数理解析研究所講究録
第 219 巻 1974 年 28-42

Property P をもつ link について

上智大 理工 横山 和夫

§1. 序

PL 3次元 topology における次の問題を考えようというのが目的です。

[問題] 三次元球面 S^3 から互いに交わらないいくつかの solid torus を取り除き，それらをちがった方法で埋め直すことによって Poincaré の予想の反例を構成できないか？

この目的のために我々は次の様な link の問題を考える。

link $\ell = k_1 \cup k_2 \cup \cdots\cdots \cup k_\mu$ $(\subset S^3)$ に対して，$N(\ell)$ を S^3 における ℓ の正則近傍とすると，$N(\ell)$ は μ 個の solid torus $\overset{\mu}{\underset{i=1}{\cup}} D_i^2 \times S^1$ に位相同型である。任意の位相同型写像 $f_i : \partial D_i^2 \times S^1 \longrightarrow \partial N(k_i)$ を使って向き付け可能な compact で境界のない 3次元多様体

$$M = \overline{S^3 - N(\ell)} \underset{f}{\cup} \overset{\mu}{\underset{i=1}{\cup}} D_i^2 \times S^1$$

を構成する。ここに $f = \overset{\mu}{\underset{i=1}{\cup}} f_i$ は $\overset{\mu}{\underset{i=1}{\cup}} \partial D_i^2 \times S^1$ から

$\partial N(\ell)$ への位相同型写像である。もちろんMは link ℓ と位相同型写像 f に依存してきまる。我々はこれを $M(\ell, f)$ で表わす。

このとき link ℓ の各 component k_i の正則近傍 $N(k_i)$ の境界上の simple closed curve が $N(k_i)$ で 2-cell を bound するとき、その curve m_i を k_i の meridian と呼ぶ。また $N(k_i)$ の境界上の simple closed curve が $\overline{S^3 - N(k_i)}$ で homologous に 0 ならば、その curve n_i を longitude ということにする。$\partial N(k_i)$ 上で isotopy の範囲を除けば、もちろん m_i, n_i は unique である。そうすれば、ある点 $p \in S^1$ に対して $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\})$ は $\partial N(k_i)$ 上の simple closed curve であるので $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\}) = m_i^{p_i} n_i^{q_i}$ と一意的に表わせる。ここに p_i, q_i は整数である。今後簡単のために $f_i(\partial D_i^2 \times \{p\})$ を $f_i(\partial D_i^2)$ で表わす。

そして 我々は上の問題を考えるために link ℓ に対して 次のような定義を行なう。

<u>Def. 1</u>

link ℓ が Property Pa をもつとは

$\overset{}{\underset{def.}{\Longleftrightarrow}}$ $\pi_1(M(\ell, f)) = 1$ であるためには、位相同型写像 f が すべての i について

$$f_i(\partial D_i^2) = m_i$$

を満たしていなければならない。すなわち、$\pi_1(M(\ell,f))=1$ になるためには、すべての solid torus を元の通りに埋めなおさなければならないということである。

<u>Def. 2</u>

link ℓ が Property P_1 をもつとは

$\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_1(M(\ell,f))=1$ であるためには、位相同型写像 f において、

$$\exists i_0 \ (1 \leq i_0 \leq \mu) \ ; \ f_{i_0}(\partial D^2_{i_0}) = m_{i_0}$$

を満たしていなければならない。すなわち、$\pi_1(M(\ell,f))=1$ になるためには、少なくとも一つの solid torus は元の通りに埋めなおさなければならないということである。

<u>Def. 3</u>

link ℓ が Property P^* をもつとは

$\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_1(M(\ell,f))=1$ なる任意の位相同型写像 f に対してできる向き付け可能な compact で境界のない3次元多様体 $M(\ell,f)$ は3次元球面 S^3 である。

このとき、Property P^* をもつ link からは〔問題〕をみたすような（すなわち Poincaré の反例になるような）3次元多様体は作れないということになる。

