数理解析研究所講究録
第216巻 1974年 110-122

Anosov diffeomorphism について、主に Manning の結果について

都立大 理 岡部 恒治

§0 はじめに、

Anosov diffeo とは Riemann 多様体 M から自分自身への微分位相同型 $f: M \longrightarrow M$ であって、次の条件を満すものである。

(i) $T(M)$ (Mの tangent bundle) が 2つの $T(f)$ (fの微分) 不変な bundle の Whitney sum と表わされる。 i.e.

$$T(M) = E^u \oplus E^s, \quad T(f)(E^u) = E^u, \quad T(f)(E^s) = E^s$$

(ii) 定数 $c > 0$, $\lambda > 1$ を適当に取ることが出来、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|T(f)^m(x)| \geqq c\lambda^m |x| \quad , x \in E^u$$

$$|T(f)^m(x)| \leqq c^{-1}\lambda^{-m} |x| \quad , x \in E^s$$

となる。

これから、M は compact, without boundary とする。

これらの Anosov diffeo には次の topological conjugate によって同値関係を入れておくことが出来る。

$f: M \longrightarrow M$ と $g: N \longrightarrow N$

の2つのAnosov diffeo が topological conjugate とは、$\exists h : M \longrightarrow N$ なる homeo があって、次の図式が可換な時を言う。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

この時 $f \sim g$ と書く。

次の問題は直ちに浮び上るであろう

〈問題0〉 すべてのAnosov diffeo を topological conjugacy class で分類せよ

これから派生する問題をいくつかを Smale は Bulletin [1] で列挙している。（$\Omega(f)$ は f の non wondering set）

〈問題1〉 Anosov diffeo $f : M \longrightarrow M$ について常に, $\Omega(f)=M$?

〈問題2〉 $\Omega(f)=M$ なる全ての Anosov diffeo を求めよ（1が成立たねば）

〈問題3〉 f は常に fixed pt を持つか？

〈問題4〉 Anosov diffeo を持つための M の条件は？

〈問題5〉 M が Anosov diffeo を持つとき, M は Euclid sp で cover されるか？

これらの問題に対して、Smale, Franks, Newhouse, Shiraiwa, Manning, etc. が大きな成果を上げて来た。

まず Smale は〈問題0〉について次の conjecture を立てた

〈Smale Conjecture〉 compact mfd M 上の Anosov diffeo は infra-nil mfd 上の hyperbolic auto と同値である。

これに対して、Franksは[2]に於いて、codim 1のAnosov diffeo (ie $\dim E^u$ or $\dim E^s = 1$) で$\Omega(f)=M$ の場合について、Smale conjecture の成り立つことを示した。また問5についても同様の条件をつければ正しいことを示した。この中で強力な武器になっているのが、いわゆる「π_1-diffeo」なる概念である。(これは基本群の準同型で、diffeo の conjugacy class を規定しようという試みから生れた。) この「π_1-diffeo」なる概念は、次のFranksの論文[3] に於いてより一層大きな仂きを示した。彼は条件づき ($\Omega(f)=T^n$, f_* がhyperbolic) でtorus上の Anosov diffeo の分類を決めた。下の定理がそうである。

0-1〈Th〉(T^n上のAnosov diffeo の決定).

> $f: T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo, $\Omega(f)=T^n$,
> $f_*: H_1(T^n; R) \longrightarrow H_1(T^n; R)$ が hyperbolic
> $\Rightarrow$ $f \sim$ hyperbolic toral auto

また〈問題4〉についても、次の結果が得られた。

0-2〈Th〉
> $f: T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo $\Rightarrow$
> $f_*: H_1(T^n; R) \longrightarrow H_1(T^n; R)$ は root of unity の固有値を持たない。

この結果は次のShiraiwa [4]につながる。

0-3〈Th〉
> M compact connected, $f: M \longrightarrow M$ Anosov diffeo
> $\Rightarrow$ $f_*: H_*(M; Q) \longrightarrow H_*(M; Q)$ は id でない

この主定理といくつかのCorollaryから、次のいくかのmfdがAnosov diffeoを持たない事が示された。

その例：rational homology sphere, lens space, projective space（$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, Cayley number それぞれの上の）, $S^{2n}\times S^{2n}$ $(n\geq 1)$, Spin(n), $SU(n)$, $Sp(n)$, 例外Lie group, G_2, G_4, E_6, E_7, E_8 … etc.

