数理解析研究所講究録
第219巻 1974年 50-59



# 穴を開けた球面のアイソトピー群について

東教大 理　金戸武司

## §1 序

多様体 $M$ の自己同相群 $H(M)$ のアイソトピー類のなす群 $I(M)$ について annulus theorem は基本的な役割をなす。Kirby [5] は 4-次元を除き成立することを示した。このことから，$I(S^n) \approx Z_2$ $(n \neq 4)$ になる。又 Gluck [3] は，$I(S^2 \times S^1) \approx Z_2 + Z_2 + Z_2$ を示した。この報告では，$n$-次元球面 $S^n$ から $k$ 個の $n$-球を除いた多様体 $S^n_k$ について，$n=2$ かつ $k \leq 3$，$n=3$，$n \geq 6$ ならば，$I(S^n_k) \approx P_k \times Z_2$（$P_k$ は $k$ 次対称群）となることを示す。

## §2. 定義と準備.

$R^n$ を $n$ 次元ユークリッド空間，$B^n := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ を標準 $n$-球，$S^{n-1} := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ を標準 $(n-1)$-球面とする。それぞれに同相なものを，単に，$n$-球，$(n-1)$-球面という。

定義：　$S^n \supset \hat{S}^{n-1}$ $(n-1)$-球面が任意の $x \in \hat{S}^{n-1}$ に対し，

$S^n$での近傍Uが存在し，$(U, U\cap \hat{S}^{n-1})$と$(R^n, R^{n-1})$が対同相をなすとき，局所平坦という。$S^n \supset D^n$: $n$-球がその境界で局所平坦のとき，局所平坦という。

記号：　$S^n \supset D_i^n$ $(i=1,2,\cdots,k)$を局所平坦な相交わらない$n$-球とする。$S^n - \bigcup_{i=1}^{k} D_i^n$の閉包を$S_k^n$で表わす。

注1：$n \geqq 1$ $(n \neq 4)$のとき，annulus theoremより$S_k^n$は，$D_i^n$の取り方に依らず同相，以下，$S_k^n$として，$S^n$の赤道に関するreflectionが$S_k^n$のreflectionを引き起こすように，$D_i^n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \,/\, \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1,\ (x_1 - \cos\frac{2\pi i}{k})^2 + (x_2 - \sin\frac{2\pi i}{k})^2 + \sum_{j=3}^{n+1} x_j^2 \leqq (\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{2})^2\}$によって得られるものとする。

$S_k^n$上のすべての自己同相群$H(S_k^n)$は，コンパクト開位相に関して，合成を演算とし位相群をなす。$H_0(S_k^n) := \{h \in H(S_k^n) \,/\, h \sim 1\}$（ここに$1$は恒等写像，「$\sim$」はアイソトピック）は，$H(S_k^n)$の開閉正規部分群をなす。以下，アイソトピー群$I_k^n := H(S_k^n)/H_0(S_k^n)$について考察する。

記号：　${}^{+}I_k^n := \{(h) \,|\, h \in H(S_k^n),\ h$: 向きを保つ$\}$（ここに$(h)$は$h$を含むアイソトピー類），${}_0^{+}I_k^n := \{(h) \in {}^{+}I_k^n \,|\, h(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，但し $\partial S_k^n = \bigcup_{i=1}^{k} \hat{S}_i^{n-1}\}$。

$\iota$ : ${}^{+}I_k^n \longrightarrow I_k^n$を包含写像，$\pi$: $I_k^n \longrightarrow I_k^n/{}^{+}I_k^n$を自然な準同型とする。

命題1. 短完全系列 $0 \to {}^{+}I^n_k \xrightarrow{\iota} I^n_k \xrightarrow{\pi} I^n_k/{}^{+}I^n_k \to 0$ は分解型で、$I^n_k \approx {}^{+}I^n_k \cdot Z_2$（「・」半直積）となる。