逆に全ての向き付け可能な compact で境界のない3次元多

様体は上のような方法で構成できることは分かっている [7] ので、もしも全ての link が Property P^* をもてば Poincaré の予想は成立する。

Property P_a と Property P_1 は component が1つの場合、すなわち knot の場合は同じになるが、この時我々は knot が Property P をもつという。そして Bing ら [1] [2] [4] [5] によって、色々な knot が Property P をもつことが示されている。この概念を link にまで拡張したものが上の定義である。

§1. Property P^* について

Property P^* については、前回にも述べたのであるが、ここでは一応結果だけを上げておくことにする。

Theorem 1

l_1, l_2 ; Property P^* をもつ link のとき l_1 と l_2 の任意の product $l_1 \cdot l_2$ も Property P^* をもつ。

この定理の証明のためには次の二つの Lemma が本質的である。その Lemma を述べる前に言葉の説明を行なう。

次にあげるように（図1を参照されたい）簡単にからみあっている link O_1, O_2, O_3 を考える。

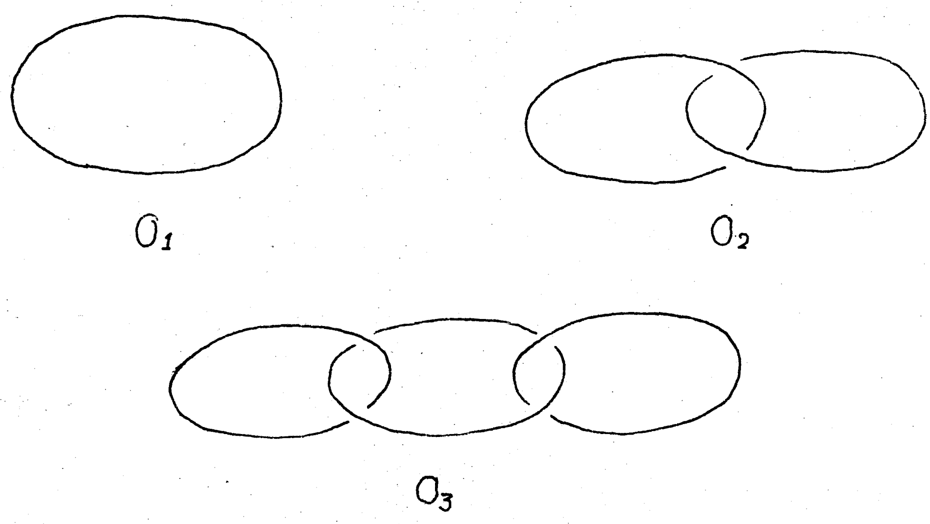


図 1

<u>Lemma 1</u>

link O_1, O_2, O_3 はそれぞれ Property P^* をもつ。

link $\ell = k_1 \cup k_2 \cup \cdots\cdots \cup k_\mu$ $(\subset S^3)$ に対して、$k_2 \cup k_3 \cup \cdots \cup k_\mu$ とは交わらない S^3 における k_1 の正則近傍を $N(k_1)$, solid torus $N(k_1)$ の meridian を m とする。その時、我々は新しい link $m \cup k_1 \cup k_2 \cup \cdots \cup k_\mu$ を考えることができる。この link を我々は ℓ^* で表わす。図2を参照されたい。その時

<u>Lemma 2</u>

ℓ ; Property P^* をもつ link

$\Longrightarrow$ ℓ^* も Property P^* をもつ link.

