数理解析研究所講究録
第219巻 1974年 19-27

Property Pを持つknotのある特別なclassについて

神戸大　中川 洋子

§1. knotに張られるsingular diskの一意性

"Schlingknoten" [8] でSeifertはdoubled knot [12] に対してsingular diskの一意性を証明した。

doubled knotだけでなく，一般にある条件を満たすknotに対してspanning singular diskの一意性が同様に証明される。[5]

そのためにまず以下の様ないくつかの定義が必要である。

- S^3の<u>singular disk</u>とはoriented disk $\bar{D}$からS^3の中への連続写像fのことである。簡約のためにその像$D=f(\bar{D})$をsingular diskと呼ぶ。
- S^3の2つのsingular disk $f, h: \bar{D} \to S^3$が<u>same type</u>とは$D=f(\bar{D})$から$D'=h(\bar{D})$への同型θが存在して$\theta f = h$を満す。

・S^3の2つの singular disk $f, h: \bar{D} \to S^3$が <u>equivalent</u> とはS^3の ambient isotopy ω_t $(0 \leq t \leq 1)$が存在して

$$\omega_0 f = f, \quad \omega_1 f = h,$$

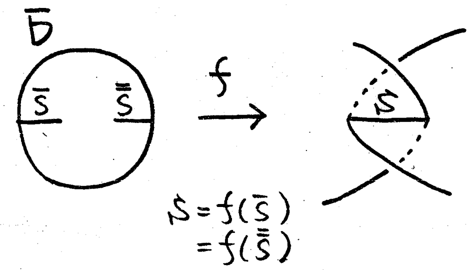
$$\omega_t(k) = k \quad (k = \partial D = \partial D')$$

するときである．

注) disk, equivalences は全て semilinear category で考えることとする．diskを一般の位置に置くことにより、singularityは有限個の double line と triple point だけである．

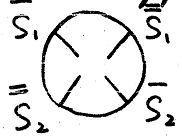
従って、$f|\partial\bar{D} : \partial\bar{D} \to \partial D$は常に同型とする．

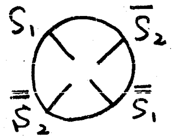
・<u>clasping singularity</u> 或いは単に <u>clasp</u> とは diskの singularity のうちで最も簡単なものをいう．図の様に claspの逆像は2つの交わらない$\bar{D}$の slit から成っている．



・<u>elementary disk</u> とは singularity が clasp だけから成る singular disk である．

Smythe [10] の結果から全ての singular disk は elementary disk に変形可能であることが解る．

注）elementary disk の type は $\bar{D}$ に於る slit の順序で決まる．例えば 

と 

とは異なる type である．

今、W を S^3 に於ける D の regular neighborhood とすると、W は g 個（g = clasp の数）の handle を持つ handlebody になっており W の boundary ∂W は genus g の closed surface である．

・D が <u>totally knotted</u> と呼ばれるのは ∂W が $S^3-\partial D$ で incompressible のとき，即ち $\pi_1(\partial W)$ から $\pi_1(S^3-\partial D)$ への induced map が mono であるとき．

<u>定理</u>　D と D^* を $\partial D=\partial D^*(=k)$ なる same type の elementary disk とする．もし D が totally knotted であるならば、D と D^* は equivalent である．

（証明の概略）　D が totally knotted ならば S^3 から S^3 への同型で $\varphi_1(D^*)\subset W$ とする様な写像 φ_1 の存在が云える．

次にもしも D^* が W に含まれているなら W から W への同型で

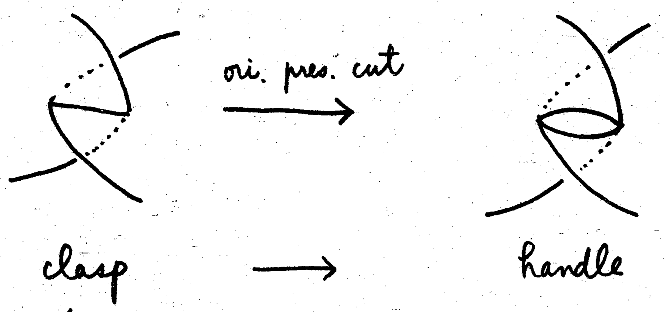
$$\varphi_2|\partial W = \text{identity}$$
$$\varphi_2(D^*) = D$$

を満たす写像 φ_2 の存在が云える．

このとき、φ_1, φ_2 共に集合として k を動かさない様に

出来る. $g_2 \cdot g_1$ が求める同型写像になっている.

