数理解析研究所講究録
第216巻 1974年 82-98

Topological entropyの応用

東大 教養　高橋陽一郎

位相力学系に対するergodicityの検証の手段は残念ながら多くはない．その一つは，分論，foliationあるいはtransversal fieldsを見出すという，E. Hopf – А.Г. Синайの方向（昨年の久保泉氏の話）である．ここでは，それほど深くはないが，少くとも同型問題においてある程度成功した，entropiesを媒介として，測度論的エルゴード理論に持ち込む方向を紹介したい．それは古典統計力学の理論にかかわってくる．なお，topological entropyそのものに関する諸結果は［　］に詳しく報告されているので参照して頂きたい．

§0. 背景

統計力学において現れたエントロピー[1]ということばは，Shannonの情報理論を経て，エルゴード理論としては，Kolmogorov Sinaiの不変量[2]として有効性が示されたわけであるが，

1). mean entropy，1次元格子系ではK-S不変量と一致．

類似の諸概念の中には，表題の，位相力学系に対する位相的エントロピー（[1]）がある[3]．この量に関しては例えば以下の事実が知られている．

a) top. dim. $M<+\infty$ である限り，任意の不変測度 μ に対して

(1) $$h(M,\varphi,\mu)\leqq \text{top. ent.}(M,\varphi)$$

b) 位相力学系が expansive ならば，shift として実現される（[4]）ことから，

(2) $$\max_{\mu} h(M,\varphi,\mu)=\text{top. ent.}(M,\varphi)$$

とくに，X が，alphabet set $A=\{0,1,\cdots,s-1\}$ 上のシフト不変集合の場合，自然な対応

$$p_s : A^{\mathbb{Z}}\ni x=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \rightsquigarrow \sum_{k\geqq 0}\frac{x_k}{s^{k+1}}\in[0,1]$$

の像 $p_s(X)$ については，

$$\text{top. ent.}(X,\sigma)=s\times \text{Hausdorff dim}(p_s(X))$$

ただし，σ はシフト変換；$(\sigma x)_n=x_{n+1}$ if $x=(x_n)$

2)，3)．定義を与えて述べておこう．

$$\text{top.ent.}(M,\varphi)=\sup_{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{k=0}^{n-1}\varphi^{-k}\alpha\Big) \qquad h(M,\varphi,\mu)=\sup_{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\Big(\bigvee_{k=0}^{n-1}\varphi^{-k}\alpha\Big)$$

α：M の（有限）開被覆　　　　α：M の（有限）可測分割

$$H(\alpha)=\log \text{card}(\text{min. subcover of }\alpha) \qquad H_\mu(\alpha)=\sum_{A\in\alpha}-\mu(A)\log\mu(A)$$

ただし，$\alpha\vee\beta=\{A\cap B \mid A\in\alpha,\ B\in\beta\}$，どちらの場合も $\lim_{n\to\infty}$ は存在する．

Adler-Weiss [2] は，2-torus の群同型は，ergodic な時，(2) において，max の値をとる μ が Haar 測度に限ることを用いて，それらの間の測度論的同型問題を解決した．同様の対応によって，β 変換 $T_\beta t \equiv \beta t \pmod 1$, $0 \leqq t < 1$ がある Markov 変換と同型であることも示されている．さらに，Sh. Ito-M. Mori は，次のようなより拡張された概念，free energy を初めて有効に用いて，lin. mod 1 変換に対して同様の結果を示した．

定義．(M, φ) を位相力学系，U を M 上の実数値(下半)連続函数とする．この時，φ-不変測度 μ に対して，量

$$f(\mu) = f_{M,U}(\mu) = h(M, \varphi, \mu) - \int_M U d\mu$$

を，μ の（ポテンシャル U に対する）自由エネルギー（or 圧力）と呼ぶ．なお，

$$(2') \qquad p(M, U) = \max_{\mu} f_{M,U}(\mu)$$

となる量 $p(M, U)$ が位相的なことばで直接定義されるが省略．

この定義は統計力学の概念の借用である．ただしそこでの慣用記法に従えば，$U = A\Phi$ であって，ポテンシャル Φ そのものではない．同様の借用として，Sinai は次のものを提唱している．([8])

