q_1, q_2, \cdots q_{n+1} \in K$, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n+1} \in \Gamma^*$ で, $a_i:(q_i, \gamma_i) \vdash_M (q_{i+1}, \gamma_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n$) のとき, $a_1 a_2 \cdots a_n:(q_1, \gamma_1) \overset{*}{\vdash}_M (q_{n+1}, \gamma_{n+1})$ と表わす. $N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (p, \varepsilon), p \in K\}$ (空スタック受理式), $T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (p, \alpha), p \in K, \alpha \in \Gamma^*\}$ (最終状態受理式) をPDA $M$ によって, 受理される言語とする. PDAは一般には $M=(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ で表わすが, 空スタック受理式であることを明確に区別するときは $M=(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \phi)$ と表わす.

[定義2] PDA $M=(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ がつぎの条件を満足すれば, 非冗長であるという. (条件) [空スタック受理式の場合] ① $\forall q \in K$ に対し, $\exists A\gamma \in \Gamma^*$, $\exists w \in \Sigma^*$ で, $w:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q, A\gamma)$. $\forall B \in \Gamma$ に対し, $\exists p \in K$, $\exists u \in \Sigma^*$, $\exists \beta \in \Gamma^*$ で, $u:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (p, B\beta)$. ② $(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q, A\gamma)$ なる $q, A$ に対し, $\exists p \in K$, $\exists v \in \Sigma^*$ で, $v:(q, A) \overset{*}{\vdash}_M (p, \varepsilon)$. [最終状態受理式の場合] ① $\forall q \in K$ に対し, $\exists A \in \Gamma$, $\exists \gamma \in \Gamma^*$, $\exists w \in \Sigma^*$ で, $w:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q, A\gamma)$. $\forall B \in \Gamma$ に対して, $\exists p \in K$, $\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*$, $\exists u \in \Sigma^*$ で, $u:(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (p, \alpha B \beta)$. ② $(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_M (q, \beta A \gamma)$, $\beta, \gamma \in \Gamma^*$ なる $q, \beta A \gamma$ に対して, $\exists p \in F$, $\exists \alpha \in \Gamma^*$, $\exists v \in \Sigma^*$ で, $v:(q, \beta A \gamma) \overset{*}{\vdash}_M (p, \alpha)$.

[定義3] 文脈自由形文法 (CFG) は $G=(V_N, \Sigma, P, S)$ である. ここに $V_N$ は非終端記号の有限集合, $\Sigma$ は終端記号の有限集

合であり，$P \subseteq V_N \times (V_N \cup \Sigma)^*$（生成規則の有限集合）で，Sはスタートシンボルの集合である．生成規則は $A \to \nu$ のように表現される．($A \in V_N$, $\nu \in (V_N \cup \Sigma)^*$)． $\xi, \eta \in (V_N \cup \Sigma)^*$ に対し，$\xi = \xi_1 A \xi_2$, $\eta = \xi_1 \nu \xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in (V_N \cup \Sigma)^*$, $A \to \nu$ ならば $\xi \Rightarrow \eta$ と表わす．$\xi \Rightarrow \eta$ かまたは $\xi = \xi_0$, $\eta = \xi_r$, $\xi_i \Rightarrow \xi_{i+1}$, $0 \le i \le r-1$ ならば，$\xi \overset{*}{\Rightarrow} \eta$ と表わす．$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid A_1 \overset{*}{\Rightarrow} w, A_1 \in S \}$ を $G$ によって生成される言語という．CFG $G$ によって生成される言語を文脈自由形言語（CFL）という．

[定義4] CFG $G = (V_N, \Sigma, P, S)$ がつぎの条件を満足するとき既約であるという．① $\forall A \in V_N$ に対し，$\exists A_1 \in S$ で，$A_1 \overset{*}{\Rightarrow} \xi A \eta$, $\xi, \eta \in (V_N \cup \Sigma)^*$. ② $\forall A \in V_N$ に対し，$\exists w \in \Sigma^*$ で $A \overset{*}{\Rightarrow} w$.

[定義5] PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ から CFG $G_{M0} = (V_{N0}, \Sigma, P_0, S_0)$ はつぎのように定義される．① $V_{N0} = \{ [q, A, p] \mid p, q \in K, A \in \Gamma \}$. ②(i) $\delta(q, a, A) \ni (q_1, B_1 B_2 \cdots B_m)$, $q \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $A \in \Gamma$, $B_1 B_2 \cdots B_m \in \Gamma^+$, $B_i \in \Gamma$, $1 \le i \le m$ なるとき，$q_2, \cdots, q_m, q_{m+1} = p$ のすべての組合せに対して，$[q, A, p] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \cdots [q_m, B_m, q_{m+1}] \in P_0$. (ii) $\delta(q, a, A) \ni (p, \varepsilon)$, $p, q \in K$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $A \in \Gamma$ なるとき，$[q, A, p] \to a \in P_0$. ③ $S_0 = \{ [q_0, Z_0, s] \mid s \in K \}$.

Mが空スタック受理式のとき $N(M) = L(G_{M0})$.[1] つぎの諸定義は本論文での命題での証明に使う．

[定義6] $(K\times\Gamma\times K)^*$ から $\Gamma^*$ への準同形写像 (homomorphism) $h$ を $h[q, A, p]=A$, $p, q\in K$, $A\in\Gamma$ と定義する.

[定義7] CFG $G_{M0}=(V_{N0}, \Sigma, P_0, S_0)$ (定義5) を用いて, CFG $G_M=(V_N, \Sigma, P, S)$ をつぎのように定義する. ① $V_{00}=\{\beta\in V_{N0}^+ \mid A\to a\beta\in P_0\}$ とし, $\xi=B_1B_2\cdots B_n$, $\eta=C_1C_2\cdots C_n$, $B_i, C_i\in V_{N0}$, $1\leq i\leq n$, $\xi, \eta\in V_{00}$ において, $B_1=C_1, B_2=C_2, \cdots, B_i=C_i$ で, $1\leq j\leq i$ について, $^\exists w_j\in\Sigma^*$ で $B_j\overset{*}{\Rightarrow}w_j$, かつどのように $w_{i+1}, w_{i+1}'\in\Sigma^*$ をとってきても $B_{i+1}\overset{*}{\not\Rightarrow}w_{i+1}$, $C_{i+1}\overset{*}{\not\Rightarrow}w_{i+1}'$, $h(B_{i+1}\cdots B_n)=h(C_{i+1}\cdots C_n)$ なるとき, $\xi R_1 \eta$ とすると, $R_1$ は同値関係であり, $V_{00}$ に同値関係 $R_1$ を導入できる. ② $V_{00}$ において同値関係 $R_1$ に関する同値類の代表元を選び, それで, $V_{00}$ において同じ同値類に属するものをおきかえる. これをすべての同値類について行う. そのようにしてできた集合を $V_{00}'$ とし, 適当な $\xi\in V_{00}'$ があって $\xi$ を右辺に含むか, 右辺が終端記号になっている生成規則を $P_0$ から選んで $P$ とする. ③ $P$ に使われていない $V_{N0}$ の要素を除いた残りを $V_N$ とする. ④ $P$ に現われない $S_0$ の要素を消去して $S$ とする.

定義7において明らかに $V_{N0}\supseteq V_N$, $P_0\supseteq P$, $S_0\supseteq S$ で, $M$ が空スタック受理式のとき, $N(M)=L(G_M)$ である. 以後, <u>$G_M$ を $M$ に付随した CFG と称する</u>.

[定義8] CFG $G_M=(V_N,\Sigma,P,S)$ に対してつぎのような定義をおこなう．① $A\in V_N$, ${}^\exists w\in\Sigma^*$ で $A\overset{*}{\Rightarrow}w$ なるとき，$A\in E_M$ と表わす．② $[q,A,p]\in V_N$, $q\in F$（最終状態受理式Mで）なるとき，$[q,A,p]\in F_I$ と表わす．③ $B_1B_2\cdots B_m\in V_N^+$, $B_1,B_2,\cdots,B_{i-1}\in E_M$, $B_i\notin E_M$ $(2\leq i\leq m)$ ならば $Suff(B_1B_2\cdots B_m)\triangleq\{B_1B_2\cdots B_m, B_2\cdots B_m,\cdots,B_i\cdots B_m\}$ とする．④ $B_1B_2\cdots B_m\in V_N^+$ に対して $H(B_1B_2\cdots B_m)\triangleq B_1$, $Ta(B_1B_2\cdots B_m)\triangleq B_2\cdots B_m$ とする．⑤ $U_0\triangleq\{\gamma\in V_N^+ \mid A_1\to a\gamma\in P, A_1\in S\}$, $Suff(U_0)\triangleq\bigcup_{\alpha\in U_0}Suff(\alpha)\triangleq U_1$, $V_0\triangleq\{\beta\in V_N^+\mid A\to a\beta\in P\}$, $Suff(V_0)\triangleq\bigcup_{\beta\in V_0}Suff(\beta)\triangleq V_1$ とする．$(U_0\subseteq U_1, V_0\subseteq V_1, U_0\subseteq V_0, V_0\subseteq V_1)$.

