

立体 pentomino のプログラム

電電公社武蔵野電気通信研究所

竹内 郁雄

1. はじめに

"GPCC 發足に類するを試みんと思ひ立ったのは、昨今の
ことどはなけしど、實際その期熟するは忘れさせない、立体
pentomino 六百六拾時間たる見積りの世に問はれたる^{*}翌日の本
年一月の拾一日ぞ、その日以來本来の業務はあり、殊には不
肖私も亦輕症の風邪に犯されたれど(中略)、難題が起ると
態とえを打棄ておき、廁上又禱上にて腦漿を絞らしことも嘗
どあったが(中略)、刻々拾一時間強にて全數解を求めたる
ものなり^{**)}" というわけぞ、当初二桁時間であらばという期待
を越えて、一桁時間に肉迫する結果が出たのでここに報告し
よう。

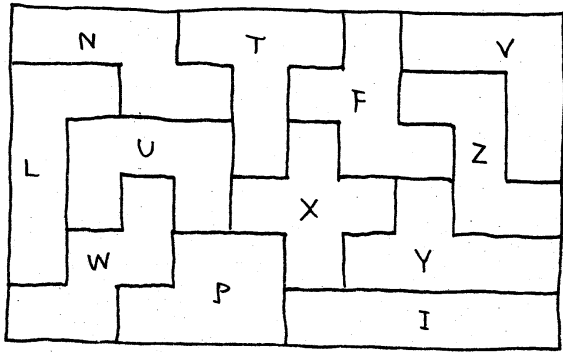
*) 航宇研の磯部氏「立体パントミノの解法について」第15回

プログラムシンポジウム 1974. 1

***) 尊敬する松浦政泰氏の「世界遊戯法大全」による。

2. 立体 pentomino について

単位立体を5個平面上に並べると次のような12種類のピースが出来る。(紙面節約のために6×10のお盆に最密充填



した形を示す.)

さて、これを3×4×5の直方体スペースに充填しようというのが、ここぞいう(狭義の)立体pentominoで

ある。これが解を持つことは古くから知られていたようであるが、その解の総数が知られたのは比較的最近である。我が国の天洋で売り出したプラスチック製の製品には、FACOMという字が箱にしたためてあるが、その横に"460通りの組合せができる3次元の立体パズル!!"と丁寧に二つもビックリマークがついている。しかし、実は解の総数は1967年にC.J. Bouwkampという人が求めた3940通りというのが正しい。使った計算機はIBM-1620でFORTRANを言語としたらしいが、そのときに要した時間は"several hundreds hours"だったであろう。ただし、若干のコメントがあって、CDC-3600上のアセンブラ・プログラムの集積を利用すれば3時間位で全数解が求まると言っている。しかし、それがその後実

現されたという話は伝わっていないようである。磯部氏はかなり一般的な構想のもと（4次元直方体なども含む）プログラムを作られたようであるが、HITAC 5020Fで660時間かかるという見積りを出されたのは、IBM-1620との単純な比較だけでもやや遅過ぎるのではないかと思われる。CDC-3600程度の機械は現在ミニコンとしてかなり出まわっているので、その時間が本当かどうかの意味も含めて、時間短縮を試みることにしよう。

3. プログラムを組む上での基本方針と構想

使用する計算機は現在かなり世に出ているpdp 11/20である。この機械の基本的な特徴を必要なだけ述べてみると

- a. レジスタが8個あり、1つはプログラム・カウンタで1つはサブルーチン等のためのスタック用レジスタである。（前者をPC, 後者をSPと呼ぶ）あとのレジスタは便宜上R0, R1, ..., R5と名付けておく。このら8個のレジスタに演算上の機能の差はないし、すべてインデックス・レジスタとして使える。
- b. 演算速度. レジスタ・レジスタで加算が $2.3\mu\text{sec}$, メモリを1回アクセスすると $1.5\mu\text{sec} \sim 3.9\mu\text{sec}$ 余分にかかる。いわゆる中速度の計算機である。

- c. バイトでアドレスがついている。1語は16bit である。
- d. シフト関係の命令が弱いのでビット処理を得意としない。

また、我々の使用したシステムに関してさらにつけ加える

- e. テキスト・オペレーティング・システムで28K語のメモリを持ち、他の周辺機器(MT, DISK...)もかなり完備している。
- f. アセンブラはマクロの入力子が何重にも出来る機能を持つなどかなり高度なものが用意されている。