定義．(M, φ)，U は上と同様．λ を1つの不変確率測度とする．もし，μ が，下の $\mu_{n,m}$, $n, m \to \infty$ での漠極限点の1つであれば，それを，(M, φ) 上の potential U に対する極限

Gibbs 測度という．ただし，　$f \in C(M)$

$$\int_M f\, d\mu_{n,m} = \frac{\int_M f(x) \exp\left\{-\sum_{k=-n}^{m} U(\varphi^k x)\right\} d\lambda(x)}{\int_M \exp\left\{-\sum_{k=-n}^{m} U(\varphi^k x)\right\} d\lambda(x)}$$

この場合，境界条件入であると言うことにすれば，次の周期的境界条件を考えることは，周期点の構造と ergodicity の関係を見るのには都合がよいであろう．

定義′　(M, φ)，U は上と同様．　μ_n，$n \geqq 1$ を，

$$\int_M f\, d\mu_n = \frac{\sum_{x \in per_n(M,\varphi)} f(x) \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\varphi^k x)\right\}}{\sum_{x \in per_n(M,\varphi)} \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\varphi^k x)\right\}}, \quad f \in C(M)$$

によって定める．μ_n の $n \to \infty$ での漠極限 μ が存在すれば，それを周期的境界条件の下での極限 Gibbs 測度と呼ぶ．

Sinai [8] は，前の方の概念を用いて Anosov diffeo. に対する3つの不変測度の間の関係を述べている．

a) 伸びる foliation 上 Riemannian volume と絶対連続である不変測度 $\mu^{(e)}$ は，　log（拡大係数）をポテンシャルとする極限 Gibbs 測度である．ただし境界条件は，最大エントロピーをもつ不変測度 $\bar{\mu}$ とする．

b) 縮む foliation 上絶対連続な不変測度 $\mu^{(c)}$ は，ポテンシャル　log（縮小係数）　の極限 Gibbs 測度である．

c) 逆に，$\bar{\mu}$は，$\mu^{(e)}$あるいは$\mu^{(c)}$を境界条件として，ポテンシャルの符号を変えた時の極限Gibbs測度である．

最後に，ここでは，(2) あるいは (2′) において，max の値をとる μ の一意性を利用して，位相的力学系と測度論的力学系の対応をつけたいのであるが，一般には一意性が成立しないだけでなく，複数存在することは，統計力学の相転移の問題にかかわるそれ自身重要な問題であることを注意しておきたい．

§1．一様分布の極限としての平衡測度

以下では，shift $(A^{\mathbb{Z}},\sigma)$ あるいはその subshifts(X,σ) を考える．

定義1．(X,σ)の不変測度μに対して

$$h(X,\sigma,\mu) = \text{top. ent.}\,(X,\sigma)$$

であれば，μは最大エントロピーを持つという．

定義1′．(X,σ)をsubshift，Uを連続函数とする．

$$f_{X,U}(\mu) \equiv h(X,\sigma,\mu) - \int_X U d\mu = p(X,U)$$

である時，μを，X上のpotential Uに対する平衡測度という．以下，平衡測度の全体を，$\mathcal{E}(X,U)$と書く．とくに，$U \equiv 0$

でなれば, $p(X,0)=\text{top. ent.}(X,\sigma)$ である.

しばらく, $U\equiv 0$ と仮定しよう. shift に対しては,

$$\text{top. ent.}(X,\sigma) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \operatorname{card}(W_n(X))$$
$$h(X,\sigma,\mu) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{u\in W_n(X)} -\mu[u]\log\mu[u]$$

である. ただし,

$$W_n = \{(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}) \mid x=(x_n)\in X\} = \operatorname{proj}_{A^{\mathbb{Z}}\to A^{\{0,1,\cdots,n-1\}}}(X)$$

$$[u] = \{x \mid x_k = a_k,\ k=0,1,\cdots,n-1\} \quad \text{if} \quad u=(a_k)_{k=0,1,\cdots,n-1}.$$

ところで, 有限集合 W_n 上の一様確率分布を μ_n とすれば,

$$H(\mu_n)\equiv -\sum_{u\in W_n(X)}\mu_n(u)\log\mu_n(u) = \log\operatorname{card}(W_n(X))$$

であるから, μ_n, $n\to\infty$ での極限, あるいは,

(3) $W_{n,m}=\operatorname{proj}_{A^{\mathbb{Z}}\to A^{\{-n,\cdots,0,\cdots,m\}}}(X)$ 上の一様分布 $\mu_{n,m}$ の $n,m\to\infty$ での極限 μ on X が存在

するならば, μ は最大エントロピーを持つことが期待される. これは, 古典統計力学における極限 Gibbs 測度の考え方に他ならない. [Poincaré の例を挙げておこう.