[定義9] 有限オートマトン $\mathcal{A}^{G_M}=(V_2,\Sigma_{\mathcal{A}},\delta_{\mathcal{A}},S_{\mathcal{A}},F_{\mathcal{A}})$ は $G_M$ からつぎのようにして構成される．① $V_2=V_1\cup S_{\mathcal{A}}$. $S_{\mathcal{A}}=S$. $S$, $V_1$ は定義7,8による．② $S_{\mathcal{A}}$ は初期状態の集合，$F_{\mathcal{A}}$は最終状態の集合である．③ $\Sigma_{\mathcal{A}}=\{Ta(\xi)^R \mid \xi\in V_1\}$（$R$は逆系列を示す）．④ $\delta_{\mathcal{A}}\subseteq V_2\times\Sigma_{\mathcal{A}}^*\times V_2$ であり，(i) $\xi,\eta\in V_1$ に対し，$\delta_{\mathcal{A}}(\xi, Ta(\eta)^R)=\eta \Leftrightarrow {}^\exists(H(\xi)\to a\eta_0)\in P$ ($G_M$で)，$\eta\in Suff(\eta_0)$, $\eta_0\in V_0$（$V_0$は定義8による）であり，(ii) $\zeta\in V_1$, $A_1\in S_{\mathcal{A}}$ に対し，$\delta_{\mathcal{A}}(A_1,Ta(\zeta)^R)=\zeta\Leftrightarrow{}^\exists(A_1\to b\zeta_0)\in P$, $\zeta\in Suff(\zeta_0)$, $\zeta_0\in U_0$ であり，(iii) $\delta_{\mathcal{A}}$ を通常のやり方で $V_2\times\Sigma_{\mathcal{A}}^*\times V_2$ に拡張する．⑤ $T(\mathcal{A}^{G_M}_{v})=\{w\in\Sigma_{\mathcal{A}}^*\mid\delta(A_1,w)=\nu, A_1\in S_{\mathcal{A}}, \nu\in F_{\mathcal{A}}\}$ とする．

[定義10] PDA Mにおいて，入力系列集合Lに対して，その入力系列のアルファベットを読む毎に現れるスタック上の系列

をプッシュダウンスタックの底からヘッドの方に向って見たとき，そのような系列全体のつくる集合を $P_{DS}{}^{M}(L)$ と表わす.

## 2.2 非冗長PDAについて

ここでは，PDAにおいて，受理集合に対するスタック上の系列集合を考察するのに必要な非冗長という概念について述べる.

PDA，CFGにつぎのような半順序関係を導入する.

[定義11] PDA $M_1=(K_1,\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,q_0,Z_0,F_1)$，PDA $M_2=(K_2,\Sigma,\Gamma_2,\delta_2,q_0,Z_0,F_2)$ において $K_1\supseteq K_2$，$\Gamma_1\supseteq\Gamma_2$，$F_1\supseteq F_2$，$\delta_1\supseteq\delta_2$ のとき，$M_1 \geqq_P M_2$ とする.

[定義12] CFG $G_1=(V_{N1},\Sigma,P_1,S_1)$，CFG $G_2=(V_{N2},\Sigma,P_2,S_2)$ において $V_{N1}\supseteq V_{N2}$，$P_1\supseteq P_2$，$S_1\supseteq S_2$ のとき，$G_1 \geqq_G G_2$ とする.

いま，与えられたCFG $G$ に対して $\mathfrak{F}_G=\{CFG\ G_1 \mid G\geqq_G G_1,\ L(G)=L(G_1),\ G_1:既約\}$ とすると，$\mathfrak{F}_G$ は有限であり，$G_1$，$G_2\in\mathfrak{F}_G$ とすると $G_1\vee G_2=(V_{N1}\vee V_{N2},\Sigma,P_1\vee P_2,S_1\vee S_2)$（ただし，$G_1=(V_{N1},\Sigma,P_1,S_1)$，$G_2=(V_{N2},\Sigma,P_2,S_2)$）と定義すれば，$G_1\vee G_2\geqq_G G_1$，$G_1\vee G_2\geqq_G G_2$ で $G_1\vee G_2\in\mathfrak{F}_G$ である. また $\mathfrak{F}_G\neq\phi$ [3]だから，$\mathfrak{F}_G$ には半順序関係 $\geqq_G$ に関し，最大元が存在する. [2]で

の既約なCFGの構成は，実際に$\mathfrak{F}_G$の最大元を与えるものである．本論文では以後$\mathfrak{F}_G$の最大元を$\bar{G}$と表わす．

つぎに，PDA $M$に対して$\mathfrak{F}_M=\{$PDA $M_1 \mid M \geqq_P M_1$，$M_1$は，受理の仕方が$M$と同じで，同じ言語を受理する，$M_1$：非冗長$\}$とするとき，$\mathfrak{F}_M \neq \phi$であることを示す．まず，つぎに示す構成法によってPDA $M$からPDA $M'$をつくり，$M' \in \mathfrak{F}_M$であることを証明する．

[構成法1]（PDA $M$から$\mathfrak{F}_M$の1つの元を求める構成法）

[空スタック受理式の場合] ① PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$から定義7の意味での$G_M=(V_N,\Sigma,P,S)$をつくる．② $\mathfrak{F}_{G_M}$から適当な，$G_M'=(V_N',\Sigma,P',S')$をとってくる．（$G_M'$は存在する）．③ $G_M'$からPDA $M'=(K',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0,Z_0,\phi)$をつぎのように定義する．(i) $K'=\{p\in K \mid [q,A,p]\in V_N'$ または $[p,A,s]\in V_N'$, $A\in\Gamma$, $s,q\in K\}$. (ii) $\Gamma'=h(V_N')$. (iii) $[q,A,p]\to a[q_1,B_1,q_2][q_2,B_2,q_3]\cdots\cdots[q_m,B_m,p]\in P'$に対し，$\delta'(q,a,A)\ni(q_1,B_1B_2\cdots B_m)$，$[q,A,p]\to a\in P'$に対し，$\delta'(q,a,A)\ni(p,\varepsilon)$.

[最終状態受理式の場合] ① PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$に対し，$N(M_0)=T(M)$となるような空スタック受理式PDA $M_0=(K\cup\{q_0',q_e\},\Sigma,\Gamma\cup\{X\},\delta_0,q_0',X,\phi)$をつぎのように構成する[1]．ここで$\delta_0$は，(i) $\delta_0(q_0',\varepsilon,X)=(q_0,Z_0X)$，(ii) $q\in K$, $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $A\in\Gamma$に対して，$\delta_0(q,a,A)=\delta(q,a,A)$，(iii) $q\in F$, $A\in\Gamma\cup\{X\}$に対して$\delta_0(q,\varepsilon,A)\ni(q_e,\varepsilon)$，(iv) $\forall A\in\Gamma\cup\{X\}$に対して，$\delta_0(q_e,\varepsilon,A)\ni(q_e,\varepsilon)$，とする．② PDA $M_0$

に対し，[空スタック受理式の場合]の方法にしたがって，$\mathfrak{F}_{M_0} \ni M_0'$ なる $M_0=(K'\cup\{q_0,q_e\},\Sigma,\Gamma'\cup\{X\},\delta_0',X,\phi)$ を構成する．③ $M_0'$ に対し，$T(M')=N(M_0')$ となるような最終状態受理式PDA $M'=(K',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0,Z_0,F')$ をつぎのように構成する．(i) $q\in K'$, $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$, $A\in\Gamma'$ に対して $\delta'(q,a,A)=\delta_0'(q,a,A)$． (ii) $\delta_0'(q,\varepsilon,A)\ni(q_e,\varepsilon)$ となるような，$q\in K'$ に対し，$q\in F'$ とする．