さて、立体pentomino のプログラム作成の基本方針としては

- (1) シフトが弱いので、bit 単位でマス目情報を保持せず、word 単位で保持する。つまり通常の array で直方体を表現する。
- (2) 番号の若いマス目から、順にピースを埋めていく。磯部氏のプログラムはピースをバラバラに入れていくのだが、こちらの方法のほうが(単純なことだが)10倍位速くなる。ピースの順番は、大体普通。
- (3) コーディング技術で時間を稼ぐ。即ち複雑なヒューリ

ステップを入れない。だから原理的にシラミつぶしプログラムとする。

(4) ステップ数, メモリ使用量については湯水の如きの方針を貫く。

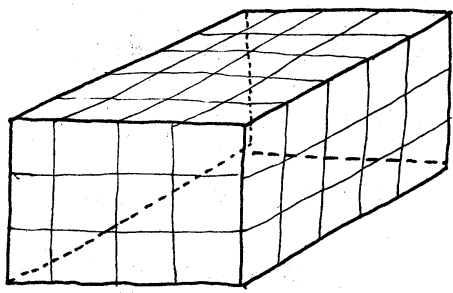
(5) 対称解は最初から除くようにする。(プログラムの信頼性は少し下がるが気にしない。)

(6) (4)に関連するが, ループ管理のための overheadがもたないないので, ループを廃止しベタ書とする。またプログラム・フェッチとデータ・フェッチを一体化して時間を節約する。すなわちデータをプログラム中に本質的に埋め込んでしまう。(これによって2~4倍のスピードアップがはかれる。)

4. プログラムの基本骨格

3×4×5の直方体は次の様に表現される。(あとでアセンブラに密着した説明をするので, 予備説明としてリスティングをのせておく) arrayの各語はマス目か, 境界を示すためのためのダミーであり, 前者はそこが空いているときも, なにかピースがつまっているときには, そのピースの名のコード(ASCII)が入れられている。後者は常に1がはいっている。次のリストはarrayの初期状態である。

| | | | |
|----|--------|-------------|------------------------|
| 12 | .MACRO | TBGNR N | 引数Nなるマクロ TBGNRの定義 |
| 13 | | .IF EQ,N | N=0なら以下を.. |
| 14 | | 1,0,0,0,0 | 条件がF (i.e. N≠0)なら以下を.. |
| 15 | | 1,0,0,0,0 | |
| 16 | | 1,0,0,0,0 | |
| 17 | | .IFF | |
| 18 | | 1,1,1,1,1 | 条件がTでFでも以下を.. |
| 19 | | 1,1,1,1,1 | |
| 20 | | 1,1,1,1,1 | |
| 21 | | .IFTF | 条件がTでFでも以下を.. |
| 22 | | 1,1,1,1,1 | |
| 23 | | .ENDC | 条件文終了 |
| 24 | .ENDM | | マクロ定義終了 |
| 25 | 00002 | TBGNR 1 | array (代表マスをTBと呼ぶ) |
| 26 | 00052 | TB: TBGNR 0 | |
| 27 | 00122 | TBGNR 0 | |
| 28 | 00172 | TBGNR 0 | |
| 29 | 00242 | TBGNR 0 | |
| 30 | 00312 | TBGNR 0 | |
| 31 | 00362 | TBGNR 1 | |



マス目の番号はTBから数えて何番地(8進で表示, 以後断りなき数値は8進数)であるかと表わされる。左図で1番奥

の3x4平面は下の(a)のように番号づけられてあり, その

| | | | |
|----|----|----|----|
| 2 | 4 | 6 | 10 |
| 14 | 16 | 20 | 22 |
| 26 | 30 | 32 | 34 |

(a)

| | | | |
|----|-----|-----|-----|
| 52 | 54 | 56 | 60 |
| 64 | 66 | 70 | 72 |
| 76 | 100 | 102 | 104 |

(b)

手前の断面は左の(b)の如くになっている。マスが一つ手前だと50たされた番号になる

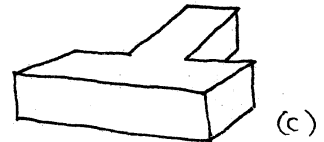
ることに注意しておこう。

ピースはあのおの何種類かの向きを持つ。これを野下氏の用語に従ってスタイルと呼ぶことにしよう。12枚のピースのスタイルごとの直方体に入るようなものは全部で160種類あ