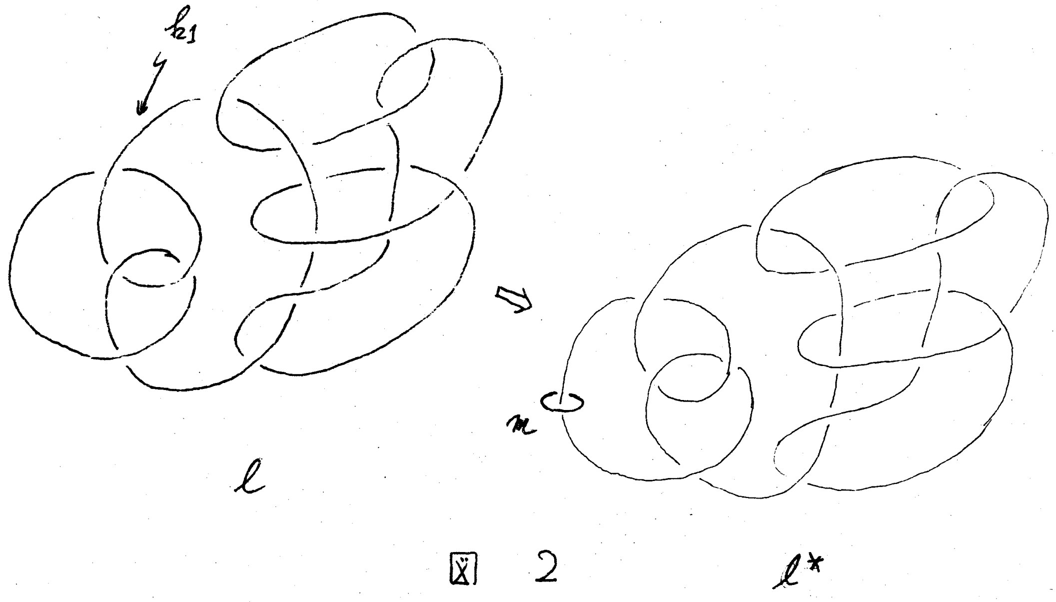


図 2

この定理の簡単な系として次のようなことが分かる.

<u>Corollary</u>

すべての torus link は Property P^* をもつ。

その他、簡単な link については定理を使うと Property P^* をもつことが分かる. 詳細については [6] を参照して下さい。

§2. Property P_a と Property P_1 について

準備としてまず次のような記号を導入する。

S^3 の中に互いに交わらない 3-ball を標準的に embed して、その中に knot k_1 と k_2 を図3のようにそれぞれの 3-ball

にproperにembedしておく。そして図3のように単純にからませてできるlinkを我々は$k_1 \natural k_2$と表わす。このとき次の結果が成り立つ。

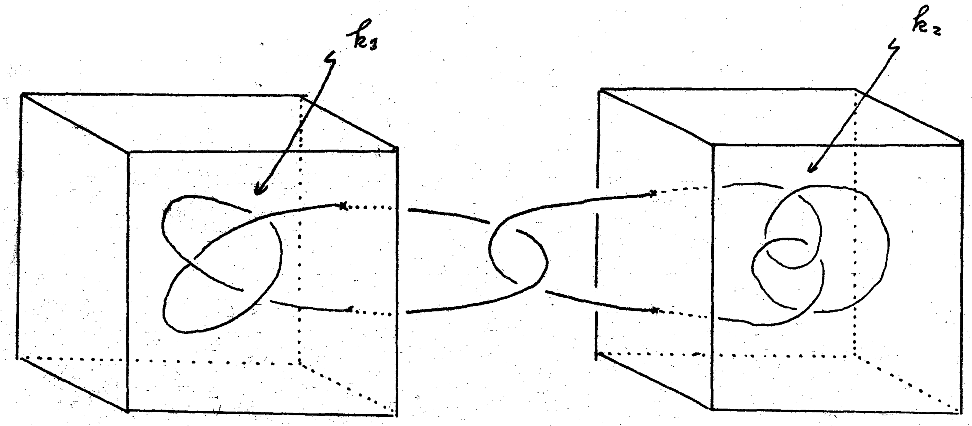


図 3

<u>Theorem 2</u>

k_1, k_2 が Property P をもつ knot

$\Longrightarrow$ $\ell = k_1 \natural k_2$ は Property P_a をもつ

[証明の outline]

次の図4のような genus 1 の surface F を考え、3次元球面 S^3 が F によって分けられる2つの領域のうち、link ℓ を含む方の closure を A とすると A は solid torus である。その solid torus A の meridian を m_A とすると、knot k_1 が Property P をもつことによって、A から link ℓ の正