[証明]（$M'\in\mathfrak{F}_M$ であることの証明）

[Mが空スタック受理式の場合]① $\forall A\in\Gamma'$ に対し，$G_M'$ が既約であるので，$\exists q,p\in K'$, $[q,A,p]\in V_N'$ で，$[q_0,Z_0,s]\in S'$, $[q_0,Z_0,s]\overset{*}{\Rightarrow} u[q,A,p]\xi$（ここに $G_M'$ のつくり方から $u\in\Sigma^*$, $\xi\in V_N'^*$ である），$h(\xi)=\gamma\in\Gamma'^*$ とすると，$(q_0,Z_0)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q,A\gamma)$. また $\forall q\in K'$ に対し，$\exists A\in\Gamma'$, $\exists[q,A,p]\in V_N'$, $\exists[q_0,Z_0,s]\in S'$, $\exists u\in\Sigma^*$, $\exists\xi\in V_N'^*$ で，$[q_0,Z_0,s]\overset{*}{\Rightarrow}u[q,A,p]\xi$ または，$\exists[s,A,q]\in V_N'$, $\exists v\in\Sigma^*$, $\exists[q_0,Z_0,s]\in S$ で，$[q_0,Z_0,s]\overset{*}{\Rightarrow}v[s,A,q]$ であるので，$h(\xi)=\gamma\in\Gamma'^*$ とすると，$u:(q_0,Z_0)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q,A\gamma)$ または $v:(q_0,Z_0)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q,\varepsilon)$. ② $(q_0,Z_0)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(q,A\gamma)$ の $A\in\Gamma'$, $\gamma\in\Gamma'^*$ に対しては，$G_M$ では，$[q_0,Z_0,s]\in S$, $u\in\Sigma^*$, $\xi\in V_N'^*$, $[q_0,Z_0,s]\overset{*}{\Rightarrow}u[q,A,p]\xi$ のとき，$\exists w\in\Sigma^*$, $[q,A,p]\overset{*}{\Rightarrow}w$ であるので，$(q,A)\overset{*}{\underset{M'}{\vdash}}(p,\varepsilon)$, $p\in K'$ である．よって $M'$ は，非冗長である．$N(M)=L(G_M)=L(G_M')$, $L(G_M')=N(M')$ なので，$N(M)=N(M')$. また $K'\subseteq K$, $\Gamma'\subseteq\Gamma$, $\delta'\subseteq\delta$ であるのは明らか．$M'$ において初期状態，スタートシンボルは，Mの初期状態，スタートシンボルと同じにとれるのも明らかである．よって $M'\in\mathfrak{F}_M$.

[Mが最終状態受理式の場合] ① $\forall q \in K'$ に対し，$M_0'$ において，$\exists A \in \Gamma'$, $\exists \gamma \in \Gamma'^*$, $\exists w \in \Sigma^*$ で，$A\gamma' = A\gamma X$ とすると，$\varepsilon : (q_0', X) \vdash_{M_0'} (q_0, Z_0X)$, $w : (q_0, Z_0X) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (q, A\gamma')$ であるから，$\forall q \in K'$ に対し，$\exists A \in \Gamma'$, $\exists \gamma \in \Gamma'^*$, $\exists w \in \Sigma^*$ で，$w : (q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M'} (q, A\gamma)$.（ここに $q \neq q_e$ のとき $M_0'$ では，$(q_0, Z_0X) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (q, X)$ となることはないので $A\gamma \in \Gamma'^+$ である）．また $\forall A \in \Gamma'$ に対して，$M_0'$ において $\exists p \in K' \cup \{q_e\}$, $\exists u \in \Sigma^*$, $\exists \gamma \in \Gamma'^*$ で，$\gamma' = \gamma X$ とすると，$\varepsilon : (q_0', X) \vdash_{M_0'} (q_0, Z_0X)$，$u : (q_0, Z_0X) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (p, A\gamma')$ だから $p \neq q_e$ のとき，$M'$ において $u : (q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M'} (p, A\gamma)$ であり，$p = q_e$ のときは，$\exists s \in F$（このような $s$ のつくる集合を $F' \subseteq F$ とする），$\alpha \in \Gamma'^*$ で，$u$ の適当な prefix $u' \in \Sigma^*$ に対して，$u' : (q_0, Z_0X) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (s, \alpha A\gamma')$ であり，$u' : (q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M'} (s, \alpha A\gamma)$. ② $M_0'$ は非冗長だから $(q_0', X) \vdash_{M_0'} (q_0, Z_0X) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (p, A\gamma')$，$\gamma' \in \Gamma'^*X$ に対して，$\exists v \in \Sigma^*$, $\exists t \in K' \cup \{q_e\}$ で，$v : (p, A) \overset{*}{\vdash}_{M_0'} (t, \varepsilon)$. いま $M'$ において $(q_0, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{M'} (q, \alpha A\gamma)$ なる $\alpha A\gamma = B_1B_2 \cdots B_m \in \Gamma'^+$, $B_i \in \Gamma'$, $1 \leq i \leq m$ について考えると，$\exists w \in \Sigma^*$, $\exists \beta \in \Gamma'^*$, $\exists s \in F'$ で，$w : (q, B_1B_2 \cdots B_m) \overset{*}{\vdash}_{M'} (s, \beta)$ でなければならぬことがわかる．よって $M'$ は非冗長である．$N(M_0') = T(M')$, $N(M_0) = T(M)$ で，$N(M_0) = N(M_0')$ ($M_0' \in \mathfrak{F}_{M_0}$) だから，$T(M) = T(M')$．また $K' \subseteq K$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $F' \subseteq F$ は明らかであり，$\delta_0' \subseteq \delta_0$ を考慮すると $\delta' \subseteq \delta$ がでる．ゆえに $M' \in \mathfrak{F}_M$. Q.E.D.

よってつぎの命題を得る．

[命題1] PDA Mに対し，$\mathfrak{F}_M \neq \phi$ である．

[命題2] $\mathfrak{F}_M$ には半順序関係'$\geqq_p$'に関し最大元が存在する.

証明略

PDA　Mに対し, $\mathfrak{F}_M$ の元, PDA　$M_1$ を構成する仕方は, 構成法1で述べたが, そこでは, Mに付随するCFG　$\mathfrak{G}_M$ に対し, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_M}$ の元 $\mathfrak{G}_M'$ をつくる過程があるが, $\mathfrak{G}_M'$ として[2]に基いて $\hat{\mathfrak{G}}_M$ をとり, $\hat{\mathfrak{G}}_M$ から, PDAをつくると, これが $\mathfrak{F}_M$ の最大元を構成することになっている. 本論文では, PDA　M に対し, $\mathfrak{F}_M$ の最大元を $\hat{M}$ と表わす.

[構成法2] (PDA　M に対する $\mathfrak{F}_M$ の最大元 $\hat{M}$ の構成法)

[空スタック受理式の場合] ① PDA　Mから定義7によって $\mathfrak{G}_M$ を構成する. ② 文献[2]の構成法に基いて $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_M}$ の最大元 $\hat{\mathfrak{G}}_M$ をつくる. ③ $\hat{\mathfrak{G}}_M$ から①とは逆の手順でPDA　$\hat{M}$ を構成する. (ここでの構成の仕方は構成法1による).

[最終状態受理式の場合] ① PDA　$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ に対し, $N(M_0)=T(M)$ なる $M_0=(K\cup\{q_0',q_e\},\Sigma,\Gamma\cup\{X\},\delta_0,q_0',X,\phi)$ を構成する. (構成法1による). ② $M_0$ に対し, $\mathfrak{F}_{M_0}$ の最大元 $\hat{M}_0$ をつくる. ③ $\hat{M}_0$ に対し, 構成法1によって, $\hat{M}$ (最終状態受理式)をつくる.

以上から, つぎの命題を得る.