一方Manningは、[5]において、periodic pointの個数を、Markov partitionのsubshiftのmatrixの固有値によって書き表わした。これと、nilmanifold上でLefshetz formulaが成立することを示し、この2つのperiodic pointの個数を表わす式の比較によって、次の定理を得た。以後 M は infranil manifold！

0-4 Th A（hyperbolic conditionの除去）

$f: M\longrightarrow M$ Anosov diffeo

$\Rightarrow$ $f_*: \pi_1(M)\longrightarrow \pi_1(M)$ が hyperbolic

（注）NをNilpotent Lie groupで、Mのuniversal coveringとした時、f_*は $\widetilde{f_*}: N\longrightarrow N$ なるautomorphismへextentできる。$D\widetilde{f_*}: T_eN\longrightarrow T_eN$（$T_eN$は単位元$e\in N$でのtangent space）がhyperbolicな時 f_* をhyperbolicと呼ぶ。

また、彼はπ_1-diffeoを再び用いて、Lefshetz numberの比較，などから、次の定理を示した。

0-5 Th B（$\Omega(f)$ conditionの除去；問1への部分的解答）

$f : M \longrightarrow M$ Anosov diffeo $\Rightarrow \Omega(f) = M$

このThA, ThBは、Franksの Th (T^n上のAnosov diffeoの決定)の条件を二つ除去する役目を果している。よって、次の定理がわかる

0-6 Th. C ((0)の部分的解答)

$f : M \longrightarrow M$ Anosov diffeo

$\Rightarrow$ fと hyperbolic infranil manifold Automorphism

これはSmale conjectureのinfranil manifoldについての完全な解答になっている。このThAとThBはManning[6]に示されている。この証明を中心に解説しよう。

§1 Franksの π_1-diffeo

次のThがManningの結果への突破口となったものである。

1-1 <Th> $g : M \longrightarrow M$ を hyperbolic infranil manifold Auto とする時 gは次の性質を持つ。$\forall K$: CW-complex, $\forall f : K \longrightarrow K$ homeo, $\forall h : K \longrightarrow M$ conti map で fもhも base pt preserve とする。今

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(M) \\ \pi_1(K) \arrow[u, "h_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(K) \arrow[u, "h_*"'] \end{tikzcd}$$

が可換 $\Rightarrow$ $\exists h' \simeq h$ s.t.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & M \\ K \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & K \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd}$$

が可換

(注) この時 g を π_1-diffeo の条件をもっているという。

上の Th を用いて 0-1〈Th〉 を証明するには次のようにすれば良い。

〈証明〉 今 $\forall f : T^n \longrightarrow T^n$ Anosov diffeo を持ってくる。f が fix pt を持つ事は、単純な計算で出る。

1-1 Th により、

$$\begin{array}{ccc} f: T^n & \longrightarrow & T^n \\ h' \downarrow & & \downarrow h' \\ T^n & \xrightarrow{g} & T^n \end{array}$$

s.t. $h' \simeq id$
g は $g_* = f_*$ なる toral auto

なる可換図式が得られる (∵ 0-7 の条件の所に $h = id$ として代入せよ! $g_* = f_*$ としておけば明らかに可換であろう)

この h' が homeo であることを示せば良い (T^n: compact, Hausdorff より 1:1, onto 性を示せば良い)

◎ h' onto なることは、T^n が境界なしの compact mfd で、$h \simeq id$ より容易である。

◎ h' 1:1 なること。 h' の universal covering への lift $\bar{h}'$ を考えよ、これが 1:1 であることを示す。($\bar{h}' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n \ni x$ に対して、$\bar{f}$ の unstable leaf $u(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \lim \bar{f}^{-n}(y) = \lim \bar{f}^{-n}(x) \}$ $\bar{f}$ の stable leaf を $S(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n ; \lim \bar{f}^n(y) = \lim \bar{f}^n(x) \}$ として定義せよ、この leaf が、直交し、座標系の如くに取れる事は既に知られている。今、$z \neq z'$ で $\bar{h}'(z) \neq \bar{h}'(z')$ なる二点 z, z' が取れたとする。そうすると $z'' = u(z) \cap S(z')$ なる点 z'' も決まる。