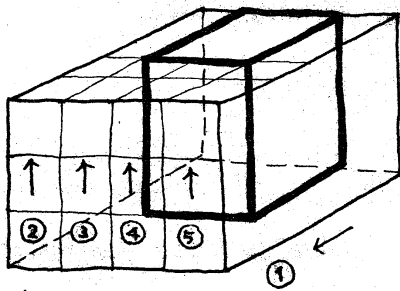
る。スタイルは、一番若い番号に入るべき単位立方体から他の4つの立方体への番号変位を書き並べることにより表現出来る。たとえば、Tというピースの(c)なるスタイルは

50, 120, 116, 122

というふうに表現出来る。番号変位の順番は都合のよいように選んでよい。

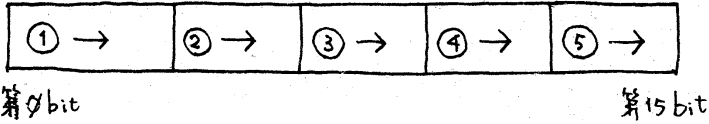


い。さて、あるスタイルを持って来たとき、それが直方体の任意の番号のマス目を基底として入り得るわけではない。実際、上例の(c)なるスタイルは直方体の左端、右端、前から1番目と2番目の3x4の断面のマス目を基底として入ることが出来ない。(要するに案外入りにくい) これを各スタイルについて最初に調べておく方が得策なので、各スタイルについて valid space (VSP) なるデータを用意しておく。上の例では



左の太枠のような部分直方体が表現したいものである。処理を速くするために、これを1語で表現する。直方体は12本のI (長さ5の棒) からなると考えられる。この棒1本1本に1bit対応させる。またこれに直交する3x4平面から枚数があるが、このうち一番奥の(番号の若い)平面を除いたものに各々1bit対応させる。対応のさせ方は上図と次頁の図をにらんどいただけ

しばしば解いただけよう。



ピッタリ 16 bit. しかも 8進数表示と図示表示とのマッチが非常にいい。さて bit 情報の意味は


{ 0: その棒または平面に部分直方体が交わる。
 { 1: " " 交わらない。






結局、上の例は、VSP が 37007 となる。（一番奥の平面はどんなスタイルでも最低 2ヶ所入りうるのど、対応する bit は常に 0 となる。幸い 第-1 bit は常に 0 と考えてよい。）

あるマス目が考えているスタイルの基底となりうるかどうかのチェックをするために、直方体の各マスに次のようなデータを対応させておく。つまり上の bit マップと同じマップを使い、そのマス目に関係した棒と平面のところにだけ 1 をたてるのである。（一番奥の平面は平面用の bit が並てらなないが支障はない。）たとえば番号 54 のマス目に対応しては、

100100 というデータが対応させられる。このデータはプログラムの一番最初で生成され記憶される。チェックはこのデータと VSP の AND をとって、all 0 なら OK ぞ、キ 0 であれば基底になり得ないという簡単なものである。

さて、基本チェックがOKだったとすると、次は番号変位に従ってマス目が空いている(=φ)か、否か(≠φ)かを調べればよい。しかるに、あるピースのスタイルを調べているとき、ある番号変位のマス目が塞がっていたら、残りいくつかのスタイルのチェックを自動的にサボってもよいことが往々にしてある。たとえば、ピースTで

 5φ, 12φ, 46, 44

というスタイルを調べているとき、もし5φなる番号変位のこのマス目が塞がっていたら、, , , ,  などのスタイルは調べるまでもなくだめだということがわかる。これを便宜上、文脈チェックと呼ぶことにしよう。(注意、基本チェックも文脈チェックも枝刈りをしているわけではないことに留意された。) さらに5φ, 12φについてはOKで、46で駄目とわかれば、次に新たに5φ, 12φについて調べる必要もないことに注意しよう。すなわち、あるスタイルで途中で失敗すれば、次のスタイルの途中から調べれば十分なこともある。このような文脈チェックを可能な限りとり入れた速度の向上が期待が出来る。

ここで1つのスタイルに対するチェックを書き下してみることにしてしよう。R1には当座のマス目のビットパターンがはい

っており、 $R0$ には当座調べているマス目の番地 ($TB + \text{番号}$)
 がはいており、 $R5$ にはピースを実際に埋め込むサブルーチ
 ンの番地がはいている。(後述の番地をレジスタに持つてい
 ると命令語が短縮できる。) ; はコメントの意