証明. $I^n_k/{}^{+}I^n_k$ の生成元 ${}^{-}I^n_k$ に、$(r) \in I^n_k$（ここに $r \in H(S^n_k)$ は、$r(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, -x_{n+1})$）を対応させる準同型 $\amalg: I^n_k/{}^{+}I^n_k \to I^n_k$ は、$\pi \circ \amalg = 1$。

注2。$(r)$ の生成する位数2の部分群 $\langle (r) \rangle$ が $I^n_k$ で正規なら、上は直積に分解。

$\iota': {}^{+}_{0}I^n_k \to {}^{+}I^n_k$ を包含写像、$\pi': {}^{+}I^n_k \to {}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k$ を自然な準同型とする。

命題2. 短完全系列 $0 \to {}^{+}_{0}I^n_k \xrightarrow{\iota'} {}^{+}I^n_k \xrightarrow{\pi'} {}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k \to 0$ に於いて、${}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k$ は $k$次対称群 $P_k$ と同型。

証明。$H(S^n_k) \ni h_{ij}$ で向きを保ち、$\partial S^n_k \supset \hat{S}^{n-1}_l, \hat{S}^{n-1}_i, \hat{S}^{n-1}_j$（$l \neq i,\ l \neq j,\ k \geq l \geq 1$）に対し、$h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_i) = \hat{S}^{n-1}_j$, $h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_j) = \hat{S}^{n-1}_i$, $h_{ij}(\hat{S}^{n-1}_l) = \hat{S}^{n-1}_l$ なるものが次のように構成できる。n-球 $D^n \subset S^n$ で、$\hat{S}^{n-1}_i \cup \hat{S}^{n-1}_j$ を内部に含み、他と交わらないものをとり、$D^n$上の同相写像 $\widehat{h_{ij}}$ で $\widehat{h_{ij}} | \partial D^n = 1$, $\widehat{h_{ij}}(\hat{S}^{n-1}_i) = \hat{S}^{n-1}_j$, $\widehat{h_{ij}}(\hat{S}^{n-1}_j) = \hat{S}^{n-1}_i$ となるものを回転によってつくり、$h_{ij}$ を $D^n \cap S^n_k$ 上で $\widehat{h_{ij}}$、他で1とすればよい。これにより、
$f: P_k \to {}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k$ を $f((i,j)) := [(h_{ij})]$（ここに $[(h_{ij})]$ は $(h_{ij})$ を含む ${}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k$ の類）、$f((i,j)(i',j')) := [(h_{ij})(h_{i'j'})]$ で定義すれば同型となる。

次の定理が基本的役割をなす。

定理　$n=2$ かつ $k\leqq 3$，$n=3$，$n\geqq 6$ のとき，${}^{+}_{0}I^n_k=0$ 。

系　$n=2$ かつ $k\leqq 3$，$n=3$，$n\geqq 6$ のとき　$I^n_k \approx P_k \times Z_2$（直積）

証明．$I^n_k \ni {}^{\forall}(h)$ 対し，$(h)^{-1}(\gamma)(h)(\gamma)^{-1}=(h^{-1}\gamma h\gamma^{-1}) \in {}^{+}_{0}I^n_k$

，従って定理より，右辺 $=(1)$ すなわち，$(h)^{-1}(\gamma)(h)=(\gamma)$。

故に $\langle(\gamma)\rangle$ は $I^n_k$ の正規部分群。命題1の注1より，$I^n_k \approx {}^{+}I^n_k \times Z_2$

（直積）。命題2より ${}^{+}I^n_k \approx {}^{+}I^n_k / {}^{+}_{0}I^n_k \approx P_k$　故に $I^n_k \approx P_k \times Z_2$。

§3. 定理の証明

次の結果が知られている。（[5]）

命題3（annulus theorem）

$f, g: S^{n-1} \longrightarrow R^n$ が向きを保つ局所平坦な埋蔵で，$f(S^{n-1})$ が $g(S^{n-1})$ の囲む $R^n$ の有界な領域に含まれるとき，$n \neq 4$ ならば，埋蔵　$F: S^{n-1} \times [0,1] \rightarrow R^n$ で，$F(x,0)=f(x)$，$F(x,1)=g(x)$（${}^{\forall}x \in S^{n-1}$）を満たすものが存在する。