[命題3] PDA Mが非冗長であるための必要十分条件は，$M \equiv \hat{M}$である．

一般には言語$L_1$に対しては$P_{ds}^{M}(L_1) \supseteq P_{ds}^{\hat{M}}(L_1)$であるが，PDA Mが受理する言語をLとすると$L \supseteq L_1$に対しては，つぎのようになる．

[命題4] PDA Mが受理する言語をLとすると，$L \supseteq L_1$なる言語$L_1$に対しては，$P_{ds}^{M}(L_1) = P_{ds}^{\hat{M}}(L_1)$である．

証明略

したがって，PDA Mが受理する言語Lに対して，$P_{ds}^{M}(L)$を考察するには，$P_{ds}^{\hat{M}}(L)$を考えれば良いことがわかる．

## 2.3 受理集合が入力された場合のスタック上の系列集合

ここでは，入力系列集合が，そのPDAの受理集合であるときのスタック上の系列集合を構成的にもとめる．

### 2.3.1 1状態空スタック受理式PDAの場合

1状態空スタック受理式PDA $M=(\{q_0\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \phi)$に付随するCFG $G_M$は，$G_M=(\Gamma, \Sigma, P, Z_0)$ $(\delta(q_0, a, A) \ni (q_0, \gamma) \Leftrightarrow (A \to a\gamma) \in P$によって$\delta$と$P$は対応づけられる）と表わせる．また明らかに$\widetilde{G_M} \equiv G_{\hat{M}}$である．いま$\widetilde{M}=(\{q_0\}, \Sigma, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\delta}, q_0, Z_0, \phi)$，$\widetilde{G_M} \equiv G_{\widetilde{M}}=$

$(\tilde{\Gamma},\Sigma,\tilde{P},Z_0)$ と表わすと，定義9の有限オートマトン $A^{\widehat{G}_M}$ をつかって，つぎの命題を得る．

[命題5] PDA $M=(\{q_0\},\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\phi)$, $\tilde{M}=(\{q_0\},\Sigma,\tilde{\Gamma},\tilde{\delta},q_0,Z_0,\phi)$ $(\Gamma\supseteq\tilde{\Gamma},\delta\supseteq\tilde{\delta})$ に対し，$N(M)=N(\tilde{M})=L$ とすると，$P_{ds}^{M}(L)=P_{ds}^{\tilde{M}}(L)=\bigcup_{v\in V_2}\{T(A_v^{\widehat{G}_M})H(v)\}$ であり，$P_{ds}^{M}(L)$ は正規言語である．

[証明] $\eta\neq Z_0$, $\eta\in P_{ds}^{\tilde{M}}(L)$ とすると，$\eta$ は $\widehat{G}_M$ の生成規則に対応して，伸縮し生成されたものであるが，定義8の $V_1$ のつくり方を見れば，$\widehat{G}_M$ に対してつくった $V_1$ に対し，$\eta$ は，$\bigcup_{\xi\in V_1}Ta(\xi)^R$ のいくつかと，$\bigcup_{v\in V_2}v^R$ のどれかの連結になっていることがわかる．したがって $\eta_i'=Ta(\eta_i)^R$, $\eta_i\in V_1$ $(1\le i\le n-1)$，とくに $\eta_1'=Ta(\eta_1)^R$, $\eta_1\in U_1$ ($U_1$ も $\widehat{G}_M$ に対して定義8によってつくったものとする)，および $\eta_n\in\bigcup_{v\in V_2}v^R$ であるような適当な組合せ $\{\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_{n-1}',\eta_n\}$ に対し，$\eta=\eta_1'\eta_2'\cdots\eta_{n-1}'\eta_n$ と書ける．よって有限オートマトン $A^{\widehat{G}_M}$ で，$Z_0\to\eta_1\to\eta_2\to\cdots\to\eta_n$ なる遷移をひきおこす系列を $\eta'=\eta_1'\eta_2'\cdots\eta_{n-1}'\cdot Ta(\eta_n)$ とすると $\eta=\eta'H(\eta_n)$ と表わせ，$\eta\in T(A_{\eta_n}^{\widehat{G}_M})H(\eta_n)$ である．また，もし $\eta=Z_0\in P_{ds}^{\tilde{M}}(L)$ とすると，$\eta=Z_0=T(A_{Z_0}^{\widehat{G}_M})H(Z_0)$．ゆえに $V_2=V_1\cup\{Z_0\}$ とすると $P_{ds}^{\tilde{M}}(L)\subseteq\bigcup_{v\in V_2}\{T(A_v^{\widehat{G}_M})H(v)\}$．逆に，$\xi\in\bigcup_{v\in V_2}\{T(A_v^{\widehat{G}_M})H(v)\}$ とする．いま適当な $v\in V_1$ に対し，$\xi\in T(A_v^{\widehat{G}_M})\cdot H(v)$ とすれば，有限オートマトン $A^{\widehat{G}_M}$ で，$Z_0\to\xi_1\to\xi_2\to\cdots\to\xi_m\to v$ なる遷移をひきおこす適当な系列 $\xi_1'\xi_2'\cdots\xi_m'v'$ に対し，$\xi=\xi_1'\xi_2'\cdots\xi_m'v'H(v)$ と表わせる．ここに $\xi_j'=Ta(\xi_j)^R$, $\xi_j\in V_1$ $(1\le j\le m)$，とく

に $\xi_1 \in U_1$, $\nu \in T_a(\nu)^R$. いま $\xi_{i0} \in V_0$, とくに $\xi_{10} \in U_0$ を, $\xi_i \in Suff(\xi_{i0})$ $(1 \leq i \leq m)$ なるものとし, $\nu_0 \in V_0$ を $Suff(\nu_0)$ なるものとする. ($U_0$, $V_0$ は $\widehat{G_M}$ に対して定義されたものである). $\mathcal{A}^{\widehat{G_M}}$ のつくり方から, PDA $\widehat{M}$ のスタック上では, 入力系列集合 $L = N(M) = N(\widehat{M})$ に対して, $\widehat{G_M}$ の生成規則にしたがって, $Z_0 \to \xi_{10} \overset{*}{\Rightarrow} \xi_1$, $H(\xi_1) \to \xi_{20} \overset{*}{\Rightarrow} \xi_2$, $H(\xi_2) \to \xi_{30} \overset{*}{\Rightarrow} \xi_3$, $\cdots\cdots$, $H(\xi_m) \to \nu_0 \overset{*}{\Rightarrow} \nu$ なる書きかえが行なわれ, $\xi$ がスタック上で生成されるものであることが導かれる. よって $\xi \in P_{ds}^{\widehat{M}}(L)$ である. $\xi = T(\mathcal{A}_{Z_0}^{\widehat{G_M}}) H(Z_0) \in P_{ds}^{\widehat{M}}(L)$ は明らかで, $\bigcup_{\nu \in V_2} \{T(\mathcal{A}_\nu^{\widehat{G_M}}) H(\nu)\} \subseteq P_{ds}^{\widehat{M}}(L)$. $\therefore P_{ds}^{\widehat{M}}(L) = \bigcup_{\nu \in V_2} \{T(\mathcal{A}_\nu^{\widehat{G_M}}) H(\nu)\}$. また $P_{ds}^{M}(L) = P_{ds}^{\widehat{M}}(L)$ は命題4により導かれる. Q.E.D.

2.3.2 一般の空スタック受理式の場合

多状態の場合も, 定義6の準同形写像'$h$'を使うことにより, 命題5と類似の結果が得られる.

〔命題6〕 PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \phi)$ に対し, $\widehat{M} = (\widehat{K}, \Sigma, \widehat{\Gamma}, \widehat{\delta}, q_0, Z_0, \phi)$ とする. $M$, $\widehat{M}$ に付随する CFG をそれぞれ $G_M$, $G_{\widehat{M}}$ とする. また $\mathcal{F}_{G_{\widehat{M}}}$ の最大元を $\widehat{G_M} = (\widehat{V_N}, \Sigma, \widehat{P}, \widehat{S})$ とする. $\mathcal{A}^{G_{\widehat{M}}} = (V_2, \Sigma_A, \delta_A, S_A, F_A)$, $\mathcal{A}^{\widehat{G_M}} = (\widehat{V_2}, \widehat{\Sigma_A}, \widehat{\delta_A}, \widehat{S_A}, \widehat{F_A})$ とし, $N(M) = N(\widehat{M}) = L$ としたとき, $P_{ds}^{M}(L) = P_{ds}^{\widehat{M}}(L) = h[\bigcup_{\nu \in V_2} \{T(\mathcal{A}_\nu^{\widehat{G_M}}) H(\nu)\}] = h[\bigcup_{\xi \in V_2} \{T(\mathcal{A}_\xi^{\widehat{G_M}}) H(\xi)\}]$ であり, $P_{ds}^{M}(L)$ は正規言語である.

