数理解析研究所講究録
第 216 巻 1974 年 142-155

無限粒子の力学系の構成 II

広島大　理　村田　博

§1. 序（準備）

本稿では、*finite range*，*pair interaction potential* から決まる1次元の（固い殻をもつ）無限粒子の力学系の構成を，主として，Ya. G. Sinai [11] の方法に従って与え，特別のクラスのポテンシャル（理想気体や *hard rod* 系に対応するもの）については，その力学系の *regularity*（エルゴード性，混合性等）が言える（[13]，[10]）ので，その証明を解説する。このためこの節で，基本的な定義と結果を証明抜きで述べておく。詳しくは，V. A. Rohlin [8] や，十時 [12] を参照されたい。

可測空間 (M, μ) を，$[0, 1)$ に *Lebesgue* 測度を付与した空間と（*metrical* に）同型となるという意味で自然な *non-atomic Lebesgue* 空間としよう。

<u>定義1</u>　(M, μ) の分割 $\zeta = \{C_\zeta\}$ が<u>可測分割</u>であるとは，高々可算個の元から成る可測集合の系 $\{\Gamma_n\}$ が存在して，任

意の $C_\zeta \in \zeta$ と，任意の n に対し，

$$C_\zeta \cap \Gamma_n = \phi \ (a.e.) \quad or \quad C_\zeta \cap \Gamma_n^c = \phi \ (a.e.)$$

が成り立つ時をいう。

定義2　T_t が (M, μ) 上の automorphism (mod.0) のつくる one-parameter group をなす時，(M, μ, T_t) を dynamical system（力学系）という。

定義3　力学系 (M, μ, T_t) が ergodic（エルゴード的）であるとは、任意の $f \in L^1(M, \mu)$ に対し，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(T_s a)\, ds = \int_M f(a)\, d\mu(a) \quad , \ a.e.\ a$$

が成り立つときをいう。

定義4　力学系 (M, μ, T_t) が K-力学系（K-system）であるとは，次の3条件をみたす，K-分割と呼ばれるような (M, μ) の可測分割 ζ_0 が存在するときをいう：

1)　$T_t \zeta_0 \geq \zeta_0 \quad mod.0 \quad t \geq 0$　（$\xi \geq \eta \Leftrightarrow \xi$ は η の細分）

2)　$\bigvee_t T_t \zeta_0 = \varepsilon \quad mod.0$　（ε は M の各点への分割）

3)　$\bigcap_t T_t \zeta_0 = \nu \quad mod.0$　（ν は M のみを元とする分割）

以上の定義から次の命題が言える。

Proposition 1　(M, μ, T_t) が K-力学系ならば，ergodic.

(注)　K-力学系 ⇒ 全ての位数の混合性，σ-Lebesgue スペクトル，完全正のエントロピーをもつ。ことも言える。c.f. [12]

§2. 相空間（phase space）の構成と，極限 Gibbs 分布.

次の条件をみたすような pair interaction potential $U(r)$ を考えよう：

$$1)\quad U(r) \equiv \infty \quad \text{if} \quad 0 \le r \le r_0 ,$$
$$\qquad\qquad < \infty \quad\quad\quad r > r_0 ,$$

$$2)\quad U(r) \in C^3((r_0, \infty)) , \quad U(r) \geqq A > -\infty ,$$

$$3)\quad U(r) \equiv 0 \quad \text{if} \quad r \geqq r_1 > r_0 .$$

区間 $\Omega\,(\subset \mathbb{R}^1)$ に対し，$\mathcal{C}_\Omega$ で

$$\min_{q', q'' \in \hat{q}_\Omega} |q' - q''| > r_0 \qquad (*)$$

をみたすような，Ω の有限個の点から成る部分集合 $\hat{q}_\Omega$ の全体を，また，$\mathcal{C}_{\Omega,N}$ で，その点の個数 $N(\hat{q}_\Omega)$ が N であるようなもの全体をあらわそう。各 $c \in \mathcal{C}_{\Omega,(N)}$ に対し，$p_c(\cdot)$ を c 上の実数値関数として，

$$M_\Omega = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} , \ c \in \mathcal{C}_\Omega \}$$
$$M_{\Omega,N} = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} , \ c \in \mathcal{C}_{\Omega,N} \}$$