則近傍を取り除き、$\pi_1(M(\ell,f))=1$ になるような位相同型写像 $f=f_1\cup f_2$ によって二つの solid torus を埋めこんで A より得られる境界として F をもつ 3 次元多様体（すなわち、$\overline{M(\ell,f)-\overline{S^3-A}}$ ）を A' とすると、A' は homotopy solid torus でかつ m_A を boundary としてもつ 2-cell が A' 内に存在することが分かる。

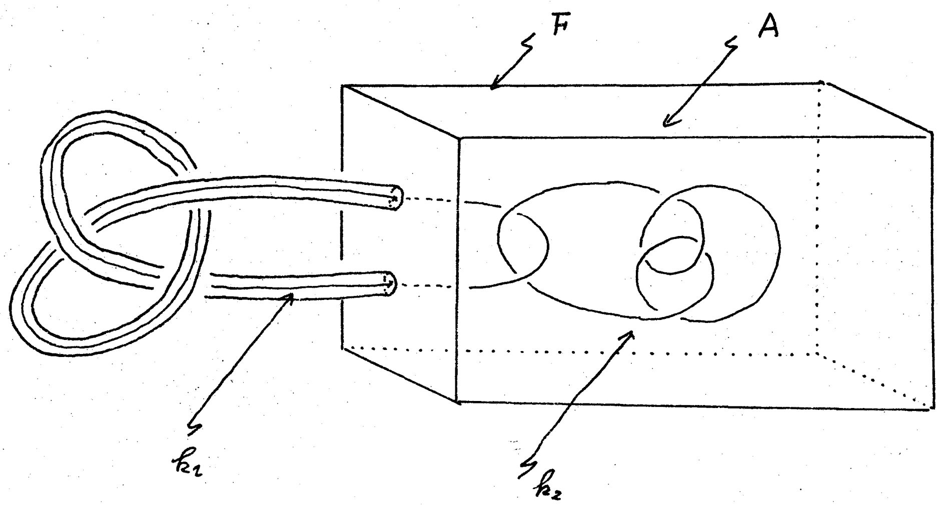


図 4

この 2-cell と $f_1(\partial D_1^2\times S^1)$ との交わりを考え、A' 内で 2-cell を isotopic に動かして、この交わりを簡単にして、さらにこの 2-cell と $f_2(\partial D_2^2\times S^1)$ との交わりも A' 内で 2-cell を isotopic に動かして簡単にする。すると f_1 によって solid torus が元通りに埋めこまれていないと仮定し、そして $f_2(\partial D_2^2)=m_2^{\beta_2}n_2^{\delta_2}$ とおくと $|\delta_2|=1$ ということが分かる。ここに m_2, n_2 は solid torus $N(k_2)$ のそれぞれ

meridian, longitudeである。

同様に solid torus $N(k_1)$ の meridian, longitude をそれぞれ m_1, n_1 とおき、そして $f_1(\partial D_1^2) = m_1^{p_1} n_1^{q_1}$ とする。すると f_2 によって solid torus が元通りに埋めこまれていないとすると $|q_1| = 1$ ということが分かる。

A より k_1 だけの正則近傍 $N(k_1)$ をとりのぞき、f_1 によって solid torus $D_1^2 \times S^1$ を埋めこんで A より得られる3次元多様体を $\tilde{A}$ とすると、$f_1(\partial D_1^2) = m_1^{p_1} n_1^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$ ということによって、$\tilde{A}$ は solid torus である。そして solid torus $\tilde{A}$ の中に knot k_2 は次の図5のように embed している。