; スタイル・チェック入口

- ① BIT $R1$, the VSP ; 基本チェック. BIT は二つのオ
 ペランドの AND をとって条件コードを立て
 るだけの命令.
- ② BNE 上が失敗したときに飛びべきスタイル・チェック
 ; BNE \equiv Branch if Not Equal (to zero)
- ③ TST 番号変位₁ ($R0$) ; TST \equiv TeST. オペランドに関
 する条件コードを立てるだけの命令.
 オペランド X (レジスタ) の意味は,
 レジスタの内容 $+ X$ が実効番地であ
 る.
- ④ BNE このが失敗したときの飛び先.
- ⑤ TST 番号変位₂ ($R0$)
- ⑥ BNE このが失敗したときの飛び先
- ⑦ TST 番号変位₃ ($R0$)
- ⑧ BNE このが失敗したときの飛び先
- ⑨ TST 番号変位₄ ($R0$)

- ⑩ BNE このが失敗したときの飛び先
- ⑪ JSR PC, (R5) ; このは、全部の4エックに10スした
 ときに実行される。JSR ≡ Jump SubRoutine.
 pdp 11 ではサブルーチンジャンプの戻り先が
 自動的にスタックされる。つまり、次の代替
 スタイル・4エックの番地が自動的に保存さ
 れる。

各スタイルにつき以上11ステップ(10進), 16語(10進)のプ
 ログラム・セグメントが対応する。これを全部手で書くのは
 大変だから、マクロを使う。芝程の下のスタイルはマクロで

STYLE VSP2, 1, 5φ, 12φ, 46, 44, 7φ, 1φφ, 13, 13.

マクロ名 37φφ7
 についた
 名前.

番号変位

文脈4エック情報

基本4エック飛び先情報

と書かれる。基本4エック飛び先情報は、基本4エックに失
 敗したときに、次のスタイル・4エックをいくつか省略するか
 に関するものである。⁽⁵¹³¹⁾ 同じVSPのスタイルがn個並べばこ
 のはnになる。文脈4エック情報は4つの番号変位に対応し
 て4つある。末桁はスタイル・4エックのどの部分に飛びか
 を表わし、それを除いた残りの桁は基本4エック情報に同じ
 意味。たとえば上の例では、番号変位5φで失敗すれば、次に
 続くスタイル・4エック6つを省略して7つ目に、12φで失

敗すれば8つ目に, 46で失敗すれば1つ目 (i.e. 次)のスタイル・チェックの3番目の番号変位のチェックに依べという意味である。(実はこのあとにもっとたくさん省略できるチェックがあるかも知れぬが, 条件分岐命令は $\pm 128_{10}$ 語のスキップしか出来ないという制約があったりして高々7φ, 1φφで押さえられる.)

このように出来る限り省略を行なうのであるが, 実際これを手作業でやるとためかなり大変であった。たとえば, 省略を伸ばすために次のようなことをする。

| | | |
|---|------------------|---|
| i | VSP _i | 変位 _{i1} , 変位 _{i2} , 変位 _{i3} , 変位 _{i4} |
| | | |
| j | VSP _j | 変位 _{j1} , ... |
| | | |
| k | VSP _k | 変位 _{k1} , ... |
| | | |
| l | VSP _l | 変位 _{l1} , ... |
| | | |
| m | VSP _m | 変位 _{m1} , |

というようにスタイル・チェックが並んでいて, 変位_{i1} = 変位_{j1} = 変位_{k1} であり, $VSP_i \subseteq VSP_m$, $VSP_i \cap VSP_l = \emptyset$ (空) なら変位_{i1} で失敗したとき, j, k なるスタイル・チェックを省略するのはもちろん, $VSP_i \cap VSP_l = \emptyset$ (空) により l も省略し (変位_{i1} を調べるためには VSP_i のチェックにパスしているはず), さらに VSP_m の基本チェックも省略するのである。ただし, この省略が連鎖するととんでもないことになる。だから推移条

件に常に気を配ったかなり疲れる作業となる。

さて一つのピースのスタイル・チェックはまとめて進べられるが、その先頭に次のような小さなプログラムがつく。

piece 名 : JMP 次のピース ; 次のピースがなければ
label backtrack用 routine ^.