とおく。（$p_c(x)$ は点 $x \in c$ にある粒子の速度とみる）

同様に，$\mathcal{C}$ で

$$\min_{q', q'' \in \hat{q}} |q' - q''| > r_0$$

をみたすような，有限個又は可算無限個の点から成る集合 $\hat{q}$ の全体をあらわし，

$$M = \{ a = \{c, p_c(\cdot)\} , \ c \in \mathcal{C} \}$$

とおく。M は，自然な projection に関する，M_Ω の $\Omega \uparrow \mathbb{R}^1$ で

の *inductive limit* になっており，また，空間 $M_{\Omega,N}$ は

$$((\Omega\otimes\mathbb{R}^1)^{\otimes N})'/S_N \qquad (\ ' \text{は条件}(*)\text{による制限})$$

と同一視することにより，$M_{\Omega,N}$ 上の可測集合族

$$\mathcal{F}_{\Omega,N} = \sigma\left\{\{\hat{\xi}_\Omega : N(\hat{\xi}_\Omega)=N,\ N(\hat{\xi}_\Omega\cap\Delta)=\ell\},\ \ell\in\mathbb{N},\ \Delta\in\mathcal{B}(\Omega)\right\}$$

上に 測度 $\nu_{\Omega,N}$ を

$$\nu_{\Omega,N}(A) = \frac{1}{N!}\,\tilde{\lambda}_\Omega(\tilde{A}) \quad , \quad A\in\mathcal{F}_{\Omega,N}$$

($\tilde{\lambda}_\Omega$ は $((\Omega\otimes\mathbb{R}^1)^{\otimes N})'$ 上の *Lebesgue* 測度，
$\tilde{A}$ は *permutation* S_N による商が A となる
ような（逆像としての）集合)

で定めることができる。従って，M_Ω 上の可測集合族 $\mathcal{F}_\Omega$ 上にも 測度 ν_Ω を同様に定義できる。今後，これらを区別せずに da と書く。

$a=\{c,\ p_c(\cdot)\}\in M_\Omega$ に対し

$$E(a) = \frac{1}{2}\sum_{x\in c} p_c^2(x) + \sum_{x,y\in c,\ x\neq y} U(|x-y|) \quad ,$$

$$N(a) = N(c)$$

とおいて，Ω での *grand canonical* な *Gibbs* 分布を，部分集合 $V\subset\Omega$ に対する自然な *projection* $\varphi_{\Omega,V} : M_\Omega \longrightarrow M_V$ を用いて，$A\in\mathcal{F}_V$ に対し

$$P_{\Omega,\beta,\mu}(S^{\Omega}_{V,A}) = \Xi^{-1}(\Omega;\beta,\mu)\int_{M_\Omega}\chi_A(\varphi_{\Omega,V}(a))\,e^{-\beta E(a)-\mu N(a)}\,da$$

で定めよう。ただし，

$$S^{\Omega}_{V,A} = \varphi^{-1}_{\Omega,V}(A) \quad , \quad \Xi(\Omega,\beta,\mu) \text{ は正規化定数}$$

である。この定義は，projection $\varphi_\Omega : M \longrightarrow M_\Omega$ を用いて定まるM上の可測集合族

$$\mathcal{F} = \sigma\{ \varphi^{-1}_\Omega(A) \ : \ A \in \mathcal{F}_\Omega \}$$

上の完全加法的な確率測度を与える。そこで，区間の増大列 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \uparrow \mathbb{R}^1$ なるものをとって，

$$\lim_{n\to\infty} P_{\Omega_n,\beta,\mu}(S_{V,A}) = P_{\beta,\mu}(S_{V,A}) \quad , \quad S_{V,A} = \varphi^{-1}_V(A)$$

と定義するとき，この収束は $A \in \mathcal{F}_V$ に関して一様で，しかも，この極限は，列 $\{\Omega_n\}$ の選び方に依存しない。従って，$P_{\beta,\mu}(\cdot)$ は $\mathcal{F}$ 上の確率測度を与える。（Minlos [3] 参照）