証明略

〔例題1〕 $M=(\{q,p\},\{0,1\},\{X,Z\},\delta,q,Z,\phi)$ とする．ここに $\delta(q,0,Z)=(q,XZ)$, $\delta(q,0,X)=(q,XX)$, $\delta(q,1,X)=(p,\varepsilon)$, $\delta(p,1,X)=(p,\varepsilon)$, $\delta(p,\varepsilon,X)=(p,\varepsilon)$, $\delta(p,\varepsilon,Z)=(q,\varepsilon)$. このとき，$G_M=(V_N,\Sigma,P,S)$, $V_N=\{[q,Z,q],[q,X,q],[q,Z,p],[p,X,q],[q,X,p],[p,X,p]\}$, $S=\{[q,Z,q],[q,Z,p]\}$,

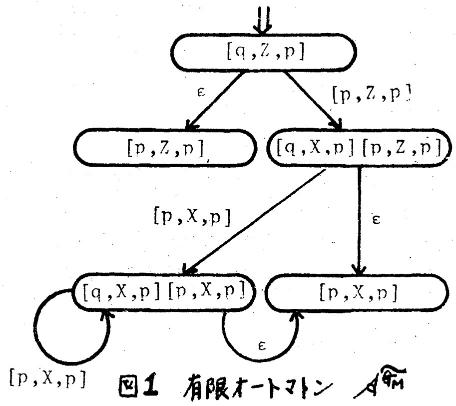


図1 有限オートマトン $A^{\hat{G}_M}$

$P=\{[q,Z,q]\to 0[q,X,q][q,Z,q],[q,Z,q]\to 0[q,X,p][p,X,q],$

$[q,Z,p]\to 0[q,Z,q][q,X,p],[q,Z,p]\to 0[q,Z,p][p,X,p],$

$[q,X,q]\to 0[q,X,q][q,X,q],[q,X,q]\to 0[q,X,p][p,X,q],$

$[q,X,p]\to 0[q,X,q][q,X,p],[q,X,p]\to 0[q,X,p][p,X,p],$

$[q,X,p]\to 1,[p,Z,p]\to\varepsilon,[p,X,p]\to\varepsilon,[p,X,p]\to 1\}$.

$M$は非冗長である．一方 $\hat{G}_M=(\hat{V}_N,\Sigma,\hat{P},S)$, $\hat{V}_N=\{[q,Z,p],[p,X,p],[q,X,p],[p,Z,p]\}$, $\hat{S}=[q,Z,p]$, $\hat{P}=\{[q,Z,p]\to 0[q,X,p][p,Z,p],[q,X,p]\to 0\cdot[q,X,p][p,X,p],[q,X,p]\to 1,[p,Z,p]\to\varepsilon,[p,X,p]\to\varepsilon,[p,X,p]\to 1\}$.
$A^{\hat{G}_M}$ は図1のようになる． $Pas^M(N(M))=Z\cup ZX\cup ZXX^*X$.

## 2.3.3最終状態受理式PDAの場合

空スタック受理式の場合の考え方にしたがって，つぎの結果を得る．

〔命題7〕PDA　$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ に対し，$\widetilde{M}=(\widehat{K},\Sigma,\widehat{\Gamma},\widehat{\delta},q_0,Z_0,\widehat{F})$ とし，$\widehat{M}$ に付随する CFG を $G_{\widehat{M}}=(V_N,\Sigma,P,S)$ とする．$G_{\widehat{M}}$ から有限オートマトン $\mathcal{A}^{G_{\widehat{M}}}$ をつくり，$T(M)=T(\widehat{M})=L$ としたとき，$P_{ds}^{M}(L)=P_{ds}^{\widehat{M}}(L)=h[\bigcup_{v\in V_2}\{T(\mathcal{A}_v^{G_{\widehat{M}}})H(v)\}]$ であり，$h^{-1}(L)$ は正規言語である．

証明略

## 2.3.4 スタック上の系列集合を求めるアルゴリズム

2.3.1，2.3.2，2.3.3 をまとめて，PDA の入力が，その PDA の受理集合であるとき，そのスタック上の系列集合を構成的にもとめるアルゴリズムを示す．

〔アルゴリズム1〕（PDA の，受理集合に対するスタック上の系列集合を求めるアルゴリズム）

① PDA　$M$ に対し，構成法2にしたがって，$\mathfrak{F}_M$ の最大元 $\widehat{M}$ を構成する．② $\widehat{M}$ に付随した CFG　$G_{\widehat{M}}$ を構成する．$M$ が空スタック受理式のとき，$\widetilde{G}_M$ をとる．③ $G_{\widehat{M}}$（$\widetilde{G}_M$）から有限オートマトン $\mathcal{A}^{G_{\widehat{M}}}$（$\mathcal{A}^{\widetilde{G}_M}$）を定義9によって構成する．④ ③に基いて，$h[\bigcup_{v\in V_2}\{T(\mathcal{A}_v^{G_{\widehat{M}}})H(v)\}]$ を求めれば，それが $P_{ds}^{M}(T(M))$ または $P_{ds}^{M}(N(M))$ である．$M$ が空スタック受理式の場合，$P_{ds}^{M}(N(M))=h[\bigcup_{\eta\in\widetilde{V}_2}\{T(\mathcal{A}_\eta^{\widetilde{G}_M})H(\eta)\}]$ である．

## 2.4 受理集合以外の入力集合に対するスタック上の系列集合

ここでは，PDA のスタック上の系列集合が，PDA の受理集合以外の入力集合に対し，どのような集合になるかについて，つぎの 2 つの命題を示す．

M が受理する言語 $L$ に対して，$\Sigma^* \supseteq L_1 \supseteq L$ とすると，一般には，$P_{ds}^M(\Sigma^*) \supseteq P_{ds}^M(L_1) \supseteq P_{ds}^M(L)$ であるが，M が非冗長であるときは，つぎの命題を得る．

〔命題 8〕PDA　M が非冗長であるとき，M が受理する言語を $L$ とすれば，$\Sigma^* \supseteq L_1 \supseteq L$ に対し，$P_{ds}^M(\Sigma^*) = P_{ds}^M(L_1) = P_{ds}^M(L)$ である．

証明略

PDA　M が非冗長でないとき，つぎの命題を得る．

〔命題 9〕PDA　M に対し，M に付随する CFG　$G_M$ から有限オートマトン $A^{G_M}$ をつくるとき，$P_{ds}^M(\Sigma^*) = h[\bigcup_{v \in V_2} \{T(A_v^{G_M})H(v)\}]$ であり，これは正規言語である．

証明略

命題 9 は，PDA　M において，現われ得るスタック上の系列集合を，与えている．以後，これを使って，3. での議論をすすめる．

## 3　PDAに対応する無限状態オートマトンの性質

本章では，PDAに対応して無限状態オートマトンの性質を，そのオートマトンの状態の制御を中心にして述べる．

### 3.1 諸定義と基本的性質

［定義13］PDA　$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$に対し，初期状態が$q\in K$，スタートシンボルが$\gamma\in\Gamma^*$，最終状態の集合が$F_V$なるPDAを，$M_V=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_V)$（$\delta$はMと同じ）とする．$N(M_V)=\{w\in\Sigma^*|w:(q,\gamma)\overset{*}{\vdash}_{M_V}(p,\varepsilon),\ p\in K\}$（空スタック受理式），$T(M_V)=\{w\in\Sigma^*|w:(q,\gamma)\overset{*}{\vdash}_{M_V}(p,\beta),\ p\in F_V,\ \beta\in\Gamma^*\}$（最終状態受理式）を$M_V$によって受理される集合とする．