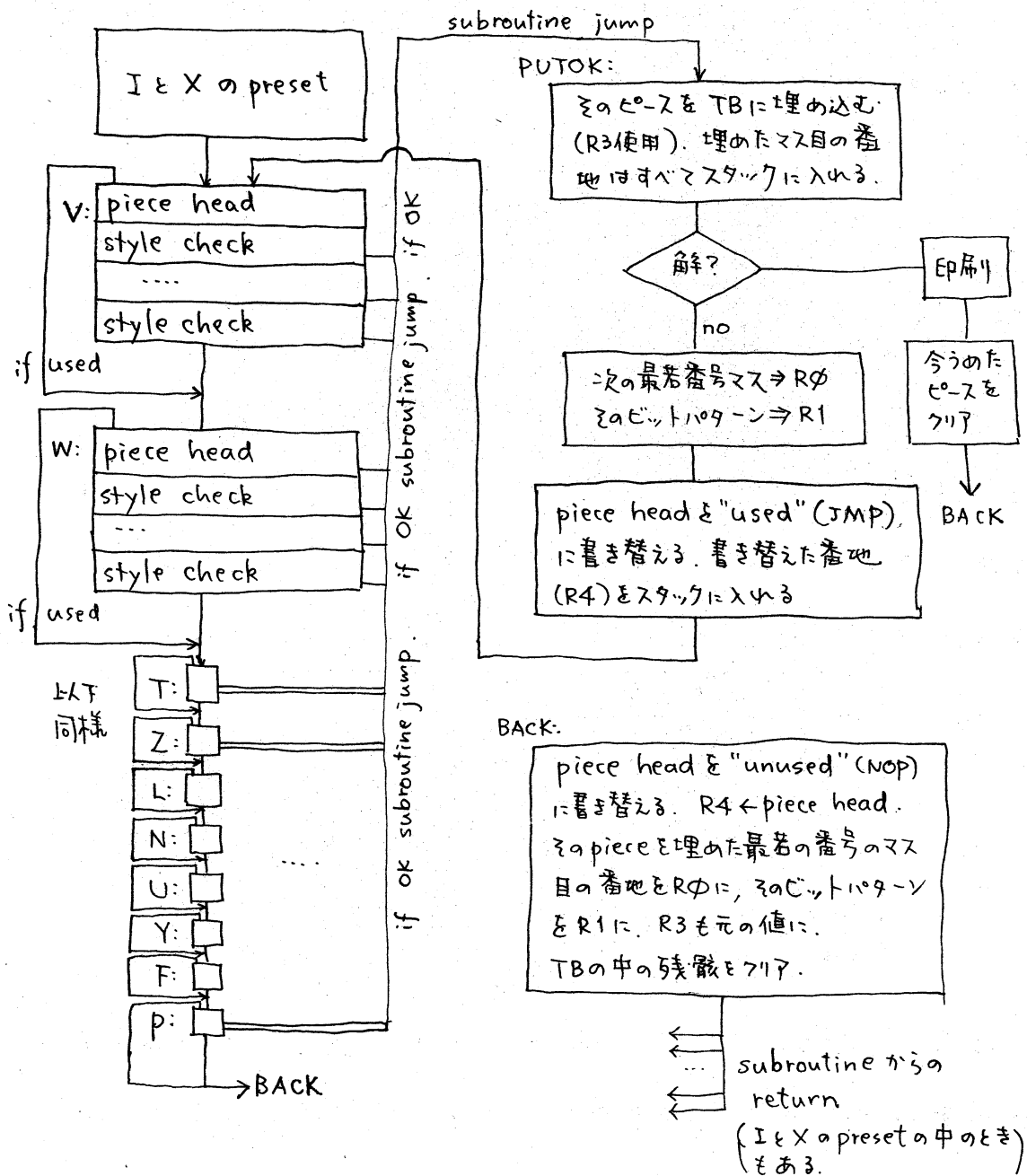
MOV piece名のASCIIコード, R3
; スタイル・チェックをする
向 R3にはピースの名を保持
させておく。

MOV piece名[label], R4
; このプログラムの一番最初
の命令を書き換えるための
番地をR4に保持しておく。

最初のJMP命令はそのピースがあとに使われたかどうかで書き換えられている。すでにそのピースを使ったのであればもうそのピースを調べる必要はないから、ここは上の通りのJMP命令である。もしまだ使っていないのであれば、以下のステップとスタイル・チェックの列を実行しなければならぬから、これは等価的にNo Operationの命令にかえられる。