この測度 $P_{\beta,\mu}$ は（grand canonical な）極限 Gibbs 分布と呼ばれる。このとき，次のことがわかる。

<u>Proposition 2</u>　(M,μ)，$\mu = P_{\beta,\mu}$ は Lebesgue 空間である。

㊟ canonical な Gibbs 分布 $P_{\Omega,\beta,N}(\cdot)$，micro-canonical な Gibbs 分布 $P_{\Omega,E,N}(\cdot)$ からも同様に $\mathcal{F}$ 上の極限 Gibbs 分布

$$P_{\beta,\rho}(S_{V,A}) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \frac{N_k}{|\Omega_k|}\to\rho}} P_{\Omega_k,\beta,N_k}(S_{V,A})$$

$$P_{h,\rho}(S_{V,A}) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \frac{E_k}{|\Omega_k|}\to h,\ \frac{N_k}{|\Omega_k|}\to\rho}} P_{\Omega_k,E_k,N_k}(S_{V,A})$$

が定義でき，Uにもう少し滑らかさの条件を入れると，次の命題が証明できる。 c.f. A. Haitov [1]，その他 [2]，[5] 等

Proposition 3　熱力学的パラメータ (ρ, μ), (β, ξ), (λ, ρ) の間にある自然な対応があって，その下では，上の3種の極限 Gibbs 分布は equivalent である。

＜証明には，粒子数とエネルギーに関する中心極限定理を用いる。＞ 以後，この極限 Gibbs 分布を μ とかく。

$M \ni a = \{c, p_c(\cdot)\}$ に対し，負の座標をもち，原点に最も近い粒子に番号0を与えることにより $a = \{(q_i, p_i)\}$ と書こう。この番号付けのもとで，次の方程式系で記述される，$|i| \leq n$ なる番号 i の粒子の運動を考えよう。

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\sum_{|j| \leq n} \frac{\partial U(|q_i - q_j|)}{\partial r} - \sum_{|j| > n} \frac{\partial U(|q_i - q_j^{(0)}|)}{\partial r}$$

初期配置 $a = \{(q_i^{(0)}, p_i^{(0)})\}$

すると，以上の注意から，次節で有効となる基本的な命題を得る。

Proposition 4　([11])　$\exists c_1, c_2 > 0$　，以下のようにして定義される初期配置の空間を $M(c_1, c_2)$ と書くと，$\mu(M(c_1, c_2)) = 1$.

$M(c_1, c_2) \ni a$　iff　$\exists n_0(a)$ integer such that $\forall n \geq n_0(a)$

1) $P_n(a) \equiv \max_{|t| \leq 1, |i| \leq n} |p_i(t)| \leq c_1 \sqrt{\log n}$

2) $-n \leq i_n' < -n/2$, $n/2 \leq i_n'' < n$ なる番号 i_n', i_n'' があって，

$$q_{i_n'+1}^{(0)} - q_{i_n'}^{(0)} \geq c_2 \log n, \quad q_{i_n''+1}^{(0)} - q_{i_n''}^{(0)} \geq c_2 \log n.$$

ここに $p_i(t)$ は 時刻0で番号 i をもつ粒子の t 時刻後の位置を表わし，$q_i^{(0)}$ は 時刻0での i 番目の粒子の座標を表わす。

§3. evolution operator の構成.

proposition 4 によって，n を十分大きくとって固定すると，時刻 $|t| \leq 1$ の範囲では 我々の考えている無限粒子の力学系の構成は，有限粒子の力学系に帰着させることが可能である。すなわち，$\bar{n}$ を

$$c_2 \log n - 2c_1 \sqrt{\log 2n} \; > r_1 \qquad \text{for } \forall n \geq \bar{n}$$

をみたす自然数とり、$M(c_1, c_2) \ni a$ に対し

$$n_1(a) = \max(n_0(a), \bar{n})$$

$$n_k(a) = 2^{k-1} n_1(a)$$

$$m_k'(a) = i'_{n_k(a)} + 1, \quad m_k''(a) = i''_{n_k(a)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

とおくと，$M(c_1, c_2)$ の定義と，関係

$$c_2 \log n_k(a) - 2c_1 \sqrt{\log n_k(a)} \; > r_1, \quad k \in \mathbb{N}$$

から，各 $k \in \mathbb{N}$ に対し，$|j| > n_k(a)$ なる番号 j をもつ粒子を固定して，$m_k'(a) \leq j_1 \leq m_k''(a)$ なる番号 j_1 をもつ粒子は $-n_k(a) \leq j_2 < m_k'(a)$ 又は $m_k''(a) < j_2 \leq n_k(a)$ なる番号 j_2 をもつ粒子とは，$|t| \leq 1$ では互いに potential の range の外にあるから、互いに影響がない。

