数理解析研究所講究録
第 219 巻 1974 年 90-102

Heegaard 分解と曲面上の曲線系について

東京工大 理学部　　本間龍雄

genus n の二つの solid Torus T_1, T_2 と境界 $\dot{T}_1$ から境界 $\dot{T}_2$ への同相写像 $f: \dot{T}_1 \to \dot{T}_2$ があたえられたとき, $\dot{T}_1$ の各点 p と像 $f(p)$ を同一視してできる向きづけ可能な閉3次元多様体Mを

$$\underline{M = T_1 \cup_f T_2}$$

と書き, Mの f に関する Heegaard 分解と呼ぶ。特に T_1, T_2 がMに含まれていて, $T_1 \cup T_2 = M$, $T_1 \cap T_2 = \dot{T}_1 = \dot{T}_2$ の場合は $f = id.$ とみなして, f を省略して

$$\underline{M = T_1 \cup T_2}$$

と書き, 単にMの Heegaard 分解と呼ぶ。「向きづけ可能な閉3次元多様体が Heegaard 分解を持つ」ことは良く知られているが, この定理は3次元多様体の単体分解可能性と同等である。

genus 1 の Heegaard 分解を持つ3次元多様体 (Lens space) は分類ができて, 構造も決定されるので, genus

2の場合を一応の研究目標とし、genus 2 の Heegaard 分解をもつ3次元多様体をできるだけ多く網羅し，その整理をしたいと心掛けている。まず Heegaard 分解に関する代表的な結果を紹介する。

genus n の solid torus T において，互いに交わらない n 個の proper な disk $D_1, D_2, \cdots, D_n$ があって，$T-D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ が連結なとき，$\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ を T の meridian diskの系，$\{\dot{D}_1, \dot{D}_2, \cdots, \dot{D}_n\}$ を meridian 系と呼ぶ。つぎの定理は明らかである。

定理1　genus n の二つの solid torus T, T' の meridian 系 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$（又は meridian disk の系 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$）と $\{C_1', C_2', \cdots, C_n'\}$（又は $\{D_1', D_2', \cdots, D_n'\}$）があれば，

$$F(C_1)=C_1',\quad F(C_2)=C_2',\ \cdots,\quad F(C_n)=C_n'$$

$$(\text{又は}\quad F(D_1)=D_1',\quad F(D_2)=D_2',\ \cdots,\quad F(D_n)=D_n')$$

を満足する同相写像 $F: T\to T'$ が存在する。

定理2　同じ genus をもつ二つの Heegaard 分解 $M=T_1\underset{f}{\cup}T_2$ と $M'=T_1'\underset{f'}{\cup}T_2'$ があり、また同相写像 $F: T_1\to T_1'$, $G: T_2\to T_2'$ があって右の図が可換ならば，M と M' は同相である。

$$\begin{tikzcd} \dot{T}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F|\dot{T}_1"'] & \dot{T}_2 \arrow[d, "G|\dot{T}_2"] \\ \dot{T}_1' \arrow[r, "f'"] & \dot{T}_2' \end{tikzcd}$$

証明　同相写像 $H: M\to M'$ を $H|T_1=F$, $H|T_2=G$

とおけば，図の可換性より，well-defined である。

定理2よりつぎの定理を得る。

<u>系1</u>　Heegaard 分解 $M = T_1 \underset{f}{\cup} T_2$ において，$F : T_1 \to T_1$（又は $G : T_2 \to T_2$）を同相写像とすると，

$$M' = T_1 \underset{f\circ(F|\dot{T}_1)}{\cup} T_2$$

$$\left(\text{又は}\quad M'' = T_1 \underset{(G|\dot{T}_2)\circ f}{\cup} T_2\right)$$