$W_n = S^{n-1}(n^{\frac{1}{2}})$: $\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}=1$ 上の一様測度を μ_n とすれば, $X=S^{\infty}(\infty^{\frac{1}{2}})$ 上の極限測度 μ_∞ が存在して,

$$\mu_\infty\{x \mid a_i\le x_i\le b_i,\ 1\le i\le k\} = \prod_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx. \quad]$$

<u>Remark</u>. $M=G$ compact Abelian group, $\varphi\in\operatorname{Aut}G$ ならば, Haar 測度 μ は最大エントロピーをもつ.

この一様分布の極限という状況は，(X,σ) が Markov (or of finite type, or intrinsic Markov chain)，かつ U が有限個の座標にのみ依存するときには，確かに起こり得る．組 (X, U) がさらに，条件

$$\forall \alpha : \overset{\text{cover}}{\text{(partition)}} \text{ by cylinder sets } \exists t>0\ \forall U, V \in \alpha,\ U \cap \sigma^t V \neq \emptyset$$

（一様な transitivity）

をみたすとき，$(X, U) \in \mathfrak{F}$ と書くことにしよう．

定理1．$(X, U) \in \mathfrak{F}$ とすると，

(I) $\mathcal{E}(X, U)$ は一点 $\mu_{X,U}$ から成り，Markov測度である．

(II) W_n 上の"重み U の一様分布"を，$u \in W_n(X)$ に対して

$$\mu_n(u) = \frac{\exp\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\sigma^k x_u)\}}{\sum_{v \in W_n(X)} \exp\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\sigma^k x_v)\}}, \quad x_v \in [v] \cap X$$

と定義すれば，$\mu_n \longrightarrow \mu_{X,U}\ (n \to \infty)$．

(III) さらに，

$$\int f(x)\pi_n(dx) = \frac{\sum_{x \in per_n(X,\sigma)} f(x) \exp\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\sigma^k x)\}}{\sum_{x \in per_n(X,\sigma)} \exp\{-\sum_{k=0}^{n-1} U(\sigma^k x)\}}, \quad f \in C(X)$$

によって π_n を定めれば，$\pi_n \longrightarrow \mu_{X,U}\ (n \to \infty)$

後に必要となる限りで証明を述べておく．(I) は既に知られている．簡単のため，(X,σ) は simple Markov, $U(x) = U(x_0, x_1)$ とする．この時，構造行列と呼ばれる行列 $S_{X,U} = (S_{X,U}(a,b))_{a,b \in A}$：

$$S_{X,U}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } (a,b) \notin W_1(X) \\ \exp\{-U(a,b)\} & \text{if } (a,b) \in W_1(X) \end{cases}$$

に対する固有値問題を考える．非負既約行列であるから，最大固有値 $\alpha_{X,U}$，右及び左固有 vector $x=(x_a)$，$y=(y_a) \gneq 0$ に対して，

$$(*) \qquad p(a,b) = \frac{S_{X,U}(a,b)x_b}{\alpha_{X,U}\, x_a}, \quad \pi\{a\} = \frac{x_a\, y_a}{\sum_b x_b\, y_b}$$

を，それぞれ，遷移確率，定常分布とする Markov 連鎖を定める確率測度が $\mu_{X,U}$ である．ところで，$n>p$ の時，

$$\mu_n(a_0 \cdots a_p) = \frac{\sum_b S_{X,U}(a_0,a_1) \cdots S_{X,U}(a_{p-1},a_p)\,(S_U^{n-p})(a_p,b)}{\sum_{a,b} (S_{X,U}^n)(a,b)},$$

$$\pi_n([a_0 \cdots a_p]) = \frac{S_{X,U}(a_0,a_1) \cdots S_{X,U}(a_{p-1},a_p)\,(S_U^{n-p})(a_p,a_0)}{\sum_a (S_{X,U}^n)(a,b)}$$

