数理解析研究所講究録
第216巻 1974年 175-187



# コンパクト不変集合の近傍でのflowについて

神大 教養　江川 治朗

## §1. 序

$R^n$ の $\{0\}$ の近傍で定義された自律系微分方程式が

(1)　$x' = Ex + F(x)$　　$F \in C^1$, $\frac{\partial F}{\partial x}(0) = 0$

と展開されているとする。このとき，行列Eの固有値の実部がすべて0でなければ，(1)の定める局所力学系は

(2)　$x' = Ex$

の定める局所力学系と $\{0\}$ の近傍で同じ流れを定める([4])。しかしながら，(1)のEが一般の形をしているとき，特異点の近傍での流れの様子を示す一般論は $n=2$ のときを除いてないように思われる。$n=2$ では Bendixson が上の問題に位相的方法で回答を与えた。この Bendixson の結果の一般化の方向で，$n \geq 3$ もっと一般的に局所コンパクトな位相空

間上の力学系のコンパクト不変集合での近傍での flow の様子を T.Ura, I.Kimura, T.Saito, N.P.Bhatia 等が議論した（[1], [8], [9], [12], [13]）.

この講演では，§3で T.Ura-I.Kimura の結果（[12]）を紹介する。さらに力学系の分類は同型写像によっておこなわれるべきものであるという観点から，§4で彼等の結果の最も簡単である漸近安定な特異点の近傍での flow の分類を考える。最後に，Miller, Sell によって力学系の理論が非自律系微分方程式やボルテラ型積分方程式に応用されたが（[6], [10], [11]），彼等の扱った力学系の相空間は一般に局所コンパクトではない。§5では，上記の T.Ura-I.Kimura の結果を局所コンパクトでない空間上の力学系に対して考察し，一般には完備な距離空間上の力学系には成り立たないことを示す。

## §2. 基本概念

位相空間上の力学系及び，それの拡張である局所力学系の定義は省略して，この講演で必要とする基本概念及び記号を説明する。$\pi$ を位相空間 $X$ 上の局所力学系とする。$\pi$ の定義域を $D^{\pi}$ とかく。$D^{\pi}$ は $X \times R$ の積位相に関する開集

合で $D^\pi = \bigcup_{x\in X}\{x\}\times D^\pi_x$ の形をしている。こゝで $D^\pi_x$ は0を含む開区間である。$\pi$ が力学系であれば $D^\pi = X\times R$ である。$x\in X$ を通る軌道，正の半軌道，負の半軌道をそれぞれ $C_\pi(x)$, $C^+_\pi(x)$, $C^-_\pi(x)$ とかく。$x\in X$ の正(負)の極限集合を $L^+_\pi(x)$, $L^-_\pi(x)$ とかく。任意の $x\in M$ に対して $C_\pi(x)\subset M$ が成り立つとき，$M$ を準不変集合という。$U\subset X$ を開集合又は準不変集合とするとき，$\pi$ の $U$ への制限が定義されて，又局所力学系を定める。それを $\pi|U$ とかく。$M$が準不変集合で，$\pi|M$ が力学系を定めるとき，$M$ を単に不変集合という。$M$ がコンパクトのときは必然的に不変集合である。$M\subset X$ をコンパクト不変集合とする。$M$ の近傍 $U$ が存在して，$K\subset U$ が不変集合ならば $K\subset M$が成り立つとき，$M$ は不変集合から孤立しているという。任意の $M$ の近傍 $U$ に対して，$C^+_\pi(V)\subset U$ を満たす $M$の近傍 $V$が存在するとき，$M$ は(+)安定であるという。(−)安定についても同様である。$A^+(M)=\{x\in X\,;\,L^+_\pi(x)\subset M\}$ $(A^-(M)=\{x\in X\,;\,L^-_\pi(x)\subset M\})$ が $M$の近傍であるとき，$M$を(+)((−))アトラクターであるという。$M$ が(+)((−))安定で(+)((−))アトラクターであるとき，$M$ は(+)((−))漸近安定であるという。

## §3. 局所コンパクト空間上の力学系

§1で述べたごとく，2次元の相と特異点の近傍での flow は Poincaré, Bendixson によって完全に分類された。これの一般化の方向での結果として，つぎの定理が T. Ura - I. Kimura によって証明された（[12]）。

定理 3－1.　　$\pi$ を局所コンパクトな位相空間 X 上の力学系とする。$M \subset X$ を閉不変集合から孤立したコンパクトな不変集合とする。このとき，つぎの (1)～(3) のうちいずれか一つが成り立つ。

(1)　M は (+) 漸近安定である。

(2)　M は (−) 漸近安定である。

(3)　$L_\pi^+(x) \subset M$, $L_\pi^-(y) \subset M$ を満たす $x, y \notin M$ が存在する。

上の定理の証明はむつかしくないが，こゝでは省略する。§5で反例を構成するとき便利なので，つぎの系をあげておく。

系 3－2.　　定理 2－1 と同じ仮定をする。このとき，

任意の $x \in U-M$ に対して $L^+_\pi(x) \cap U = \phi$, $L^-_\pi(x) \cap U = \phi$ であるような $M$ の近傍 $U$ は存在しない。