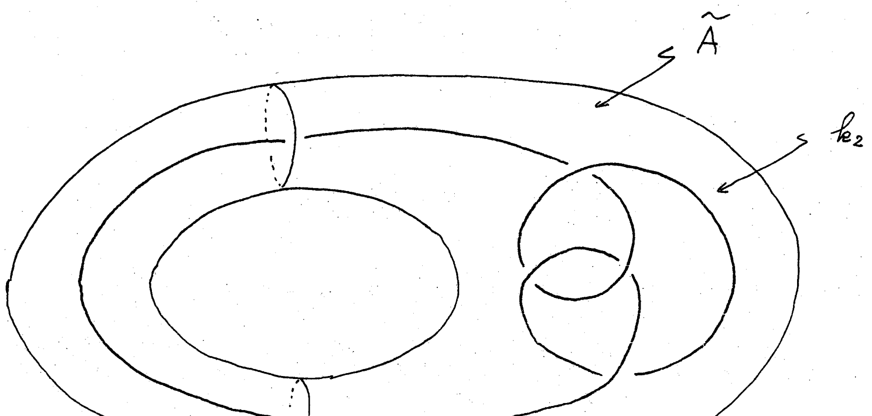


図 5

よって、最後に knot k_1 と knot k_2 の product $k_1 \cdot k_2$ が Property P をもつことによって、f_2 は元の通りに solid torus

を埋めこんでいなければならないことが分かる。すると f_1 が元の通りに埋めこんでいなければならないことは明らかになる。

色々な knot が Property P をもつことは分かっているので、この定理によって $\mu=2$ の時 Property P_a をもつ link が存在することが分かる。$\mu \geq 3$ の時も同様な証明を行なえば次の図6のような link は Property P_a をもつことが分かる。但し各 knot k_i は Property P をもつものとする。

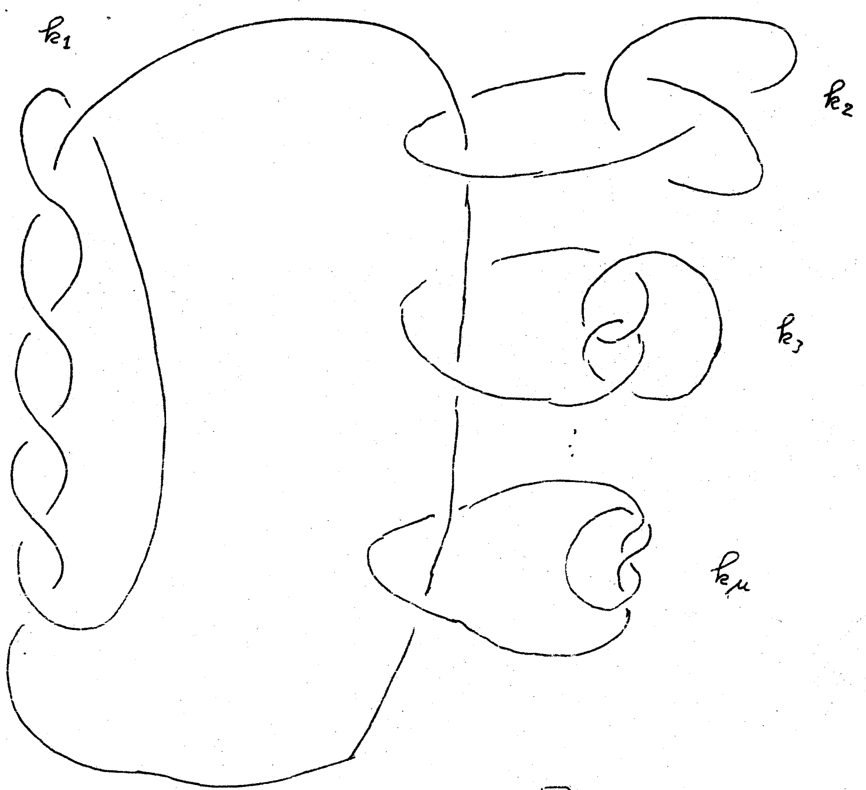


図 6

次に．knot k に対して $\star$-unknotting number なるものを定義する。

<u>Def. 4</u>

knot k $(\subset S^3)$ に対して，十分大きな n をとれば．次の条件をみたす trivial link $O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ $(\subset S^3)$ が存在する。