［定義14］PDA　$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$に付随するCFGを$G_M$とする．PDA　$M_V=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_V)$に対応して，有限オートマトン$A^{G_M}(q,\gamma)=(V_{2V},\Sigma_{AV},\delta_{AV},\alpha_0,F_{AV})$はつぎのように構成する．①$V_{2V}=V_1\cup S_{AV}\cup\alpha_0$．ここに$V_1$は定義8による．$S_{AV}=Suff(\{[q,C_1,q_1][q_1,C_2,q_2]\cdots[q_{m-1},C_m,q_m]\,|\,\gamma=C_1C_2\cdots C_m,\ q_1,q_2,\cdots,q_m\in K\})$．②$\alpha_0$は初期状態，$F_{AV}$は最終状態の集合．③$\Sigma_{AV}=\Sigma_A\cup\{Ta(\eta)^R\,|\,\eta\in S_{AV}\}$．④$\delta_{AV}\subseteq V_{2V}\times\Sigma_{AV}^*\times V_{2V}$であり，(i) $\xi,\eta\in V_1\cup S_{AV}$，$\delta_{AV}(\xi,Ta(\eta)^R)=\eta\Leftrightarrow{}^{\exists}(H(\xi)\to a\eta_0)\in P$，$\eta\in Suff(\eta_0)$，$\eta_0\in V_0$，(ii) $\eta\in S_{AV}$，$\delta_{AV}(\alpha_0,Ta(\eta)^R)=\eta$，(iii) $\delta_{AV}$を$V_{2V}\times\Sigma_{AV}^*\times V_{2V}$へ通常の仕方で拡張する．⑤$T(A_\xi^{G_M}(q,\gamma))=\{w\in\Sigma_{AV}^*\,|\,\delta(\alpha_0,w)=\xi\}$．

このとき命題9と似た結果が得られる．

[命題10] PDA $M_v=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_v)$ に対し，定義9によって $A^{q_M}(q,\gamma)$ と構成すると，$P_{ds}^{M_v}(\Sigma^*)=h[\bigcup_{v\in V_1\cup S_{ov}}\{T(A_v^{q_M}(q,\gamma))H(v)\}]$.

PDAの有限制御部の内部状態（その数は有限）とスタック上の系列（その数は可算無限）との対をPDAの状態と考えることができる．そのような状態は一般に可算無限個存在し得るが，その状態の集合に対応して形式的につぎのような無限状態オートマトンを定義する．

[定義15] 無限状態オートマトンは $\mathcal{B}=(K,\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ である．ここに $K_{\mathcal{B}}$ は状態の無限集合，$\Sigma$ は入力アルファベット，$\delta_{\mathcal{B}}\subseteq K_{\mathcal{B}}\times\Sigma^*\times K_{\mathcal{B}}$ である．

[定義16] PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ に対応する無限状態オートマトン $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ をつぎのように定義する．① $K_{\mathcal{B}}=K\times\Gamma^*$．② $\delta_{\mathcal{B}}((q,\gamma),a)=(p,\beta)$，$(q,\gamma),(p,\beta)\in K_{\mathcal{B}}$, $a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}\Leftrightarrow a:(q,\gamma)\vdash_M(p,\beta)$．

[定義17] 無限状態オートマトン $\mathcal{B}_m=(K_{\mathcal{B}}',\Sigma',\delta_{\mathcal{B}}')$ が $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ の部分オートマトンであるとは，$K_{\mathcal{B}}'\subseteq K_{\mathcal{B}}$，$\Sigma'\subseteq\Sigma$，$\delta_{\mathcal{B}}'\subseteq\delta_{\mathcal{B}}$ なるときをいう．$\mathcal{B}_M$ の部分オートマトン $\mathcal{B}_m$ が強連結であるとは，$\forall k_1,\forall k_2\in K_{\mathcal{B}}'$ に対し，$\exists w\in\Sigma'^*$ で，$\delta_{\mathcal{B}}'(k_1,w)=k_2$ が成立するときをいう．

PDA $M_v=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_v)$ に対応する無限状態オートマトンも $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ になる．$(q,\gamma),(p,\beta)\in K_{\mathcal{B}}$ に対して，$^\exists w\in\Sigma^*$ で，$\delta_{\mathcal{B}}((q,\gamma),w)=(p,\beta)$，すなわち $w:(q,\gamma)\overset{*}{\vdash}_M(p,\beta)$ なるとき，$(q,\gamma)$ は，$(p,\beta)$ に到達可能（制御可能）であるという．また，$\{w\in\Sigma^* \mid \delta_{\mathcal{B}}((q,\gamma),w)=(p,\beta)\}$ を $(q,\gamma)$ から $(p,\beta)$ への制御系列集合とよぶ．

## 3.2 PDAに対応する無限状態オートマトンにおける制御

ここでは，PDAに対応する無限状態オートマトンにおける任意の2つの状態間の到達可能性について述べる．

[命題11] PDA $M$ に対応する無限状態オートマトン $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ において，$(q,\gamma),(p,\beta)\in K_{\mathcal{B}}$ とするとき，$(q,\gamma)$ から $(p,\beta)$ に到達可能（制御可能）であるかどうかは決定可能である．

[命題12] PDA $M$ に対応する無限状態オートマトン $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ において，$(q,\gamma),(p,\beta)\in K_{\mathcal{B}}$ とするとき，$L_{q\gamma,p\beta}=\{w\in\Sigma^* \mid \delta_{\mathcal{B}}((q,\gamma),w)=(p,\beta)\}$ はCFLであり，その最短系列は求められる．

証明略

命題11，12にかんして，1つのアルゴリズムとして，つぎのものが，命題10の応用として考えられる．

〔アルゴリズム2〕（PDA　Mに対応する無限状態オートマトンの状態間の到達可能性を決定するアルゴリズム）
①2つの状態を$(q, C_1C_2\cdots C_m)$，$(p, B_1B_2\cdots B_n)$とし，$(q, C_1C_2\cdots C_m)$が$(p, B_1B_2\cdots B_n)$へ到達可能かどうかを吟味するものとする．まず，$(q, C_1C_2\cdots C_m)$を初期状態とするPDA　$M_0$を構成し，有限オートマトン$A^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m)$をつくる．② $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n \in K$，$[p, B_1, p_1]$，$[p_1, B_2, p_2]$，$\cdots$，$[p_{n-1}, B_n, p_n] \in V_N$（$G_M$の非終端記号の集合）なる，すべての$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$について，$[p_{n-1}, B_n, p_n]\cdot[p_{n-2}, B_{n-1}, p_{n-1}]\cdots[p, B_1, p_1] \in T(A_\eta^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m))H(\eta)$，$\eta \in V_2$かどうかについて吟味する．③②において，適当な$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n \in K$について$[p_{n-1}, B_n, p_n][p_{n-2}, B_{n-1}, p_{n-1}]\cdots[p, B_1, p_1] \in T(A_\eta^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m))H(\eta)$，$\eta \in V_2$ならば，到達可能である．

〔アルゴリズム3〕（PDA　Mに対応する無限状態オートマトンの状態間の最短制御系列を求めるアルゴリズム）
①2つの状態を$(q, C_1C_2\cdots C_m)$，$(p, B_1B_2\cdots B_n)$とし，$(q, C_1C_2\cdots C_m)$から$(p, B_1B_2\cdots B_n)$へ制御可能かどうかを決定する．② $A^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m)$での遷移に対応して，PDAの入力系列集合のうちの最短の系列を選び，$A^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m)$での遷移すべてについて，おのおのに対応するPDAの最短入力系列をラベル付けする．③すべての，$p_1, p_2, \cdots, p_n \in K$に対し，$A^{G_M}(q, C_1C_2\cdots C_m)$の初期状態から，$[p_{n-1}, B_n, p_n][p_{n-2}, B_{n-1}, p_{n-1}]\cdots[p, B_1, p_1]$なる系列生成に

対応する，ラベル系列の集合（；これは正規言語になる）を求める．④③で求めた正規言語のうちの最短系列のものを求める．これが所望の最短制御系列である．

[例題2] 例題1で扱ったPDA　Mに対し，$\mathcal{A}^{G_M}$は図2のようになる．

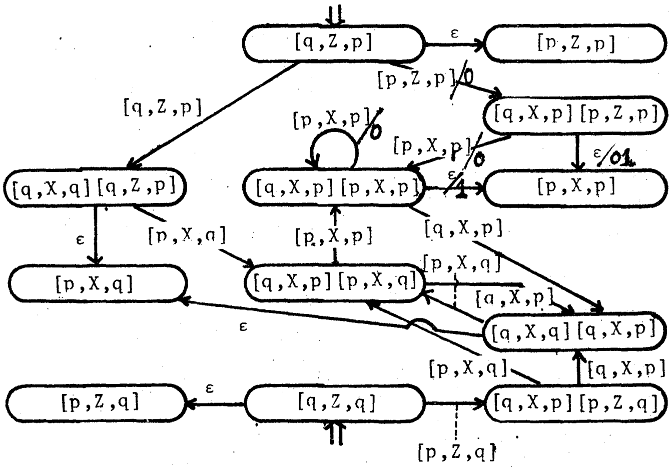


図2　有限オートマトン　$\mathcal{A}^{G_M}$

例えば，$(q,Z)$から，$(p,X^mZ)$ $(m\geq 1)$への制御可能性については，$[p,Z,p][p,X,p]^m\in T(\mathcal{A}^{G_M}_{[p,X,p]})\cdot H([p,X,p])$だから，制御可能である．$(q,Z)$から$(p,X^mZ)$への最短系列は，$[q,Z,p]\to 0[q,X,p][p,Z,p]$，$[q,X,p]\to 0[q,X,p][p,X,p]$，$[q,X,p]\to 1$より$0^{m+1}1$である．（最短制御系列を求めるための，ラベル付けは，図2において，$[p,Z,p][p,X,p]^m$に対応する部分だけ記入されている．例えば$[p,Z,p]$に対して'$[p,Z,p]/0$'の'0'のように表わしている）．