さらに，k を $k+1$ に上げて，$|f|\leq n_{k+1}(a)$ なる番号 f をもつ粒子を動かしても，

$$\begin{aligned} &c_2 \log n_k(a) - 2c_1\sqrt{\log n_{k+1}(a)} \\ &= c_2 \log n_k(a) - 2c_1\sqrt{\log 2n_k(a)} > x_1 \end{aligned}$$

であるから，$m_k'(a)\leq j\leq m_k''(a)$ なる番号 j をもった粒子群は，$|t|\leq 1$ では，その外にある粒子達と影響しあわない。

従って，$\forall k\in\mathbb{N}$ と $\forall \ell\geq k$ に対して，$m_k'(a)\leq j\leq m_k''(a)$ なる番号 j をもつ粒子の運動は，$|t|\leq 1$ の範囲では，$|f|>n_\ell(a)$ なる番号 f をもつ粒子達を固定して考えてもよく，このことから，$a\in M(c_1,c_2)$ に対し，$|t|\leq 1$ で $T_t a$ が定まり，$|t_1|\leq 1$，$|t_2|\leq 1$，$|t_1+t_2|\leq 1$ に対し $T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}$ をみたす。

<u>Proposition 5</u>　μ は T_t －不変である。

このためには，μ が，番号 $|i|>n$ をもつ粒子を固定した下での，番号 $|i|\leq n$ をもつ粒子についての条件付分布を考えたとき，密度

$$\tilde{\Xi}^{-1}(\beta,\mu)\exp\Big[-\beta\Big(\sum_{|i|\leq n}\frac{p_i^2}{2}+\sum_{\substack{|i_1|\leq n\\|i_2|\leq n}}U(|q_{i_1}-q_{i_2}|)+\sum_{\substack{|i_1|\leq n\\|j|>n}}U(|q_{i_1}-q_j|)\Big)\Big]$$

をもつことと，この密度が，有限系のハミルトニアンから定まる *Liouville* 測度の *density* を与えることを見れば，T_t の作り方から不変性が出る。

あとは,

$$\widetilde{M} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T_1^n M(c_1, c_2)$$

$$T_t a = T_{t-[t]} \circ T_1^{[t]} a \qquad a \in \widetilde{M}$$

とおくと, $\mu(\widetilde{M}) = 1$ であるから, 次の命題を得る。

Proposition 6 (M, μ, T_t) は力学系である。

§ 4. 力学系 (M, μ, T_t) のエルゴード性.

今までのような一般の potential $U(r)$ についてのエルゴード性の証明は知られていないので, ここでは, 次の2つの典型的なモデルについて, エルゴード性の証明を述べる。

Case 1 (hard rod system) c.f. Ya. G. Sinai [10], O de Pazzis [6].

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

この場合, 各粒子 (rods) は, 衝突するまでは, 初速度を保ちながら一様運動をし, 完全弾性衝突によって, 速度を交換し合うモデルをあらわしている。

この U から作られる極限 Gibbs 分布は, 座標に関しては, 各 i について, $q_{i+1} - q_i - r_0$ が平均 ρ の指数分布を持ち, 速度に関しては, 平均 0, 分散 β^{-1} の正規分布を持つような可算無限直積の形をもつ。

Case 2 (ideal gas) c.f. K.L. Volkovyskii-Ya. G. Sinai [13].

$$U(r)=\begin{cases}\infty & r=0\\ 0 & r>0\end{cases}$$

<この場合，衝突が無いとみなせることに注意せよ。>

以上の２つの場合，衝突によって，同じ速度をもつ粒子に同じ番号が乗りうつると見て，t 時刻後の配置に対しても番号付けを与えると，時刻０で i 番目であった粒子（$q_i^{(0)}, p_i$）の t 時刻後の位置（$q_i(t), p_i$）に関して次の命題が成り立つ。

<u>Proposition</u> 7

$$\lim_{t\to\pm\infty} q_i(t) = \pm\infty \qquad \text{if} \quad p_i>0$$
$$\left(\quad \text{〃} \qquad \mp\infty \qquad\qquad p_i<0 \right)$$

が，μ-a.e. の初期配置について成り立つ。

この proposition によって，次の定理が証明できる。

<u>Theorem 1</u>（[10], [6]） 1次元 hard rod system は K-力学系.