となるから，(*) によって，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(a_0 \cdots a_p) = \lim_{n\to\infty} \pi_n([a_0 \cdots a_p]) = \pi\{a_0\}\, p(a_0,a_1) \cdots p(a_{p-1},a_p)$$
$$= \mu_{X,U}([a_0 \cdots a_p])$$

以上の結果はすべて，non-Markov な β-subshifts に対しても成立する．さらに，次のような事実が成立することも興味深い．

(IV)《transversal flow の存在》(Sh. Ito, N. Mitsuo) $U \equiv 0$ とする．このとき，(X,σ) の自然な transversal flows (Z_t^+)，(Z_t^-) で，拡大係数 λ，縮少係数 λ^{-1} のものが存在する：

$$\sigma Z_t^+ x = Z_{\lambda t}^+ \sigma x, \quad \sigma^{-1} Z_t^- x = Z_{\lambda t}^- \sigma^{-1} x \quad (\mu_{X,0}\text{-a.a. } x)$$

ただし， $\log \lambda = h(X, \sigma, \mu)$.

(V) 《normal sequence of Champernowne type》(Postnikov, Sh. Ito – I. Shiokawa)　$W_n(X)$に属するwordsを適当に並べて $u_1^n, u_2^n, \cdots, u_{N_n}^n$ とし，片側無限列 ω を

$$\omega = u_1^1 \cdots u_{N_1}^1 u_1^2 \cdots u_{N_2}^2 \cdots u_1^n \cdots u_{N_n}^n u_1^{n+1} \cdots u_{N_{n+1}}^{n+1} \cdots$$

と定義すれば，

$$C(X) \ni f \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\sigma^k \omega)$$

は定まって，$\mu_{X,0}$ に等しい.

§2. 平衡測度の空間 $\mathcal{E}(X,U)$ の構造

既に述べたように，$\mathcal{E}(X,U)$ は $(X,U) \in \mathcal{F}$ の時，一点集合であった．とくに，$X = A^{\mathbb{Z}}$ とすれば，$\mathcal{E}(X,U)$ は1次元格子系の古典統計力学の平衡状態の全体であり，詳しく調べられている（*Ruelle* 達，及び，*Dobrušin* 達）．その結果を，(X,σ) が proper subshift の時にも拡張すれば，例えば，

定理2.　$\mathcal{E}(X,U)$ は，漠compact凸集合であり，その任意の端点 μ は，或る $(X_n, U_n) \in \mathcal{F}$，$X_n \supset X$ に対して，

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_{X_n,U_n} \quad \text{(vague topology)}$$

これを用いれば，Dobrušin の conditional measure の形で，

系．(X,σ) が一様に transitive，$\mu\in\mathcal{E}(X,0)$ ならば，

$$\mu(x_k=a_k,\ k\in\Lambda \mid x_j=x_j^0,\ j\notin\Lambda)=\frac{N_{\Lambda,x^0}(a_k,\ k\in\Lambda)}{N_{\Lambda,x^0}}$$

$$(\forall\Lambda\subset\mathbb{Z}\ \text{finite}\quad \forall a_k\in A,\ \forall x^0\in X)$$

ただし，

$$N_{\Lambda,x^0}=\operatorname{card}\{x\in X \mid x_j=x_j^0,\ j\notin\Lambda\}$$

$$N_{\Lambda,x^0}(a_k,\ k\in\Lambda)=\operatorname{card}\{x\in X \mid x_j=x_j^0\ (j\notin\Lambda)\ x_k=a_k\ (k\in\Lambda)\}$$