(実際には BR +4, BR ≡ Branch, + ≡ location counter, 上のJMPは2語命令であるから、1語スキップせよという命令)

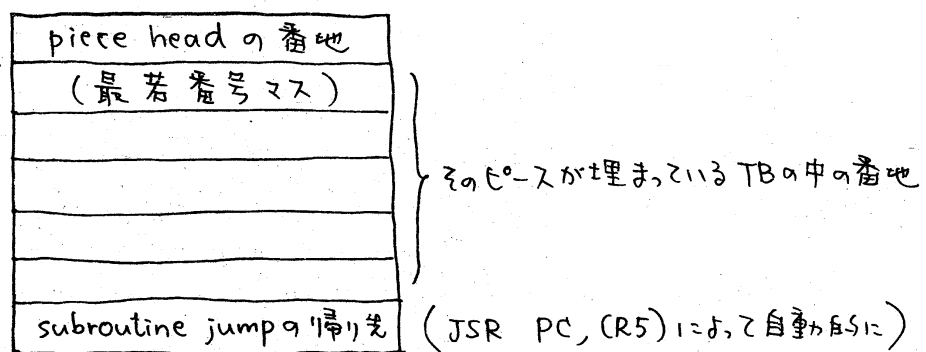
さて以上見たようにここで、いわゆるスタイル表現用情報、used piece 情報、next style 情報などは完全にプログラム中に埋め込まれたことになる。プログラムの全構成を模式的に示すと（ただし対称解に関する部分は省く）



この図からわかるようにプログラムは大きな再帰的プログラムとなっている。(IとXのpresetの部分ははっきりわからなかったが、これとほぼ同じで、BACK routineは他のピースと共用) pdp 11の自動スタックの機能、あるいはレジスタをインデックスとして使ったときの自動インデックス増減機能は、このプログラムの性能に大きく寄与している。たとえばピースをクリアする部分は

```
CLR @(SP)+
CLR @(SP)+
CLR @(SP)+
CLR @(SP)+
CLR @(SP)+
```

と本当に5ステップ(5語)ですんでしまう。なおスタックは一本で、1つのピースがはいると次のようなエレメントがスタックの上にはのせられることになる。このスタックへのアクセスはSPレジスタを使う。



また、PUTOK routineでTBのマスと埋めるときに番号変位の情報もsubroutine jumpの帰先からもとの4エックプログラム

ラムをアクセスして知る。これが全部で 17_{10} ステップ(21_{10} 語)かかるのはいたしかたない。ちなみに PUTOK routine は全部で、 28_{10} ステップの中に次の最若番号マスを捜す2ステップのルーチンがある。BACK routineは 11_{10} ステップである。

次にスタイル・チェックのマクロと piece head のマクロをリスト通りに示しておく。

```

.MACRO STYLE VSP, VSPBR, L1, L2, L3, L4, L1BR, L2BR, L3BR, L4BR
    BIT R1, #VSP
    BNE VSPBR*40-4+
    BRCNT3=0
.MACRO CHECK LN, LNBR
    TST LN(R0)
    BRCNT1=LNBR/10
    BRCNT2=40*BRCNT1-12-BRCNT3+
    BRCNT1=-BRCNT1*10+LNBR
    BNE BRCNT2+<BRCNT1*6>
    BRCNT3=BRCNT3+6
.ENDM
    CHECK L1, L1BR
    CHECK L2, L2BR
    CHECK L3, L3BR
    CHECK L4, L4BR
    JSR PC, (R5)
.ENDM
.MACRO PIECE IDENT, NEXTP
IDENT: JMP NEXTP
    MOV #IDENT, R3
    MOV #IDENT, R4
.ENDM