以上の議論を使うと，PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$において，$p\in K$に対し，$(q_0,Z_0)$から$(p,Z_0)$へ制御可能かどうかが決定でき，制御可能なときは，その最短制御系列が求められる．

$(q_0,Z_0)$から$(p,Z_0)$へ制御できれば，PDA　$M$は，PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$，$M_v=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,p,Z_0,F_v)$が受理する2つのCFLを受理するPDAと見れる．また$L_{p,Z_0}=\{w\in\Sigma^* \mid \delta_{\mathcal{B}}((q_0,Z_0),w)=(p,Z_0)\}$とすると，$L_{p,Z_0}\cdot T(M_v)\subseteq T(M)$ $(F_v=F)$または$L_{p,Z_0}\cdot N(M_v)\subseteq N(M)$の関係がある．

$P_{as}^{M_v}(\Sigma^*)$が正規言語であることを使って，PDA　$M_v$に対し，正規言語$R$，$R'=R\cap P_{as}^{M_v}(\Sigma^*)$を考え，$M_v$のスタック上の系列が$R'$のどれかになったとき，PDA　$M_v$は受理状態になると定義できる．これは，PDAにおいて，空スタック受理式，最終状態受理式以外の受理方式の1つと考えられる．

[命題13] PDA　$M_v=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\sigma,F_v)$に対し，正規言語$R$を与えたとき，$R'=R\cap P_{as}^{M_v}(\Sigma^*)$とすると，$L_{R'}=\{w\in\Sigma^* \mid w:(q,\sigma)\overset{*}{\underset{M_v}{\vdash}}(p,\beta),\ \beta\in R'\}$はCFLである．

## 3.3 無限状態オートマトンの強連結性

ここでは，PDA　$M$に対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M$の，初期状態から到達可能な状態のすべてからなり，$\mathcal{B}_M$の状態遷移を保存する部分オートマトンの強連結性について検討を加える．

準備として定義をつけ加える．

〔定義17〕PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$ に付随する CFG $G_M$ において，$i: V_N \to K$ を $i[q,A,p]=q$ $([q,A,p]\in V_N)$ と定義する．$G_M$ において定義された $V_0$ 上に関係 $R_2$ をつぎのように導入する．$\xi,\eta\in U_0\subseteq V_0$ に対し，$\xi R_2 \eta \Leftrightarrow h(\xi)=h(\eta),\ i(H(\xi))=i(H(\eta))$ とする．（$R_2$ は同値関係である）．いま，$^\forall\xi\in U_0$ に対し，$^\exists\eta\in U_0$，$\xi R_2\eta$ で，$\eta=\eta_1\eta_2\cdots\eta_m$，$\eta_i\in V_N\,(1\leq i\leq m)$ とすると，$^\exists w\in\Sigma^*$，$\eta\overset{*}{\Rightarrow}w\eta_m$ が成立するとき，$U_0$ は $E_1$－条件を満足するという．$V_0'\equiv\{\gamma\in V_N^+ \mid A\to a\gamma\in P,\ A\notin S\}$ において，$^\forall\xi'\in V_0'$ に対して，$^\exists\eta'\in V_0'$，$\xi' R_2\eta'$ で，$\eta'=\eta_1'\eta_2'\cdots\eta_n'$，$\eta_i'\in V_N\ (1\leq i\leq n)$ とすると，$^\exists u\in\Sigma^*$，$\eta'\overset{*}{\Rightarrow}u$ が成立するとき，$V_0'$ は $E_2$－条件を満足するという．

〔命題14〕PDA $M$ が与えられ，$M$ に付随する CFG $G_M$ を構成したとき，$G_M$ の $U_0$ が $E_1$－条件を満足するかどうか，$V_0'$ が $E_2$－条件を満足するかどうかどうかは，いずれも決定可能である．

証明略

〔定義18〕PDA $M$ に付随する CFG $G_M$ を考える．$G_M$ において $U_0$ が，$E_1$－条件を満足するとき，$f(U_0)\equiv\{\eta_m \mid \eta=\eta_1\eta_2\cdots\eta_m\in U_0,\ ^\exists w\in\Sigma^*,\ \eta\overset{*}{\Rightarrow}w\eta_m\}$ とおく．$V_0'$ が $E_2$－条件を満足するとき，$g(V_0')\equiv\{\zeta_n \mid \zeta=\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n\in V_0',\ \zeta\in\Sigma^*,\ \zeta\overset{*}{\Rightarrow}u\zeta_n\}$ とおく．

[定義19] PDA $M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F)$に対応する無限状態オートマトン $\mathcal{B}_M=(K_{\mathcal{B}},\Sigma,\delta_{\mathcal{B}})$ の部分オートマトン $\mathcal{B}_0=(K_0,\Sigma',\delta_{\mathcal{B}}')$をつぎのように定義する．$K_0=\{(q,\gamma)\mid \delta_{\mathcal{B}}((q_0,Z_0),w)=(q,\gamma),\ w\in\Sigma^*\}$，$\delta_{\mathcal{B}}'\subseteq\delta_{\mathcal{B}}$ で $\forall k_1,\forall k_2\in K_0,\ \exists w\in\Sigma^*,\ \delta_{\mathcal{B}}(k_1,w)=k_2\Rightarrow w\in\Sigma'^*,\ \delta_{\mathcal{B}}'(k_1,w)=k_2,\ \delta_{\mathcal{B}}'\subseteq K_0\times\Sigma'^*\times K_0,\ \Sigma'\subseteq\Sigma$．さらにまた $K_0$ の部分集合 $K_1$を定義する．すなわち $K_1=(q_0,Z_0)\cup\{(i(\xi),h(\xi))\mid\xi\in f(U_0)\cup g(V_0')\}$．ただし，$U_0$, $V_0'$は$G_M$ において定義されるものであり，$U_0,V_0'$がそれぞれ $E_1$-条件，$E_2$-条件を満足するとき，$f(U_0)$, $g(V_0')$が定義されるとし，そうでなければ $f(U_0)=\phi$, $g(V_0')=\phi$ と考える．

定義19の$\mathcal{B}_0$に対して，その強連結性について，つぎの結果を得る．

[命題15] PDA $M$に対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M$の部分オートマトン $\mathcal{B}_0$（定義19）が強連結である必要十分条件は，$M$に付随するCFG $G_M$（定義7）において定義される$U_0,V_0'$（定義 8,17）が定義17の意味で，それぞれ $E_1$-条件，$E_2$-条件を満足し，定義19の $K_1$ に対し，$\forall(p,C_m),\forall(s,B_n)\in K_1$ なるとき，$\exists w\in\Sigma^*$で，$w:(p,C_m)\overset{*}{\underset{M}{\vdash}}(s,B_n)$が成立することである．

証明略

[命題16] 定義19の$K_1$に対し，$\forall(p,C_m)$, $\forall(s,B_m)\in K_1$なるとき，

$\exists w \in \Sigma^*$で，$w:(p, C_m) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (s, B_m)$かどうか，すなわち$(p, C_m)$が，$(s, B_m)$に到達可能かどうかは決定可能である．

証明略

命題15，16より，つぎの結論を得る．

[命題17] PDA Mが与えられたとき，Mに対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M$の部分オートマトン$\mathcal{B}_0$（定義19）が強連結であるかどうかは決定可能である．