§2. clasp の数と genus



上図の様に orientation preserving cut [7] によって clasp を handle に変えることが出来る. 即ち,

<u>定理</u> genus g と clasp の数 s の間には次の様な不等号が成り立つ: $s \geq g$.

注) prezel knot で doubled knot でないものは

$s \neq g\ (=1)$ である.

doubled knot でない prezel knot の存在はいえる.

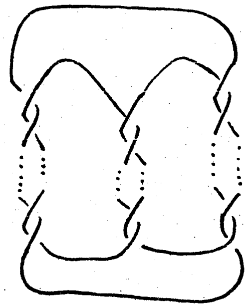
今, k を doubled knot とする. Seifert surface を canonical form [2] に直す. coefficient matrix C は

$$C \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -1 & l \end{pmatrix} \quad (\varepsilon = \pm 1,\ l = 整数)$$

である. このことを使って次がいえる.

<u>定理</u> Alexander 多項式が $\Delta_k(t) = nt^2-(2n-\varepsilon)t+n$ ($n>0$, $\varepsilon=\pm1$) である genus 1 の knot が doubled knot であるためには knot k の coefficient matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ が次を満さなければならない。

$$\circledast \begin{cases} \alpha\delta-\beta\gamma = \varepsilon n \\ \alpha+\delta = \pm(n+\varepsilon) \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = \pm1 \pm(n+\varepsilon) \end{cases}$$



$2p+1$ $2q+1$ $2r+1$

p	$n-1$	1	n	-1	n	-2	$-n-1$	0	$-n-1$	-1	$-n$	1	$-n$
q	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
r	-2	n	1	n	-1	$-n-1$	-2	$-n-1$	0	$-n$	-1	$-n$	1

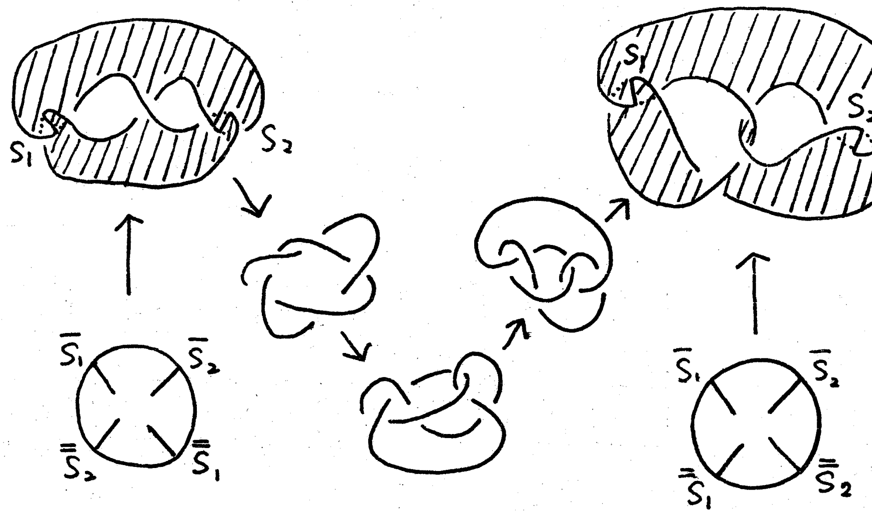
prezel knot が⊛の条件を満すのは上の表にある (p, q, r) 個の交点を持つ場合だけで、これらは簡単な変形によって doubled knot であることが解る。

もしも $s=g$ ならば s は与えられた knot を張る elementary disk の clasp の最小数である。

・D が <u>minimal</u> とは、$k=\partial D$ が D の clasp の数よりも小さい数の clasp を持つ elementary disk を bound しないとき。

<u>定理</u>　2つの異なる *type* の *minimal elementary disk* を *bound* する *knot* が存在する.