命題4（アイソトピー定理）

$f: S^n \rightarrow S^n$ を向きを保つ同相写像とすると $n \neq 4$ のとき，$f \sim 1$。（「$\sim$」は　アイソトピック）

証明。命題3より次のように導かれる。$S^n \ni a$（固定する）に対し，$\{a, f(a)\} \subset \mathring{D}^n$ なる $n$-球が存在する。$D^n$ の錐構造により，$f \sim f_1$ で $f_1(a)=a$ とできる。$a$ の $\varepsilon$-球近傍 $B^n_\varepsilon$ を十分小さくとれば，$f_1(B^n_\varepsilon) \subset B^n_\gamma$ となる $a$ の $\gamma$-球近傍が

存在し，$f_1|\partial B^n_\varepsilon$ と $i:\partial B^n_r\to S^n$（包含写像）に命題3を用いて $F(S^{n-1}\times I\cap 1)$ に沿って $f_1(\partial B^n_\varepsilon)$ を動かすことにより $f_1\sim f_2$ で $f_2|\partial B^n_\varepsilon=1$ とできる。Alexanderアイソトピーにより，$f_2\sim 1$ となる。

注3。逆も成り立つ。（[1]）

命題5（アイソトピー拡張定理）

多様体M上の同相写像 $h:M\to M$ の $\partial M$ 上のアイソトピー $h_t|\partial M$ は M上のアイソトピー $h_t$ に拡張できる。

定理の証明。

${}^+_0I^n_k=0$を示すには ${}^+_0I^n_k\ni{}^\forall(h)$ が $(h)=(1)$ すなわち，$H(S^n_k)\ni h$ が向きを保ち，$h(\hat{S}^{n-1}_i)=\hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ ならば，$h\sim 1$を示せばよい。命題4，5 により $h|\partial S^n_k=1$としてよい。以下 3つの場合に分けて $h\sim 1$を示す。

I］ $n=2$ かつ $k\leqq 3$の場合。

i) $k=1$ のとき，Alexanderアイソトピーにより $h\sim 1$。

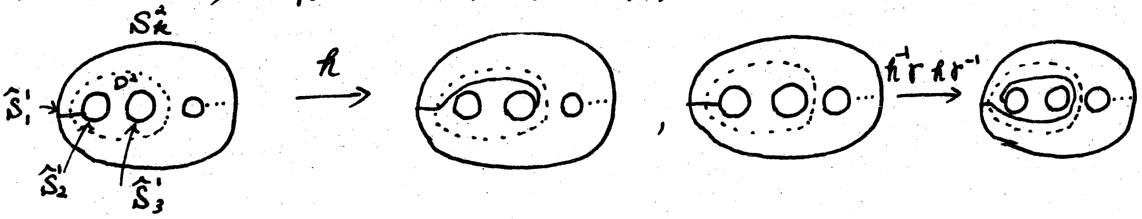
ii) $k=2$ のとき，$\hat{S}^1_1$を回転させれば，[3]のTh.(7.2)で成立。

iii) $k=3$のとき，ii)での[3]の方法を，変形の途中で $\hat{S}^1_3$にひっかからぬように注意して適用すればよい。

注4。$k\geqq 4$では，$\amalg(I^2_k/{}^+I^2_k)=\langle(\delta)\rangle$ が $I^2_k$で正規とならず，$I^2_k\not\cong{}^+I^2_k\times Z_2$（直積）。次はその例である。

$\partial S^2_k\supset\hat{S}^1_2$，$\hat{S}^1_3$ を含み，他と交わらぬ2-球 $D^2(\subset S^2)$で，

$\gamma(D^2)=D^2$となるものをとり，$h|_{D^2}: D^2\to D^2$ を $D^2$の内部を180°回転させて得られる同相写像で，$h|_{D^2}|\partial D^2 = 1$，$h|_{D^2}(\hat{S}^1_2)=\hat{S}^1_3$，$h|_{D^2}(\hat{S}^1_3)=\hat{S}^1_2$となるものとする。$h|S^2_k - D^2 = 1$により拡張して$h: S^2_k\to S^2_k$をうる。$h^{-1}\gamma h\gamma^{-1}: (S^2_k, \partial S^2_k)\to(S^2_k,\partial S^2_k)$は 1と対としてホモトピックでないから，$(h)^{-1}(\gamma)(h)(\gamma)^{-1}\neq(1)$。(下図参照)