```

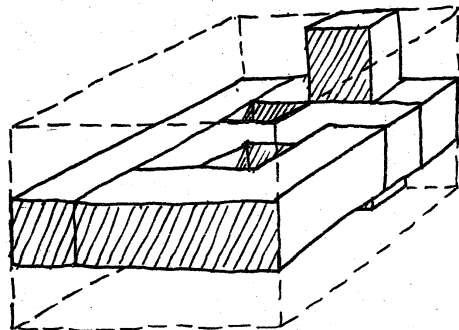
=は講ゆる代入擬似命令で、アセンブル時に実行される。

STYLE の定義ではマクロの静的な入れ子が使われている。次にピースLについてのチェック・プログラムを示す。このように書いてみるとデータとプログラムが一体化している様子がよくわかる。

| | | PIECE | L, N |
|-----|------|-------|---|
| 402 | 4024 | PIECE | L, N |
| 403 | 4040 | STYLE | PPE, 2, 2, 4, 6, 50, 50, 40, 40, 14 |
| 404 | 4100 | STYLE | PPE, 1, 2, 4, 6, 56, 40, 30, 30, 14 |
| 405 | 4140 | STYLE | PPI, 2, 2, 4, 6, 20, 30, 20, 20, 14 |
| 406 | 4200 | STYLE | PPI, 1, 2, 4, 6, 12, 20, 10, 10, 10 |
| 407 | 4240 | STYLE | PPG, 1, 2, 52, 122, 172, 10, 10, 10, 10 |
| 408 | 4300 | STYLE | PPF, 1, 50, 120, 170, 166, 60, 60, 60, 14 |
| 409 | 4340 | STYLE | PPG, 2, 50, 120, 170, 172, 50, 50, 50, 14 |
| 410 | 4400 | STYLE | PPG, 1, 50, 120, 170, 2, 40, 40, 40, 14 |
| 411 | 4440 | STYLE | PPH, 2, 50, 120, 170, 202, 30, 30, 30, 14 |
| 412 | 4500 | STYLE | PPH, 1, 50, 120, 170, 12, 20, 20, 20, 14 |
| 413 | 4540 | STYLE | PPR, 1, 50, 120, 170, 156, 10, 10, 10, 10 |
| 414 | 4600 | STYLE | PPH, 1, 12, 62, 132, 202, 30, 12, 12, 12 |
| 415 | 4640 | STYLE | PPI, 1, 12, 14, 16, 20, 20, 12, 12, 12 |
| 416 | 4700 | STYLE | PPJ, 1, 12, 10, 6, 4, 10, 10, 10, 10 |
| 417 | 4740 | STYLE | PPD, 1, 50, 46, 44, 42, 20, 20, 20, 20 |
| 418 | 5000 | STYLE | PPE, 1, 50, 52, 54, 56, 10, 10, 10, 10 |

5. 対称解を如何に省くか。

実はこの問題が一番大変であり、最後まで論理的虫（プログラム以前の虫）のときなかつたところである。4で見たようにプログラムの基本的な骨格はかなりスッキリしているが対称解の追放は、かなり無駄な贅肉を呼び込んだようである。IとXに加えてV, さらに必要な場合はW, さらに必要な場合はT（総計5枚）の位置に制限を加えないといけないというのは、いかに立体であるとはいえ大変である。（思うに12個のピースが平面的であることがその最大の原因である。）



左のようにI, X, V, Wを決めても上下の対称解が有り得る（実際にはない）

対称解を追放する方法としては、まずI, X以外のV,

Wのプリセット(この場合にV, Wのピース・チェックはやらない)し, それから残った最初のピース(WあるいはT)のVSPを狭くしてやる方法をとる. ここでは詳しく述べないが基本骨格を変形しないようにするため, 全体としてかなり"とってつけた"ようなプログラム・セグメントになっている.

6. 結果

まずプログラムのサイズについて述べる. アセンブラのステップ数は formatting のための空ステップやマクロを含むので, 実際の語数を記す. 以下の数値は10進.

| | | |
|----------------------|-----------|------------|
| 種々の初期的疑似命令 | 50 steps | 0 words |
| 初期化テーブル | 81 steps | 430 words |
| EとXのプリセット | 174 steps | 1793 words |
| (内マクロ定義 111 steps) | | |
| 残りのピースのチェック | 175 steps | 2564 words |
| PUTOK, BACK, COUNT 等 | 42 steps | 59 words |
| 対称解追放関係 | 169 steps | 1500 words |
| 印刷 | 53 steps | 237 words |

と全体としてかなり大きいプログラムであるがステップ数は小さい.