しかし，conditional measure の形では，エルゴード理論としては馴染みが薄いので，Jacobian のことばに直しておこう．既に見たように，$\mathcal{F}$ の元に対してはある固有値問題の解によって平衡測度が構成された．一般の場合にもこの方法が適用できるのであるが，そのためには少々細工が要る．先ず，函数 F が，X 上の σ-不変測度全体と直交していれば，$p(X,U+F)=p(X,U)$ である．これを用いれば，$\mathcal{E}(X,U)$ が同じ集合となる U の中から，$X^+=\mathrm{proj}_{A^{\mathbb{Z}}\to A^{\mathbb{N}}}(X)$ として，

$$U(x)=U(x_k,\ k\geq 0)\in C(X^+)\subset C(X)$$

であるものを選ぶことができる．この時，作用素

(1) $$S_{X,U}\varphi(x_0,x_1,\cdots)=\sum_a e^{-U(a,x_0,x_1,\cdots)}\varphi(a,x_0,x_1,\cdots)\qquad (x_0,x_1,\cdots)\in X^+$$

を考えることができる．（[4]，[6]）もし，

$$S_{X,U}h=e^{p(X,U)}h,\quad \rho S_{X,U}=e^{p(X,U)}\rho$$

なる函数 h と確率測度 p が存在すれば，

$$d\mu^+ = h\,dp$$

によって X^+ 上定義される測度 μ^+ の X 上への自然な拡張 μ は容易にわかるように，$\mathcal{E}(X,U)$ に属する； $j_\mu = \dfrac{e^{-U}h}{e^{p(X,U)}h\circ\sigma}$ [4)]

Remark　一般に，X 上の2つの函数 f, g に対してある函数 h が存在して，

(2) $$g - f = h - h\circ\sigma \quad \text{on } X$$

であるとき，g は homologous to $\underbrace{f}_{(g\sim f)}$ と言うことにすれば，

$(X,U)\in\hat{\mathcal{F}}$ の時には，$j_{\mu_{X,U}}(x) = p(x_0, x_1)$ [4)] であるから，

(3) $$-\log j_\mu \sim U \quad \text{on } X$$

また，上の固有値問題が解ける時にも，この式は成立する．

象徴的には，(3) は常に成立することを見よう．

Lemma. $U\in C(X_+)$ ならば，X^+ 上の正の連続函数の列 h_n が存在して，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}\frac{S_{X,U}h_n}{\alpha h_n\circ\sigma} = 1 \qquad (\alpha = \exp p(X,U))$$

証明は正値作用素の一般論 (cf. Kahlin の本) から容易．これから，

Prop. $U\in C(X^+)$ とする．$\mu\in\mathcal{E}(X,U)$ と次の条件は同値である．ただし，j_μ は μ の Jacobian とする [4)]

4) $j_\mu(x) = j_\mu(x^+) = \mu(x_0^+ \mid x_1^+, x_2, \cdots) = \dfrac{d\mu(x^+)}{d\mu(\sigma x^+)}$ 　$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x^+ = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

あるいは $\int_{X^+} f(\sigma x^+)\, g(x^+)\, d\mu(x^+) = \int_{X^+} f(x^+)\, J_\mu g(x^+)\, d\mu(x^+)$, $J_\mu g(x^+) = \sum_{a\in A} j_\mu(a\cdot x^+) \times g(a\cdot x^+)$

$$j_\mu(x^+) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-U(x^+)} h_n(x^+)}{e^{P(X,U)} h_n(\sigma x^+)} \qquad (\mu\text{-a.e. } x^+ \in X^+)$$

ただし，(h_n) は，Lemmaのもの．

Remark. $h_n/h_n\circ\sigma$ は一般には成立しない．実際，$\mathcal{E}(X,U)$ は，$X=A^{\mathbb{Z}}$, $U\in\mathcal{C}(A^{\mathbb{Z}})$ に対しても，一点とはならないことがある．(Dysonのferro-magnetic model, ~~[ ]~~)
Commun. math. Phys. 12 ('69) 91–107.