① 任意の i $(1 \leq i \leq n)$ について．k と O_i との linking number $lk(k, O_i) = 0$ である。

② $k \cup O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ の complement は．ある trivial knot O が存在して．$O \cup O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ の complement と位相同型である．

このような n の最小数を knot k の $\star$-unknotting number といい．$\star(k)$ で表わす。図7参照

明らかに普通の意味の unknotting number より小さいことは分かる。

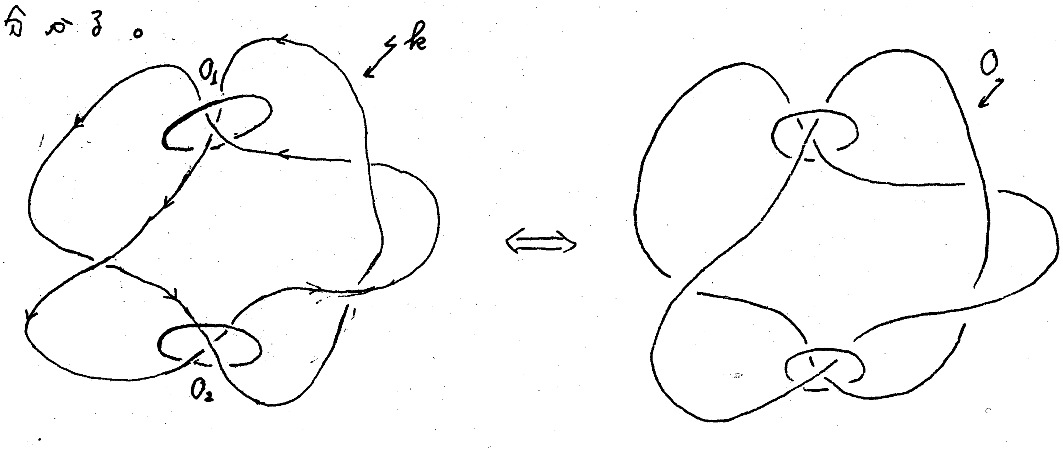


図 7

Def. 5

knot k が Property P_T をもつとは

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ (1) trivial knot O_1 ($\subset S^3$) が存在して、定義4の①②をみたす ($\sharp(k)=1$)。そして $\overline{S^3 - N(O_1)}$ は solid torus である。これを $\mathcal{T}$ で表わすと、$S^3 \supset \mathcal{T} \supset k$ である。そして

(2) $\pi_1(M(k, f)) = 1$ なる位相同型写像 f に対して

$$\hat{\mathcal{T}} = \overline{\mathcal{T} - N(k)} \cup_f D^2 \times S^1$$

は homotopy solid torus である。

すると簡単に次のことが示される。

Proposition

component が2つで各 component が unknot, かつ linking number $lk(k_1, k_2) = 0$ である trivial でないすべての link $l = k_1 \cup k_2$ が Property P_1 をもつ。

$\Longleftrightarrow$ すべての $\sharp(k)=1$ である knot が Property P をもつ。

$\Longleftrightarrow$ すべての $\sharp(k)=1$ である knot が Property P_T をもつ。

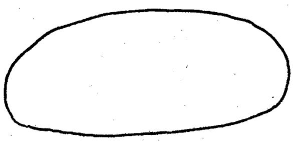
Corollary

trivial でない knot k_1 の正則近傍を N とする。また条件 ① $lk(\partial D^2, k) = 0$ ② k は $D^2 \times S^1$ で trivial でない。③ k は S^3 で trivial。をみたす knot k が標準的に S^3 内にある solid torus $D^2 \times S^1$ に embed しているとする。h を

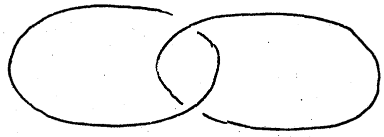
$D^2 \times S^1$ から N の上への位相同型写像とすると、knot $h(k)$ ($\subset S^3$) は Property P をもつ。

§3. Examples.