II] $n=3$の場合

i) $k=1$のとき，I]の場合と同様。

ii) $k\geq 2$のとき．自然数$m$を$k>m\geq 1$とする。$m$についての帰納法を用いる。

$\hat{S}^2_i$と$\hat{S}^2_{i+1}$を結ぶ線分を$l_{i,i+1}$とし，その自明の管状近傍を$T_i: B^2\times[0,1]\to S^3_k$　（$T_i(0\times[0,1])=l_{i,i+1}$，$T_i(B^2\times 0)\subset\hat{S}^2_i$，$T_i(B^2\times 1)\subset \hat{S}^2_{i+1}$）とする。$h\sim h_{m-1}$まで変形され，$h_{m-1}|\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{m-1}T_j(B^2\times[0,1])\}=1$であるとする。[3]と同様の手法により，$\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{m-1}T_j(B^2\times[0,1])\}$を止めたまま，$h_{m-1}\sim h'$で$h'(T_m(B^2\times[0,1]))=T_m(B^2\times[0,1])$とできる。$h'|T_m(\partial B^2\times[0,1]): T_m(\partial B^2\times[0,1])\to T_m(\partial B^2\times[0,1])$に前II]の$k=2$を適用（必要なら$T_m(\partial B^2\times[0,1])$

$\subset \hat{S}^2_m$を回転させる。）し，命題5を用いて $T_m(\partial B^2\times 0)\subset \hat{S}^2_{m-1}$ を止めて，$h'\sim h''$ で $h''|\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{m-1}T_j(B^2\times[0,1])\}\cup T_m(\partial B^2\times[0,1])=1$ とできる。$h''|T_m(B^2\times[0,1])$ に Alexander アイソトピーを用いて，$h''\sim h_m$ をうる。$h_{k-1}|\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{k-1}T_j(B^2\times[0,1])\}=1$ だから，$h_{k-1}$ は 3-球 $S^3_k-[\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{k-1}T_j(B^2\times[0,1])\}]$ の境界上で，1。Alexander アイソトピーにより $h_{k-1}\sim 1$。

III］ $n\geqq 6$ の場合．

次の特殊な場合について考える。

補題1　$n\geqq 2$ のとき，$h: S^n_2\to S^n_2$ が向きを保ち，$h(\hat{S}^{n-1}_i)=\hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2)$ を満たす PL 同相写像ならば，$h\underset{PL}{\sim}1$．（「$\underset{PL}{\sim}$」：PL アイソトピック）

証明。$n$ についての帰納法を用いる。

$n=2$ のとき，[3] の Th.(7.2) は，PL カテゴリーでも成り立つからよい。$n-1$ まで成り立つとする。PL カテゴリーで，命題3，従って命題4が $n\geqq 1$ で，及び命題5が成り立つから，$h\underset{PL}{\sim}h'$ で $h'|\partial S^n_2=1$ とできる。$h'$ は PL だから $h'(l_{1,2})$ は $\hat{S}^{n-1}_1$ と $\hat{S}^{n-1}_2$ を結ぶ折れ線。よって，$h'\underset{PL}{\sim}h''$ で，$h''|\partial S^n_2\cup l_{1,2}=1$ とできる。$l_{1,2}$ の自明の管状近傍 $T_1: B^{n-1}\times[0,1]\longrightarrow S^n_2$ を PL 写像でとると，$T_1(B^{n-1}\times[0,1])$，$h''(T_1(B^{n-1}\times[0,1]))$ は，共に $l_{1,2}$ の正則近傍でしかも，$T_1(B^{n-1}\times[0,1])\cap\partial S^n_2=h''(T_1(B^{n-1}\times[0,1]))\cap\partial S^n_2$ は，