ところで，$S_{X,U}$ の固有値 $e^{P(X,U)}$ ($=$ spec. rad. $S_{X,U}$ on $\mathcal{C}(X^+)$) に対する固有函数 h が存在する時には，詳しい性質がわかる．

Lemma([9]) $\Phi_k = \{ f(x)=F(x_0,\cdots,x_{k-1}) \mid f\in\mathcal{C}(X), \|f\|\leqq 1\}$ $(k\geqq 1)$ とする．固有確率測度（常に存在）の1つ ρ に対して，$L^1(X,\rho)$ で

(4) $\quad e^{-nP(X,U)} S^n_{X,U} f$, $n\geqq 1$ が $\displaystyle\bigcup_{k\geqq 0} S^k_{X,U}(\Phi_k)$ 上一様収束

するならば，(X,σ,μ) は Bernoulli scheme と同型である．

さらに，この Lemma の仮定と共に（をみたす），$\mathcal{E}(X,U)$ が一点集合となる条件を述べよう．([6], [8] の拡張)

定理 3. ([9]) (X,σ) は一様に transitive，かつ，$U\in\mathcal{C}(X^+)$ は条件

(5) $\quad \displaystyle\sum_{n\geqq 1} \sup\{ |U(x)-U(x')| : x, x'\in X^+, x_k = x'_k \ (\forall k\leqq n)\} < +\infty$

をみたすものとすれば，

(a) $\mathcal{E}(X,U)$ は一点 $\mu_{X,U}$ から成り，Bernoullian．

(b) $d\mu^+_{X,U} = h_{X,U}\, d\rho_{X,U}$ と書ける．$h_{X,U}$, $\rho_{X,U}$ は $S_{X,U}$ の固有値 $e^{P(X,U)}$ に対する(一意な)固有函数，固有測度で，$C(X)$ において，(4) が成立．

(c). $\mu_{X,U}$ は，X 上の任意の不変測度 λ を境界条件とする極限 Gibbs 測度であると同時に，周期的境界条件の下での極限 Gibbs 測度でもある．

§3. $S^1 = [0,1)$ の "Anosov endo." (= f 変換)

この節では，これまでの結果を用いて，S^1 あるいは $[0,1)$ 上の(区分的に)可微分な変換を調べてみる．とくに，ルベーグ測度と絶対連続な不変測度を求めることと，§2 の (1) の作用素 $S_{X,U}$ の固有値問題が同等となる．

先ず，f 変換の定義を述べ位相的力学系としての結果を述べよう．この特別な場合は，expanding endomorphism である．$\mathbb{F}$ によって，$[0,1)$ 上の単調増加連続函数 f の全体とする．ただし，f の逆函数 $\bar{f}$ は，定数 < 1 の Lipschitz 条件をみたすと仮定する．このとき，

$$T_f t \equiv f(t) \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

で定義される $[0,1)$ の変換 T_f を f 変換と言う．とくに，$f(1) - f(0) = n$: 整数であれば，これは S^1 の expanding endomorphism であり，n はその degree である．（f はその一つの Lift）．一般に，$s-1 \leqq f(1)-f(0) < s$ （s：整数）とする時，例えば，函数方程式

$$\rho(\omega) = \bar{f}^{-1}(\omega_0 + \rho(\sigma\omega)), \qquad 0 \leqq \rho(\omega) \leqq 1$$

ただし，$\omega = (\omega_0, \omega_1, \cdots)$ は，$\{0, 1, \cdots, s-1\}$ から成る列．

を解くことによって，shift による実現 ρ

$$\rho : (X_f, \sigma) \longrightarrow ([0,1), T_f)$$

が得られる．$([0,1), T_f)$ は，（T_f が連続とは限らないので）一般に位相力学系ではないが，この対応によって，

$$\mathrm{ent}([0,1), T_f) = \mathrm{top.ent}\,(X_f, \sigma)$$

と定義しよう．

定理 4．$f, g \in \mathcal{F}$，$\mathrm{ent}([0,1), T_f) = \mathrm{ent}([0,1), T_g)$ ならば，$T_f \sim T_g$．[or $(X_f, \sigma) \sim (X_g, \sigma)$]

Remark．とくに $\varphi = T_f$ が expanding endo ならば，これは，Shub の定理[7] の特別な場合であって，

$$\mathrm{top.ent}\,(S^1, \varphi) = \mathrm{ent}([0,1), T_f) = \log \deg \varphi$$

しかし，位相的同型は，f 変換を，r 進展開に伴う変換の拡張と見る限り意味を為さない．この時には，ルベーグ測度と絶対連続な不変測度をコミで考えなければならない．[残念ながら，$\mathcal{F}$ には連分数展開は入らないが，その時には，X_f