## §4. 漸近安定な不変集合と同型写像

$\pi$, $\rho$ を位相空間 $X$, $Y$ 上の局所力学系とする。つぎの同型写像の定義は T. Ura による（[14]）。

定義4－1. 位相同型写像 $h: X \to Y$ が任意の $x \in X$ に対して, $h(C_\pi(x)) = C_\rho(h(x))$ が成り立つとき, $h$ を $\pi$ から $\rho$ への NS-同型写像という。

定義4－2. $(h, \varphi)$ がつぎの条件 (1) ～ (3) を満たすとき, $(h, \varphi)$ を $\pi$ から $\rho$ への GH-同型写像という。

(1) $h$ は $\pi$ から $\rho$ への NS-同型写像である。

(2) $\varphi$ は $D^\pi$ から $R$ への写像で $\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$ で定義される写像は $\varphi_x(0) = 0$ を満たす $D^\pi_x$ から $D^\rho_{h(x)}$ への位相同型写像である。

(3) 任意の $(x, t) \in D^\pi$ に対して, $h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$ を満たす。

さらに, $\varphi$ がつぎの条件 (N) を満たすとき $(h, \varphi)$ を N型

同型であるという。

(4.5)　一般の GH-同型写像.

(4.25)　$\varphi$ は $D^{\pi}-S_{\pi}\times R$ で連続　($S_{\pi}$ は特異点の集合)

(4)　$\varphi$ は $D^{\pi}$ で連続

(0)　$\varphi(x,t)\equiv t$　とあらわされる。

T. Ura は reparametrization $\varphi$ の型によって，(3)，(2)，(1) に対応する同型写像を定義したのであるが，議論が複雑になるので省略する。定義4－1と4－2で導入した同型写像については，つぎのことが知られている。すなわち，$h:\pi\to\rho$ が NS-同型写像であるとする。このとき，相空間 X が $T_1$ の分離公理を満たせば $(h,\varphi)$ が (4.5) 型であるような $\varphi$ が存在する ([5])。さらに X が Hausdorff であるならばさきの $(h,\varphi)$ は (4.25) 型である ([14])。一般に (4) 型あるいは (0) 型にはならない。

§1でふれた自律系微分方程式

(1)　$x'=Ex+F(x)$　　$F\in C^1$，$\frac{\partial F}{\partial x}(0)=0$

(2)　$x'=Ex$

を考える。(1)，(2) の定める局所力学系を $\pi$，$\rho$ とする。このとき，Hartman, Grobman の結果 ([4]) はつぎのよう

に述べられる。

定理4－3. $E$の固有値の実部がすべて $0$ でないとする。このとき，$0$の近傍 $V$, $V'$ が存在して，$\pi|V$ と $\rho|V'$ は(0)型同型である。

つぎに定理3－1のもっとも簡単な場合である(1), (2)について考える。その準備として，つぎの命題を述べておく。$\pi$は $R^n$ 上の力学系とする。

命題4－4.（[2]参照） $M$を(+)漸近安定なコンパクト不変集合とする。このとき，つぎのような実数値関数 $V : A(M) \to [0, \infty)$ が存在する。(Lyapunov 関数といわれる。)

(1) $V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in M$

(2) 任意の $x \in A(M) - M$, 任意の $t > 0$ に対して，$V(\pi(x, t)) < V(x)$ が成り立つ。

$V_c = \{ y \in A(M) ; V(y) = c \}$ とする。このとき，つぎの命題が成り立つ。

命題4－5（[2]参照）. $M$を(+)漸近安定なコンパ

クトな不変集合，$V$をそれに対する Lyapunov 関数とする。このとき $\pi|A(M)-M$ は parallelizable であり，$V_c$ ($c>0$) は $\pi|A(M)-M$ の section である。

定理4－6.　$\pi$, $\rho$ を $R^n$ 上の力学系とし，$x_0$, $y_0$ をそれぞれ $\pi$, $\rho$ に関しての(+)漸近安定な特異点とする。このとき，つぎの(1)～(3)は同値である。

(1)　$\pi|A(x_0)$ と $\rho|A(y_0)$ は NS-同型である。

(2)　$\pi|A(x_0)$ と $\rho|A(y_0)$ は O型同型である。

(3)　$\pi|A(x_0)-\{x_0\}$ と $\rho|A(y_0)-\{y_0\}$ は同型である。

(4)　$\pi$, $\rho$ に関する Lyapunov 関数を $V^\pi$, $V^\rho$ とする。このとき，$V_c^\pi$ と $V_c^\rho$ ($c>0$) は位相同型である。