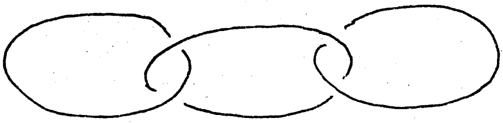
[Example 1] Property P_1 をもたないが Property P^* をもつ link の例として次のような link がある。



O_1



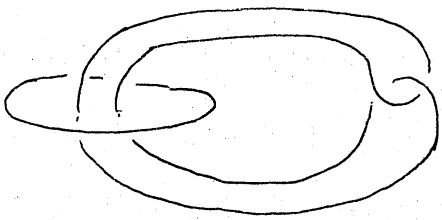
O_2



O_3

link ℓ が Property P_a をもてば Property P_1 をもつことは明らかであるが、逆は次のような例によって成立しない。

[Example 2] Property P_a をもたないが Property P_1 をもつ link.



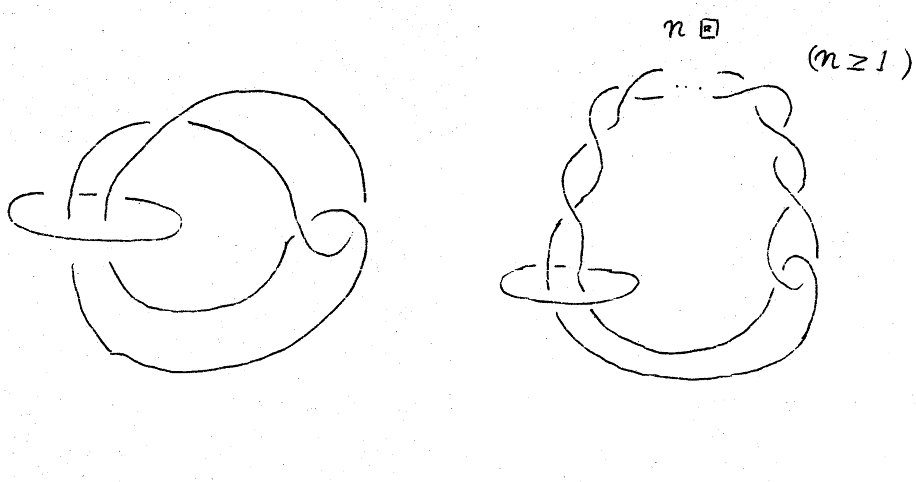
この link が Property P_a をもたないことは，一方を元通りに埋めると，もう一方は knot していないので，$f_2(\partial D_2^2) = m_2^{p_2} n_2^{q_2}$ で $|q| = 1$ であればいつも $\pi_1(M(\ell, f)) = 1$ となって，ℓ が Property P_a をもたないことが分かる。

次に $f_1(\partial D_1^2) = m_1^{p_1} n_1^{q_1}$ とすれば，linking number が 0 ということより $q_1 = 0$ 又は $|q_1| = 1$ となる。$|q_1| = 1$ のときは doubled knot が全て Property P をもつことより ℓ が Property P_1 をもつことは分かる。

この例は component は2つとも knot していないが Property P_1 をもつことがあることを示している。

Property P をもたないが Property P^* をもつ knot は trivial knot しか知られていない。では Property P_1 をもたないが，Property P^* をもつ link は各 component が unknot なものだけであろうか？これは次のような例によって否定される。

[Example 3]



References

[1] R.H. Bing & J.M. Martin ; *Cubes with knotted holes*, Trans. Amer. Math. Soc., 155 (1971) 217 – 237.

[2] F. González-Acuña ; *Dehn's construction of knots*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 15 (1970) 58 – 79.

[3] J. Hempel ; *Construction of orientable 3-manifolds*, Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, 1962.

[4] —— ; *A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot*, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964) 154 – 158.

[5] J. Simon ; *Some classes of knots with Property P*, Topology of Manifolds' 1970, Markham, 195 – 199.

[6] K. Yokoyama ; *On links with Property P^**, (to appear)

[7] A. H. Wallace ; *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. Jour. Math., 12 (1960) 503 – 528.