この z'' は $\bar{h}'(z'') = u(\bar{h}'(z);\bar{g}) \cap s(\bar{h}'(z);\bar{g}) = \bar{h}'(z)$
($\because \bar{h}'(z) = \bar{h}'(z')$) 但し $s(y;\bar{g})$ は y の $\bar{g}$ に於ける stable leaf を示す。$u(y;\bar{g})$ も同様。

$\therefore$ $u(z'') = u(z)$, $\bar{h}'(z'') = \bar{h}'(z)$, $z'' \neq z$ なる z'', z が得られた。ところが $\bar{h}'$ が proper map (compact set の逆像も compact) なることが, $\bar{h}' \simeq id$ なる事より得られる。

このような z, z'' に対し、$\Omega(f) = T^n$ という事を用いると、(proper から殆んど明らかに) $d(u(z);\, z, z'') < \mu$ なる μ constant が求まる。但 $d(u(z);\cdot\cdot)$ は $u(z)$ の中での距離. 一方, $\bar{f}^n(z)$, $\bar{f}^n(z'')$ についても $u(\bar{f}^n(z)) = u(\bar{f}^n(z''))$, $\bar{h}'(\bar{f}^n(z)) = \bar{g}^n(\bar{h}'(z)) = \bar{g}^n(\bar{h}'(z'')) = \bar{h}'(\bar{f}^n(z))$ であるから、$d(u(\bar{f}^n(z));\, \bar{f}^n(z), \bar{f}^n(z'')) < \mu$ である. しかし、unstable leaf の定義から、n を十分大に取ると、
$d(u(\bar{f}^n(z));\, \bar{f}^n(z), \bar{f}^n(z'')) > \mu$ となる。これは矛盾.

§2 Manning's calculation

この § では Manning [5] の結果を述べる.

$f : M \to M$ Axiom A diffeo (Anosov なら O.K.) $M \supset \Omega$ を一つの basic set とする (白岩氏の講演参照)。このとき, Markov partition $\mathcal{C}$ of Ω とは、$\mathcal{C}$ は finite cover of Ω で

(i) ${}^\forall E_j \in \mathcal{C}$ は rectangle (stable leaf と unstable leaf の直積)

で $\overline{\mathring{E}_j} = E_j$ である。

(i) $E_i \cap E_j \subset \partial E_i \cap \partial E_j$

(ii) $x, y \in E_j \Rightarrow W^s(x,\varepsilon) \cap W^u(y,\varepsilon) \in E_j$

(iii) (Markov property) $E_j, E_k \in \mathcal{E}$, $x \in \mathring{E}_j \cap f^{-1}(\mathring{E}_k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\{W^s(x,\varepsilon) \cap E_j\} \subset W^s(f(x),\varepsilon) \cap E_k \\ f\{W^u(x,\varepsilon) \cap E_j\} \supset W^u(f(x),\varepsilon) \cap E_k \end{cases}$$

の4条件を満すものである。

$\mathcal{E}$ に対し、$\mathcal{E}$ の transition Matrix T とは

$T = (t(E_j, E_k))$ のことである

$$\text{但し } t(E_j, E_k) = \begin{cases} 1 & f(\mathring{E}_j) \cap \mathring{E}_k \neq \emptyset \\ 0 & f(\mathring{E}_j) \cap \mathring{E}_k = \emptyset \end{cases}$$

今 $\Lambda(T) = \{(E_n)_{n=-\infty}^{\infty} ; E_n \in \mathcal{E},\ t(E_n, E_{n+1}) = 1\}$ とおいて、$\tau : \Lambda(T) \longrightarrow \Lambda(T)$ なる subshift of finite type を $\tau((E_n)_{n=-\infty}^{\infty}) = (E_{n+1})_{n=-\infty}^{\infty}$ とせよ。また $\pi : \Lambda(T) \longrightarrow \Omega$ を、$\pi((E_n)) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(E_n)$ とすれば、π は map となり、次の可換図式を満たす

$$\begin{tikzcd} \Lambda(T) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda(T) \arrow[d, "\pi"] \\ \Omega \arrow[r, "f"] & \Omega \end{tikzcd}$$