<u>Theorem 2</u>（[13]） ideal gas は K-力学系.

㊟ 実はもっと強く Bernoulli 系（例えば [9]）

定理２は $r_0\longrightarrow 0$ としたときの定理１の系と見ることができるから，ここでは定理１のみ証明する。このためには，§1で述べたように，定義４にあらわれる，T_tに対するMのK－分割 ζ_0を構成すれば十分である。次の定義をしよう。

<u>定義５</u> 時刻 $\bar{t}$ が <u>0-crossing time for $a=\{(q_i,p_i)\}\in M$</u> であるとは，$\bar{t}$ が次の 1) 又は 2) をみたすときをいう。

1) $\exists i$: $q_i(\bar{t})=0$ かつ $\bar{t}$ は２粒子の衝突時刻

ではない。

2) $\exists i_1 \neq \exists i_2$，$\bar{t}$は speed p_{i_1}, p_{i_2} （$p_{i_1} > p_{i_2}$）をもつ2粒子の衝突時刻であり，かつ，$q_{i_1}(\bar{t}-0) < 0 < q_{i_2}(\bar{t}-0)$.

$\bar{t}$が 1)をみたすときは p_i，2)をみたすときは，p_{i_1}, p_{i_2}, $q_{i_1}(\bar{t}-0)$, $q_{i_2}(\bar{t}-0)$ を *0-crossing time* $\bar{t}$ の <u>*characteristic(s)*</u>と呼ぶことにする。このとき，*proposition* 7 により，~~各粒子~~（q_i, p_i）に対応する *0-crossing times* は μ-a.e. で有限個であることがわかる。そこで，Mの分割 ζ_0 を，

$a, a' \in M$ が分割 ζ_0 の同一元に入る

$\Updownarrow$ def.

aに対応する <u>*non-negative*</u> な *0-crossing times* とその *characteristics*

と，a' 〃 〃 〃 〃

が全く一致する。

によって定義しよう。こうすると，ζ_0は可測かつ，明らかに $T_t \zeta_0 \geqslant \zeta_0 \ \mathrm{mod}.0 \ \ t \geqslant 0$ が成り立つ。（ $T_t\zeta_0 \equiv \zeta_t$ の同一元に入ることと，$-t$以後の *0-crossing times* とその *characteristics* が一致することとが同値である。）一方，$\bigvee_t T_t \zeta_0 = \varepsilon \ (\mathrm{mod}.0)$ は“全ての *0-crossing times* と，その *charecteristics* がわかれば，(唯1つ)初期配置が定まる”ことと同じであるから，証明は略する。最後に $\bigcap_t T_t \zeta_0 = \nu \ \ \mathrm{mod}.0$ を示そう。そのために，次のようなMの分割 η_d を補助的に考えよう。

$\alpha > 0$ に対して η_α を

$a, a' \in M$ が分割 η_α の同一元に入る

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
1) $[-\alpha, \alpha]$ の外にある夫々の粒子は，その座標と速度が全く一致
2) $[-\alpha, \alpha]$ 内の夫々の粒子の個数が一致しているだけでなく，その中で，正速度をもつ粒子の個数も一致.

によって定義すると，$\alpha \to \infty$ の時 $\eta_\alpha \searrow \nu$ となることは明らかであろう。従って，次のことさえ証明すればよい。

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$, $\exists t_0 > 0$, $\exists \Gamma_\alpha^{t_0}$ （M の可測集合）

(イ) $\eta_\alpha \big|_{\Gamma_\alpha^{t_0}} \geq T_{-t_0} \zeta_0 \quad \left(\geq \bigcap_t T_t \zeta_0 \right)$

(ロ) $\mu(\Gamma_\alpha^{t_0}) > 1 - \varepsilon$.