[アルゴリズム4]（$\mathcal{B}_0$の強連結性を決定するアルゴリズム）
① PDA Mに付随するCFG $G_M$を構成し，$G_M$に対し，$U_0$，$V_0'$を求める．② $U_0$，$V_0'$がそれぞれ$E_1$-条件，$E_2$-条件を満足するかどうかを吟味する．③ ②の条件が満足されるとき，定義19の$K_1$を求める．④ $K_1$の任意の2つの状態間が到達可能かどうかを吟味する．②，④が満足されるとき，$\mathcal{B}_0$は強連結である．

$\mathcal{B}_0$が強連結であるとすると，$L_0=\{w \in \Sigma^* \mid w:(q_0, Z_0) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_0, Z_0)\}$（$L_0 \ni \varepsilon$，$L_0-\{\varepsilon\} \neq \phi$）に対し，$L=T(M)$または$N(M)$とするとき，$L_0 \cdot L = L$であることがわかる．

[例題3] 例題1のPDA Mを考える．この場合$G_M$の$U_0$，$V_0'$はそれぞれ$E_1$-条件，$E_2$-条件を満足する．そして$K_1=\{(q, Z),$

$(p,X),(p,Z)\}$である．図2において，$[p,Z,p]=H(\nu)$なる$\nu$がなく，$[p,Z,q]$より遷移がないので，$(p,Z)\not\leftrightarrow(q,Z)$である．よって$\mathcal{B}_0$は強連結でない．

つぎに，PDA $M_\nu=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_\nu)$に対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M=(K_\mathcal{B},\Sigma,\delta_\mathcal{B})$の部分オートマトン$\mathcal{B}_1=(K_2,\Sigma'',\delta_\mathcal{B}'')$，$K_2=\{(p,\beta)\mid\delta_\mathcal{B}''((q,\gamma),w)=(p,\beta),\ w\in\Sigma^*\}$，$\delta_\mathcal{B}''\subseteq\delta_\mathcal{B}$，$^\forall k_1,{}^\forall k_2\in K_2$，$w\in\Sigma^*$，$\delta_\mathcal{B}(k_1,w)=k_2\Rightarrow w\in\Sigma''^*$，$\delta_\mathcal{B}''(k_1,w)=k_2$，$\Sigma''\subseteq\Sigma$，$\delta_\mathcal{B}''\subseteq K_2\times\Sigma''^*\times K_2$を考えると，$\mathcal{B}_1$が強連結であるかどうかについては，命題15，16とよく似た議論を使えば，決定可能であることが導ける．

[命題18] PDA $M_\nu=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q,\gamma,F_\nu)$が与えられたとき，$M_\nu$に対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M=(K_\mathcal{B},\Sigma,\delta_\mathcal{B})$の部分オートマトン$\mathcal{B}_1=(K_2,\Sigma'',\delta_\mathcal{B}'')$［$K_2=\{(p,\beta)\mid\delta_\mathcal{B}''((q,\gamma),w)=(p,\beta),\ w\in\Sigma^*\}$，$\delta_\mathcal{B}''\subseteq\delta_\mathcal{B}$，$^\forall k_1,{}^\forall k_2\in K_2$，$w\in\Sigma^*$，$\delta_\mathcal{B}(k_1,w)=k_2\Rightarrow w\in\Sigma''^*$，$\delta_\mathcal{B}''(k_1,w)=k_2$，$\Sigma''\subseteq\Sigma$，$\delta_\mathcal{B}''\subseteq K_2\times\Sigma''^*\times K_2$］が強連結かどうかは決定可能である．

命題17，18によって，任意のPDA $M$に対応する無限状態オートマトン$\mathcal{B}_M$の部分オートマトン$\mathcal{B}_0$，$\mathcal{B}_1$が強連結かどうかは決定可能であることを示したが，任意の部分オートマトンが強連結かどうかの決定問題について検討する．

いま，つぎのようなPDA $M_s$を定義する．

[定義20] $M_s=(\{q\},\Sigma,\Sigma\cup\{Z_0\},\delta,q,Z_0,\phi)$，$\delta(q,a,Z_0)=(q,aZ_0)$，$\delta(q,b,a)=(q,ba)$，$\delta(q,a,a)=(q,\varepsilon)$，$\delta(q,\varepsilon,Z_0)=(q,\varepsilon)$，$\forall a,b\in\Sigma$，$Z_0\notin\Sigma$とする．

このとき $P_{ds}^{M_s}(\Sigma^*)=Z_0\Sigma^*$であり，定義19の$\mathfrak{B}_0=(K_0,\Sigma,\delta_{\mathfrak{B}})$における$K_0$は，この$M_s$に対して，$K_0=\{(q,\gamma)\mid\gamma\in\Sigma^*Z_0\}$となる．

[定義21] PDA $M_s$（定義20）に対応する無限状態オートマトン$\mathfrak{B}_{M_s}=(K_{\mathfrak{B}},\Sigma,\delta_{\mathfrak{B}})$の部分オートマトン $\mathfrak{B}_2=(K_3,\Sigma_3,\delta_{\mathfrak{B}3})$をつぎのように定義する；$K_3\subseteq K_0$，$\delta_{\mathfrak{B}3}\subseteq\delta_{\mathfrak{B}}$，$\forall k_1,\forall k_2\in K_3$，$\delta_{\mathfrak{B}}(k_1,w)=k_2$，$w\in\Sigma^*\Rightarrow w\in\Sigma_3^*$，$\delta_{\mathfrak{B}3}(k_1,w)=k_2$で，$\Sigma_3\subseteq\Sigma$，$\delta_{\mathfrak{B}3}\subseteq K_3\times\Sigma_3^*\times K_3$．いま$L_3=\{\alpha^R\mid(q,\alpha Z_0)\}$とする．$L_3\subseteq\Sigma^*$．

定義20，21より，つぎの命題を得ることができる．

[命題19] 定義21の$\mathfrak{B}_2$が強連結であるための必要十分条件は，$Init(L_3)=L_3$なることである．ここに$Init(L_3)=\{x\mid xy\in L_3,\ y\in\Sigma^*\}$である．

証明略

$L_3\subseteq\Sigma^*$に対し，$Init(L_3)=L_3$かどうかは一般に決定不能である[2]ので，つぎの結論を得る．

[命題20] 任意のPDA $M$に対応する無限状態オートマトンの任意の部分オートマトンが強連結かどうかは決定不能である．

## 4 むすび

本論文では，プッシュダウンオートマトンのスタック上の系列集合を，そのオートマトンの受理集合等が入力されるときについて，構成的に求めるアルゴリズムを示し，それを使って，プッシュダウンオートマトンに無限状態オートマトンを対応させ，その性質の1つとして，制御問題を論じ，有限オートマトンの制御問題に対し，プッシュダウンオートマトンのクラスの無限状態オートマトンの制御問題を定式化した．

すなわち，プッシュダウンオートマトンに対応する無限状態オートマトンにおいて，その状態間の制御可能性を決定する1つのアルゴリズムを示し，制御系列集合の最短系列を求める1つのアルゴリズムを与えた．また，その無限状態オートマトンにおいて初期状態から到達可能な状態よりなり，もとのオートマトンの遷移は保存している部分オートマトンについては，強連結かどうかが決定できることを示し，そのアルゴリズムを与えた．さらに，一般には，プッシュダウンオートマトンに対応する無限状態オートマトンの任意の部分オートマトンの強連結性は決定不能問題であることを示した．

〔謝辞〕熱心に御討論御検討戴いた本学矢島脩三教授に深謝します．文献〔3〕の存在を御教示戴いた大阪大学谷口健一博士に深

謝します.

[文献]

[1] J.E.Hopcroft and J.D.Ullman, "Formal Languages and their Relation to Automata," Addison-Wesley, 1969.

[2] S.Ginsburg, "The Mathematical Theory of Context-free Languages," McGraw-Hill, 1966.

[3] S.A.Greibach, "A note on pushdown store automata and regular systems," System Development Corp. Rep., TM-738/016/00, Aug. 1965.

[4] S.Ginsburg and S.A.Greibach, "Deterministic context-free languages," Information and Control, 9, 1966, pp.620-648.

[5] Y.Kambayashi and S.Yajima, "Controllability of sequential machines," Information and Control, 21, 1972, pp.306-328.

[6] 山崎,上林,"プッシュダウンオートマトンのスタック上の系列集合の性質とその応用,"信学会研資 AL73-68.

[7] 山崎,上林,"プッシュダウンオートマトンの制御について,"信学会研資 AL73-69.