π は、ほとんど 1:1 で

$\exists n$; 高々 $n:1$ になることがわかるから、f の periodic pt は τ の periodic pt で評価できそうである。

今 $i = (i_1, \cdots, i_k)$ $i_j \in \mathbb{N}$ なる n-tuple を1つ fix

する。このとき,

$$\mathcal{A}_i = \{(e_1, \cdots, e_k)\ ;\ e_j \text{ は } i_j \text{ 個の rectangle} \in \mathcal{E},\ \cup e_j \text{ はすべて distinct},\ \cap n e_j \neq \phi\}$$

とおく。$\mathcal{A}_i$ に対して, transition matrix A_i を次のように定義する。 $e^m = (e_1^m, \cdots, e_k^m)$, $e^\ell = (e_1^\ell, \cdots, e_k^\ell) \in \mathcal{A}_i$ に対し

$$t(e^m, e^\ell) = \begin{cases} 1 & ;\ e_j^m = \{E_1^m, \cdots, E_{i_j}^m\},\ e_j^\ell = \{E_1^\ell, \cdots, E_{i_j}^\ell\} \text{ としたとき適当に index をつけ換えて } t(E_h^m, E_h^\ell) = 1 \text{ の時} \\ 0 & ;\ \text{other wise.} \end{cases}$$

とし, $A_i = (t(e^m, e^\ell))$ (m 行 ℓ 列の値が $t(e^m, e^\ell)$ の行列)

とせよ。これにより、$\alpha_i : \Lambda(A_i) \longrightarrow \Lambda(A_i)$ なる shift も定まる。特に、$A_1 = T$, $\alpha_1 = \tau$ であることに注意せよ。次に与えるのが [5] の主定理である

〈Th〉 (Manning の評価式) f^m の fixed pt (ie periodic pt で period m) の個数を $N_m(f)$ とした時

$$N_m(f) = \sum_{i,j} (-1)^{k+1} \mu_{i,j}^m \quad ;\ \text{但し } \mu_{i,j} \text{ は } A_i \text{ の eigen values}$$

§3 ThA の証明

いよいよ定理を証明する。証明は背理法による。即ち、Th

の反例 $f: M \longrightarrow M$ が存在するとして、このfに対する、Manning評価式とLefshetz formula が異なることを示して矛盾を出す。0°) まず $\Omega_1(f)=M$ (i.e. 1つのbasic set だけの場合)の時

1°) $f: M \longrightarrow M$ が反例とせよ (f_* が hyperbolic ではない。)

このときMをnilmfdとしても一般性を失なわない

∵) Auslander[7] により、$f_*: \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(M)$ は $\pi_1(M)$ の maximal nilpotent subgroup を preserve, だから、このgr. に関する(finite) covering を考えると、それは nilmfd N となる。しかも $\bar{f}$ は Anosov で、hyperbolic でない。

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & N \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

2°) M が nilmanifold ならば Lefshetz formula が成立して、

$N_m(f) = \prod(1-\lambda^m)$ 　λは f_* の eigen value をすべて動く

∵) Manning[8] を見よ.

3°) A_1 の絶対値最大の固有値 μ_1 は (イ) $\mu_1 > 0$, (ロ) $|\mu_1| > |\mu_{i,j}|$ $\forall i, \forall j$ を満たす。

∵) (イ)は $\exists m$; A_1^m のすべての entries が正であること(⇐ fのMに於ける transitiveness) より出る。(ロ)は、μ_1 が $\bigcup E_i$ の periodic pt. に対応する数であり、他の固有値が $\bigcup \partial E_i$ の periodic pt. に対応する数であることより出る。