実際

$$\Gamma_\alpha^t = \left\{ a = (c, p_c(\cdot)) = \{(q_i, p_i)\} \in M : \begin{array}{l} q_i(\tilde{t}) > 2r_0 \text{ if } p_i < 0 \\ q_i(\tilde{t}) < -2r_0 \text{ if } p_i > 0 \end{array} \text{ for } q_i^{(0)} \in C \cap [-\alpha, \alpha], \ \forall \tilde{t} > t \right\}$$

によって定義すれば，*proposition* 7 によって，$\mu(\Gamma_\alpha^t) \nearrow 1$，$t \searrow -\infty$ for $\forall \alpha > 0$. 従って，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_0 = t_0(\varepsilon, \alpha) > 0$, $\mu(\Gamma_\alpha^{t_0}) > 1 - \varepsilon$. (イ) を示そう。このためには

$$\forall a, a' \in C_{\eta_\alpha}(\cdot) \cap \Gamma_\alpha^{t_0} \Rightarrow T_{t_0} a, T_{t_0} a' \in C_{\zeta_0}(\cdot)$$

を示せば十分である。

$a, a' \in C_{\eta_\alpha}(\cdot) \cap \Gamma_\alpha^{t_0}$ であるから，$[-\alpha, \alpha]$ の外にある a, a' の粒子の位置と速度は全く一致しており、一方，$[-\alpha, \alpha]$ の中にある a, a' の粒子数，正速度の粒子数が一致しているのみならず，それらの位置は，時刻 t_0 においては，原点から少なくとも $2r_0$ 以上離れている。従って，$\forall t \geqq t_0$ に対して，$T_t a$，$T_t a'$ の non-negative な 0-crossing time を与える粒子は，時刻 0 において，a, a' の $[-\alpha, \alpha]$ の外にあるものしかない。ところが，そのような粒子の位置と速度は全く一致しているから $T_{t_0} a$ と $T_{t_0} a'$ は ξ_0 の同一元に入る。 (q.e.d.)

㊟ 以上の formulation は全て 1 次元であったが，多次元でモデルを考えると，極端にむずかしくなって，わずかに，K.L. Volkovyskii–Ya. G. Sinai [13] の ideal gas と，O de Pazzis [7] の 2 次元での正方形の運動についての議論があるだけである。

[文　　献]

[1] Haitov A. : Limiting equivalence of various ensembles for one-dimensional statistical systems, Trudy Moskov Matem. Obshch. 28(1973), 215-260. (in Russian)

[2] Halfina A.M. : The limiting equivalence of the canonical and grand canonical ensembles (low density case), Matem. Sborn. 80-1(1969), 3-51. = Math. USSR Sbornik 9(1969), 1-52.

[3] Minlos R.A. : Gibbs limit distribution, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 1-2(1967), 60-73. = Funct. Anal. its Appl. 1-2 (1967), 141-150.

[4] ———— : Regularity of the Gibbs limit distribution, ibid. 1-3(1967), 40-53. = ibid. 1-3(1967), 206-217.

[5] ———— and Haitov A. : Equivalence in the limit of thermodynamic ensembles in the case of one-dimensional classical systems, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 6-4 (1972), 93-94. = Funct. Anal. its Appl. 6-4(1972), 337-338.

[6] Pazzis O de : Ergodic properties of a semi-infinite hard rod systems, Commun. math. Phys. 22(1971), 121-132.

[7] ———— : Dynamical theory of a bidimensional system with an infinite number of degrees of freedom, ibid. 29(1973), 113-130.

[8] Rohlin V.A. : On the fundamental ideas of measure theory, Matem. Sborn. 25(1949), 107-150. = Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10(1962), 1-54.

[9] Shiga T. and Takahashi Y. : Ergodic properties of the equilibrium processes associated with infinitely many Markovian particles, to appear.

[10] Sinai Ya.G. : Ergodic properties of a gas of one-dimensional hard rods with an infinite number of degrees of freedom, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 6-1(1972), 41-50. = Funct. Anal. its Appl. 6-1(1972), 35-43.

[11] ———— : Construction of the dynamics for one-dimensional systems of statistical mechanics, Teor. i Matem. Fiz. 11-2(1972), 248-258. (in Russian)

[12] 十時東生: flow とエントロピー, Seminar on Prob. vol. 20 (1964), 確率論セミナー.

[13] Volkovyskii K.L. and Sinai Ya.G. : Ergodic properties of an ideal gas with an infinite number of degrees of freedom, Funkt. Analiz. i Ego Prilozhen. 5-3(1971), 19-21. = Funct. Anal. its Appl. 5-3(1971), 185-187.