$l_{1,2} \cap \partial S^n_2 = T_1(0 \times \{0, 1\})$ の $\partial S^n_2$ に於ける正則近傍。よって相対正則近傍の一意性により $h'' \underset{PL}{\sim} h'''$ で $h'''/\partial S^n_2 = 1$ かつ $h'''(T_1(B^{n-1} \times [0,1])) = T_1(B^{n-1} \times [0,1])$ とできる。$h'''/T(\partial B^{n-1} \times [0,1])$ に仮定を適用し，命題5と Alexander アイソトピーを用いて，$h''' \underset{PL}{\sim} 1$。

$n \geqq 6$ での一般の場合，次の Kirby [6] Th. 17 を用いる。

命題6. $q \geqq 5$ のとき，$q$ 次元位相多様体 $Q^q$ のコンパクト部分多様体 $Q_0 \supset \partial Q$ が PL 構造をもち，かつ $Q$ への拡張が存在するならば，その拡張の $Q_0$ を止めたアイソトピー類は，$H^3(Q, Q_0, Z_2)$ と1対1に対応する。

定理の証明。$h: S^n_k \to S^n_k$ は $h/\partial S^n_k = 1$ だから，$S^n_k$ の標準的な PL 構造 $\theta$ に対し，$h$ によって誘導された PL 構造 $h^*\theta$ は，$\partial S^n_k$ 上で $\theta$ と一致する。従って命題6で，$Q = S^n_k$, $Q_0 := \partial S^n_k$ とすれば，$H^3(S^n_k, \partial S^n_k, Z_2) \approx H_{n-3}(S^n_k, Z_2) \approx 0$ だから $h \sim h'$ rel $\partial S^n_k$ で $h'$: PL とできる。II] の ii) と同様に，$l_{i,i+1}, T_i, h_i$ を定義する。自然数 $m$, $k > m \geqq 1$ について帰納法を用いる。$h' \underset{PL}{\sim} h_{m-1}$ で $h_{m-1}$: PL かつ $h_{m-1} / \partial S^n_k \cup \{\bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1} \times [0,1])\} = 1$ と変形できたとする。$h_{m-1}(l_{m,m+1})$ は折れ線だから，$h_{m-1} \underset{PL}{\sim} h''$ で $h''/\partial S^n_k \cup \{\bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1} \times [0,1])\} \cup l_{m,m+1} = 1$

とできる。$T_m(B^{n-1}\times[0,1])$，$h''(T_m(B^{n-1}\times[0,1]))$ は共に $l_{m,m+1}$ の正則近傍。相対正則近傍の一意性より $h''\underset{PL}{\simeq}h'''$ で $h'''|\partial S^n_a\cup\{\bigcup_{i=1}^{m-1}T_i(B^{n-1}\times[0,1])\}\cup l_{m,m+1}=1$ かつ $h'''(T_m(B^{n-1}\times[0,1]))=T_m(B^{n-1}\times[0,1])$ とできる。$h'''|T_m(\partial B^{n-1}\times[0,1])$ に補題1を適用し，命題5とAlexanderアイソトピーにより $h''\underset{PL}{\simeq}h_m$。$h_{k-1}$ にAlexanderアイソトピーを用いて，$h_{k-1}\underset{PL}{\simeq}1$。

注5. PLカテゴリーでは，$n=4, 5$ でも成り立つ。

## 参考文献


[1] Brown. M. and Gluck. H. : *Stable structures on manifolds* I. Ann. of math. 79 (1964) 1–17.

[2] Edwards. R and Kirby. R : *Deformations of spaces of imbeddings* : Ann. of Math. 93 (1971) 63–88.

[3] Gluck. H : *Embeddings of 2-spheres in 4-sphere*. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308–333

[4] Hudson. J. F. P. *Piecewise Linear Topology* W. A. Benjamin. Inc. New York. 1969.

[5] Kirby. R: Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math. 89 (1969) 575-582

[6] ———— Lectures on triangulations of manifolds. U.C.L.A. (Los Angels) (1969)