に対応するものが，$(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ であることからも，絶対連続な不変測度は位相的~~同型~~(C^0)構造によらないことが推量される]．

定理 5. $\mathcal{F}_0=\{f\in\mathcal{F}\mid \exists f':\text{Lipschitz},\ f(0)=0\}$ とする．このとき，不変測度 $d\mu_f(t)=h_f(t)dt$ が存在して，$([0,1),T_f,\mu_f)$ は Bernoulli と同型である．

Remark. この μ_f は，自由エネルギー

$$f(\mu)=h([0,1),T_f,\mu)-\int\log f'(t)\,d\mu(t)\quad(\leqq 0)$$

を最大にする唯一つの不変測度である．従って一般には，

$$h([0,1),T_f,\mu_f)\leqq \mathrm{ent}([0,1),T_f).$$

とくに，$f'=\mathrm{const}$ の時，即ち，T_f が β 変換：$f(t)=\beta t$ の時に限って，等号が成立する．

証明の概略． 今，$[0,1)$ 上の測度 $h(t)dt$ の $T=T_f$ による像を考えると，これも絶対連続で，$(Jh)(t)dt$ と書ける：

$$(Jh)(t)=\sum_{s\in T^{-1}t}\frac{h(s)}{f'(s)}\qquad t\in[0,1)$$

従って，実現された subshift (X_f,σ) で考えれば，これは，

$$U(\omega)=U_f(\omega)=\log f'(P(\omega)),\qquad x\in X_f$$

を potential とする operator $\mathcal{S}=\mathcal{S}_{X_f,U_f}$ に対応する：

$$(\mathcal{S}h)(\omega)=\sum_{a:\,a\cdot\omega\in X_f}e^{-U(a\cdot\omega)}h(a\cdot\omega)$$

ゆえに，$\mathcal{S}$ の固有値問題を調べればよい．

才1に，f' が Lipschitz であることから，v が §2 定理3 の条件 (5) をみたすことが導かれる．従って，(X_f, σ) が一様 ~~な~~ transitive な Markov subshift のときには，定理3によって結論が得られる．ただし，そこでの測度 $P = P_{X,v}$ は，この場合の ~~map~~ 函数 P による Stjelties 積分である．

才2に，$\varphi_0 \ni f$ によって，X_f はある β 変換に対応する集合 X_β に等しいことがわかる．従って，稠密かつ可算の β（ある種の代数方程式の根）に対しては，才1の case で解決されることがわかる．一般の $\beta > 1$ に対しては，X_β のより詳しい性質（[ ]）を用いる必要があるが，基本的には，Markov になる β_n による近似によって定理が示される．

Remark. 1) f 変換は自明な transversal field $\xi_s t \equiv t+s \pmod 1$ を持つ．また，もし，区分的に滑らかな transversal field $S_s t$ を持てば，$a(t) = \frac{d}{ds} S_s t|_{s=0}$ とおく時，

$$\lambda(t) a(T_f t) = a(t) f'(t). \qquad \lambda(t): \text{拡大係数}$$

2): すべての endomorphism $(A^{\mathbb{N}}, \sigma, \mu)$ は，ともかく，ある種の f 変換として表現でき，上の結果はその滑らかさがあれば Bernoulli 性までわかることを主張していることになる．しかし，f に対しての平衡測度は一般には一意ではないと思われる．

[1] Adler-Kohnheim-McAndrew, Topological entropy, Trans. AMS. 114 ('65) 309–319

[2] Adler-Weiss, Similarity of Automorphisms on the torus, Mem. AMS. 98. ('70)

[3] Goodwyn,
Bull. AMS.

[4] Keynes-Robertson, Generators for topological entropy and expansiveness, Math. System Theory 3 ('69) 51–59.

[5] Sh. Ito - Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of β-expansion, J. Math. Soc. Japan 26 ('74) (to appear)

[6] Ruelle,
Commun, Math. Phys. 9 (1968) 267-

[7] M. Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifold, Am. J. Math. 91 ('69) 175–199

[8]. Sinai, Gibbsian measures in ergodic theory
Niece Congress

[9] Y. Takahashi, β-transformations and symbolic dynamics, Proc. 2nd Japan-USSR symp. on prob.