証明.　(1) ⇒ (2) ⇒ (3) はあきらかである。parallelizable な力学系の同型問題は section の同型問題に帰着されるから([15])，(3) ⇔ (4) もあきらかである．(3) ⇒ (1) の証明もむつかしくないので省略する。

上の定理により，漸近安定な特異点の分類は，$V_c^\pi$ の位相同型性に帰着される。一般に $A(x_0)$, $A(y_0)$ は $R^n$ と位相同型であることが知られている([16])。したがって，$V_c^\pi\times R$ は $R^n-\{0\}$ に位相同型である。一般に $V_c^\pi$ は多様体になら

ないが，もし多様体であるとすると，$V_c^\pi$ は $n-1$ 次元のホモトピー球面である。したがって，この問題はホモトピー球面の分類問題に帰着される。

定理4－6の力学系は平行流について簡単なものである。一般に定理3－1の(3)の場合，何に注目してどのように分類するかまったくわからない。

## §5. 完備な距離空間上の力学系

§2で述べた定理3－1は相空間が局所コンパクトであることが重要であって，完備な距離空間では一般に成り立たない。その例を構成する。

$$C = \{ f : R \to R \text{ continuous} \}$$

として $C$ 上の Bebutov system $\pi$ を考える。$C$ はコンパクト開位相により完備で可分な距離空間であり，$\pi$ は $C \times R \to C$ への写像で

$$\pi(f, \tau)(t) = f^\tau(t) = f(\tau + t) \qquad (f, \tau) \in C \times R$$

で定義された力学系である（［7］）。$X_0$ を $C$ のつぎのような部分集合とする。

$$X_0 = \{g_u\}_{u \geq 0}$$

$$g_0(t) \equiv 0$$

$$g_u(t) = \begin{cases} \frac{1}{u}\left|t+\frac{1}{u}\right| + u & t \leq -\frac{1}{u} \\ u & |t| < \frac{1}{u} \\ \frac{1}{u}\left|t-\frac{1}{u}\right| + u & t \geq \frac{1}{u}. \end{cases} \quad (u>0)$$

$X_0$ から生成される $\pi$ に関しての不変集合を $X$ とする。すなわち

$$X = \{g_u^{\tau}\}_{u \geq 0,\ \tau \in R}$$

命題 5－1.　$X$ は $C$ の閉部分集合である。したがって，$X$ は完備な距離空間である。

$M = \{g_0\}$ とおくと任意の $\tau \in R$ に対して，$\pi(g_0, \tau) = g_0$ であるから，$M$ は $\pi$ の特異点である。したがって，$M$ はコンパクトな不変集合である。

命題 5－2.　任意の $f \in X - M$ に対して，$L^+(f) = L^-(f) = \phi$ .

命題 5－1，5－2 より相空間が完備な距離空間上では，

系3－2は一般に成り立たない。したがって，定理3－1も成り立たない。

REFERENCES

[1] Bhatia,N.P., Asymptotic Recurrence and Dynamical Flow near a Compact Minimal Set, Seminar on D.E. and D.S. II, Lecture Notes in Math., 144, 22-29, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1970.

[2] Bhatia,N.P. and Szegö,G.P., Stability Theory of Dynamical Systems, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1970.

[3] Egawa, J., A Remark on the Flow near a Compact Invariant Set, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 245-251.

[4] Hartman,P., Ordinary Differential Equations, Wiley, 1964.

[5] Kimura, I., Isomorphisms of Local Dynamical Systems and Separation Axiom for Phase Spaces, Funkcial. Ekvac., 13 (1970), 23-34.

[6] Miller,R.K. and Sell,G.R., Volterra Integral Equations and Topological Dynamics, Mem. Amer. Math. Soc., 102, 1970.

[7] Nemytskii, V.V. and Stepanov,V.V., Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1960.

[8] Saito,T., Isolated minimal sets, Funkcial. Ekvac., 11 (1968), 155-167.

[9] Saito,T., On a Compact Invariant Set Isolated from Minimal Sets, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 193-204.

[10] Sell,G.R., Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics I, The Basic Theory, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 241-262.

[11] Sell,G.R., Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics, Limiting Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 127 (1967), 263-283.

[12] Ura,T.and Kimura,I., Sur le Courant Extérieur à une Région Invariante Théorème de Bendixson, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 8 (1960), 23-39.

[13] Ura,T., On the Flow outside a Closed Invariant Set, Stability Relative Stability and Saddle Sets, Contr. Diff. Eqs. III (1964), 249-294.

[14] Ura,T., Isomorphisms and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcial. Ekvac., 12 (1969), 99-122.

[15] Ura,T. and Egawa,J., Isomorphism and Parallelizability in Dynamical System Theory, Math. Systems Theory, 7 (1973) (in press).

[16] Wilson,F.W., The Structure of the Level Surfaces of a

Lyapunov Functions, J. Diff. Eqs., 3 (1967), 323-329.