（証明）例えば 5_1 がそうである.



§3. *Property P* を持つ *knot* のある特別な *class*

今, $s=2$ なる場合のみ考える（このとき2つの *disk type* しかない）. 更に D が *totally knotted* であれば $\partial D=k$ は *Property* P（[1],[3],[4],[9]）を持つ. 即ち,

<u>定理</u>　*totally knotted* な *clasp* の数が2である *elementary disk* の *boundary* に *equivalent* な *knot* k は *Property* P を持つ.

この定理を証明するためには、条件を満たす *knot* k を用いて作った *homology sphere* M（*trivial* なものは除く）が

simply connected でないことを云えば十分である。

V を S^3 に於る k の *regular neighborhood* とする。

$$M \cong (S^3 - \operatorname{int} V) \underset{g}{\cup} S^1 \times D^2$$

g は *torus* $S^1 \times \partial D^2$ から *torus* ∂V への同型写像で $S^1 \times \partial D^2$ の *meridian* を ∂V の *meridian* でない *simple closed curve* に写すものとする。

$$M \cong (S^3 - \operatorname{int} W) \cup \left((W - \operatorname{int} V) \underset{g}{\cup} S^1 \times D^2 \right)$$

となっており、

$$M \cong M_1 \cup M_2 \quad \text{とする。}$$

<u>定理</u>　上の様な *homology sphere* M は *simply connected* でない。([6])

(証明の概略)　Van Kampen の定理により $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$ が *mono.* であれば

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(M) & \\
\pi_1(M_1) \arrow[ur] & & \pi_1(M_2) \arrow[ul] \\
 & \pi_1(\partial W) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) \underset{\pi_1(\partial W)}{*} \pi_1(M_2)$$

となって $\pi_1(M) \neq \{1\}$ であることが解る。今、$\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$ が *mono* でないと仮定する。Dehn の Lemma [7] と Loop Theorem [11] によって

$$M_2 = X_1 \cup X_2 \ , \quad g(X_i) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

$$X_1 \cap X_2 = \text{non-singular disk}$$

なる様に M_2 が分解される。再び Van Kampen の定理により

$$\pi_1(M_2) = \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

$\pi_1(M_2)$に対する Alexander polynomialを考えると、2変数の多項式でしかも $p(g_1)\cdot q(g_2)$ に因数分解されることが解る。(g_1, g_2 は $\pi_1(X_1)$, $\pi_1(X_2)$ のアーベル化群の生成元)

実際に $\pi_1(M_2)$ の Alexander polynomialを計算すると、2つの因数に分解出来ないことが解る。

従って、最初に $\pi_1(\partial W) \to \pi_1(M_2)$ が mono. でないとした仮定が誤りであったことが解る。

(以上)

参考文献

[1] Bing,R.H. and Martin,J.M., "CUbes with knotted holes," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 155, 1971.

[2] Fox,R.H., "A Quick Trip Through Knot Theory," Topology of 3-Manifold and Related Topics, Prentice Hall, 1961.

[3] Gonzalez-Acuna,F., "Dehn's Construction of Knots," Bol. Soc. Mat. Mexicana, vol. 15, 1970.

[4] Hemple, J., "A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15, 1964.

[5] Nakagawa,Y., "Singular Disks and Their Equivalences," Dissertation, Princeton University, 1973.

[6] __________, "A New Class of Knots with Property P," (to appear).

[7] Papakyriakopoulos,C.D., "On Dehn's Lemma and the Asphericity of Knots," Ann. of Math., vol.66, 1957.

[8] Seifert,H., "Schlingknoten," Math. Z., vol. 52, 1949.

[9] Simon,J. "Some classes of knots with property P," Topology of Manifolds, Markham, 1970.

[10] Smythe,N. "Handlebodies in 3-Manifolds," Proc. Amer. Math. Soc., vol. 26, 1970.

[11] Stallings,J., "On the Loop Theorem," Ann. of Math., vol.72, 1960.

[12] Whitehead,J.H.C., "On Doubled Knots," Journal of the London Math. Soc., vol. 12, 1937.