所要時間は印刷とディスクに出して11時間17分30秒ぐらい。ディスクI/Oの時間は約3~4分と思われ、これをラインプリンタに打たせると約30分位かかるようである。解はほぼ10秒に1個の割合で出てくるようであり、10分位の間隔でみるとほとんど一樣な速度と言える。

虫取りの都合で文脈チェックの情報を全部ゆにした(すなわち、失敗したら次のスタイルの最初から調べる)、時間は約1.4~1.5倍かかったので、これ自身は苦勞の割には効果があがらなかつたらしい。ただ、基本チェックの命令が

```
BIT R1, the VSP
```

のとき

```
BIT BITTB-TB(R0), the VSP
```

のとき(毎回マスタ番地をたよりにビットパターンをインデックス修飾して持ち出す)とで、1時間時間の差が出たのは驚いた。両者の時間差は2.7 μ secだから、このチェックが10億回以上実行されていることがわかる。

結局、端から詰めていくことで約10倍、基本チェックで約2倍、文脈チェックで1.5倍、プログラムのベタ書きで約2倍速度が向上したと私は予想している。ちなみに、実習生の人(プログラム未経験)に作ってもらったプログラムは基本的に磯部氏の方法に近いのであるが一つの解が出るまで4時

間かかった。

7. 展望

当初の予想はなんとか2桁時間達成が目標であったが、意外に記録が伸びた。多分5時間位まではいくと予想されるが、そのためには相当強力な heuristics が要求されるだろう。ここで述べたプログラムはシラミつぶしであるが非常に高速な Tree Traverse を行なっているので、今後の heuristic program との比較基準とすることが出来ると思う。

ビット処理による高速化のねらいは、アーキテクチャに多大に依存するが、なかなか思う通りの計算機はないものである。

謝辞

虫トりに多大な助言をいただいた池野信一室長、奥乃博氏に多大な感謝をします。

解の一部分 (keyboard上に出たもの)

注: 印刷の7007"ラム8少(乱暴)に作, たので, 計算機内でTBの
イメージとこの印刷の間には, 何きの相違がある.

| | | | | | | | |
|------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
| IIIII LLLL | TTTTU | IIIII LLLL | TTTTL | IIIII LLLL | PPPLY | IIIII LLLL | LPPLY |
| VXFZ2 | WFFLN | WTFFU | WXUUN | WFZ2N | WPPTY | WXUUN | WFZ2N |
| XXXXN | YYVYN | WTVUU | XXXXN | FFFZY | WTPPY | XXXXN | FFFZY |
| WXZ2N | MMPPP | VMWPP | WXUUN | MMFZ2 | VMWPT | WXUUN | MMFZ2 |

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| IIIII | EZZFN | LLLLY | IIIII | UUNND | NNNZY | IIIII | YYVYP |
| WXTPN | VZTPN | WUTUY | WXPPP | WUFTL | WZZZY | WXTTT | YNNNP |
| XXXXP | ZZTPY | WUOUY | XXXXP | UFTL | VZFYV | XXXXT | NNZ22 |
| MXFFN | WATFF | VMWFF | MXFTL | WFTL | VMWPT | WXUTU | MMUOU |

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| IIIII | PPPYM | TTTTM | IIIII | OTUYL | UUOPP | IIIII | TTVYL |
| VXZ2M | VPPYV | WTFFF | VXZ2M | VTZVL | VZZPP | MXVFU | MTVYU |
| XXXXM | NNNYV | VTNNE | XXXXM | TTVYL | VNNVP | XXXXF | MTVYU |
| UXU2Z | UUUYL | WLLLL | FXMML | FFFYV | VFNNN | ZXFFU | Z2ZYU |

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| IIIII | YYVYL | NLLLL | IIIII | TTTZZ | NYVYV | IIIII | TTTZZ |
| MXVFU | MYVTV | NNVWV | MXVFU | MTVZU | NNVVP | MXUOU | MTUZU |
| XXXXF | MTTUU | MMPPP | XXXXF | MTZ2U | MMVPP | XXXXP | MTZ2N |
| ZXFFU | Z2ZTU | MMZPP | LXFFU | LLLLU | MMVPP | LXPPP | LLLLN |

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| IIIII | ZYVFF | NYVYV | IIIII | Z2TTF | FVVON | IIIII | YYVYT |
| MXVTF | MZVFP | NNVUU | MXUOU | MZUTU | FFFVN | MXFZ2 | MFFFT |
| XXXXT | MZ2PF | MMWUF | XXXXP | MZ2TN | MFYVN | XXXXZ | MPPPT |
| LXTTT | LLLLF | MMWUU | LXPPP | LLLLN | MYVYV | LXZZV | LLLLV |