4°) $\prod(1-\lambda^m) = N_m(f) = \sum(-1)^{k+j}\mu_{i,j}$ を解析せよ

fが必ずperiodic pointを持つから、λが1の巾根である事はない。($\lambda^m=1 \Rightarrow \prod(1-\lambda^{mq})=0 \quad \forall q\geq 1$) しかも、$f_*$がhyperbolicでないから、$\exists\lambda$; $|\lambda|=1$であって、λは1の巾根でない。

$$\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|<1}(1-\lambda^m) = \sum_{\mu_{i,j}\neq\mu_1}(-1)^{k+1}\mu_{i,j}^m + \mu_1^m$$

と書き直す。mを無限大に飛ばすと、

$$\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^m) \fallingdotseq \mu_1^m \qquad (m\text{十分大})$$

となる。これで両辺を割ると、

$$\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)\prod_{|\lambda|>1}(1-\lambda^{-m})\prod_{|\lambda|<1}(1-\lambda^m) = \sum(-1)^{k+1}\mu_{i,j}^m/\mu_1^m + 1$$

となる。再び $m\to\infty$ にすると、(左辺の第2,第3項→1)

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m) = 1 \quad \text{となる}$$

しかし、λは、1の巾根でないから、$\{\lambda^m\}$はいくらでも、1に近い部分列を持つ。故に $\lim_{m\to\infty}\prod_{|\lambda|=1}(1-\lambda^m)=0$ (もし存在すれば) これは矛盾。

5°) $\Omega(f)$がいくつかのbasic setに分かれていた時は、各basic setの中のμ_1を取り、その中の最大値を取って同様の議論

§4. Th Bの証明

1°) $f: M \longrightarrow M$をThの反例 (i.e. $\Omega(f)\neq M$)とせよ。§3の1°)と同じ理由で、Mをnilmfdとして良い。

2°) 1-1 Th より下図が可換となるような $k: M \longrightarrow M$ が存在する。しかも $k \simeq id$，k は base pt preserving

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[d, "k"] \\ M \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

但し g は $g_* = f_*$ となるような nil auto

3°) M には basic set が2つ以上必ず存在する。

∵) $\bigcup_i W^u(\Omega_i) = M$ と，f が diffeo であって，M が compact without boundary という条件による。

4°) basic set のうち 適当な Ω_1 を取ると，$k(\Omega_1) = M$ とできる。

∵) まず $k(\Omega(f)) = M$ なること，if $k(\Omega(f)) \neq M$ とすると $\overline{Per(g)} = M$ であるから $\exists z \in M$; $g^q(z) = z$ で，$k(\Omega(f)) \not\ni z$ さて，$\bigcup_{i=1}^{q} k^{-1} g^i(z)$ は compact f-inv subset で $\Omega(f)$ と intersect しない。しかし，これは矛盾。

つぎに，g が nil auto より，dense orbit ω をもつ（$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} g^i(\omega)} = M$）　$k^{-1}(\omega) \cap \Omega(f) \ni x$ とし，$x \in {}^{\exists}\Omega_1 \subset \Omega(f)$ を取れ。

5°) $L(f^m) = L(g^m)$　（Lefshetz number が等しい）

しかも，$k \simeq id$ より，k は periodic pt を 1:1 に写す。しかし，$k(\Omega_1) = M$ であって，別の basic set Ω_2 にも periodic pt が存在しているのであるから矛盾である。(証終)

— REFERENCES —

[1] Smale : " Differentiable Dynamical Systems" Bulletin of A.M.S.

[2] Franks : "Anosov Diffeomorphisms" Proceedings of the Simposia in Pure Mathematics, Vol. 14 (Global Analysis)

[3] Franks : "Anosov diffeomorphisms on tori" Transactions of the A.M.S. Vol 145

[4] Shiraiwa : " Some conditions on Anosov diffeomorphisms" to appear in Proceedings of Tokyo conference

[5] Manning : "Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions" Bull. of the London Math.Soc. Vol 3

[6] Manning : "There are no new Anosov diffeomorphisms on tori" to appear

[7] Auslander : "Bieberbach's theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups" Annals of Mathematics Vol 71

[8] Manning : "Anosov Diffeomorphisms on Nilmanifolds" Proceedings of A.M.S. 38(1973)