はMと同相である。

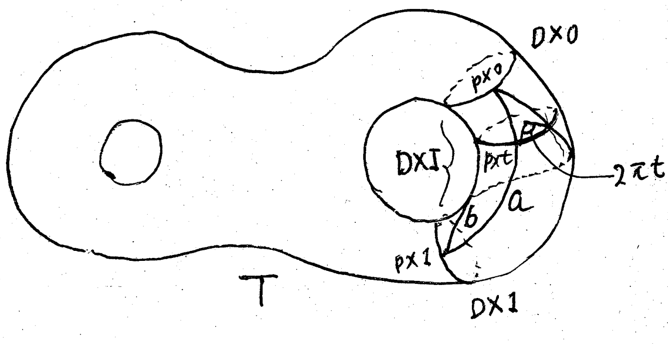
<u>証明</u>　つぎの図が可換であることを用いる。

$$\begin{array}{ccc} \dot{T}_1 & \xrightarrow{f} & \dot{T}_2 \\ {\scriptstyle (F|\dot{T}_1)^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id.} \\ \dot{T}_1 & \xrightarrow[f\circ(F|\dot{T}_1)]{} & \dot{T}_2 \end{array} \qquad \left(\text{又は}\quad \begin{array}{ccc} \dot{T}_1 & \xrightarrow{f} & \dot{T}_2 \\ {\scriptstyle id.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G|\dot{T}_2} \\ \dot{T}_1 & \xrightarrow[(G|\dot{T}_2)\circ f]{} & \dot{T}_2 \end{array}\right)$$

Heegaard 分解をもつ多様体どうしの同相性を確かめる手段として，handle のひねり，わたり，cancel があるが，ひねりとわたりを図によって説明する。

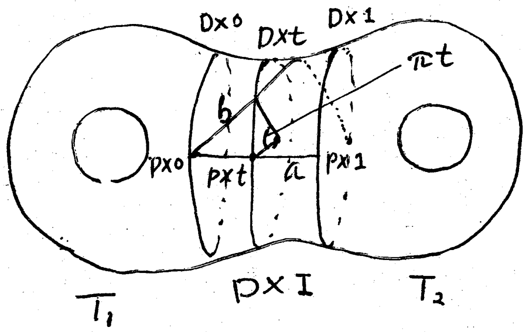
handle のひねり

(1) solid torus T に handle D×I（$\dot{T}\cap(D\times I) = \dot{D}\times I$）が埋め込ま

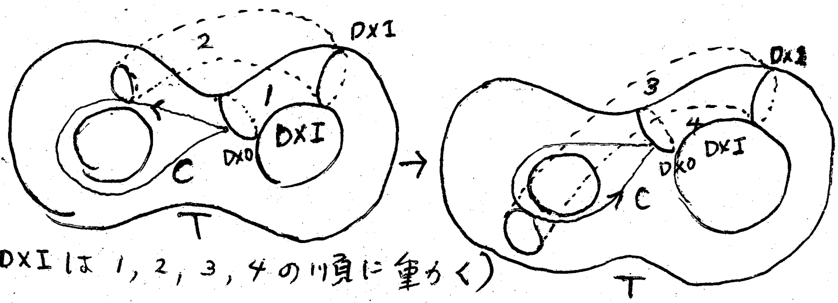


れているとき，$D\times t$ を円板とみなして $2\pi t$ だけ回転し，$0\leq t\leq 1$，$T-(D\times I)$ はそのまゝ動かさないTからTへの同相写像を handle の 2π のひねり と呼ぶ。図のように線 $a\ (=p\times I,\ p\in \dot{D})$ は線 b に写される。

(2) solid torus T に $D\times I$ $(\dot{T}\cap(D\times I)=\dot{D}\times I)$ が埋め込まれていて，$T-D\times I$ が連結でないとき，この $D\times I$ を bridge と呼ぶ。$D\times t$ を円板と見なして，πt だけ回転し，$D\times I$ によって T は二つの部分 T_1 と T_2 に分割されるが，図の T_1 はそのまま固定し，T_2 を π だけ回転する T の同相写像を，bridge の π のひねり と呼ぶ。図の線 $a\ (p\times I,\ p\in\dot{D})$ は b に写される。handle の 2π のひねり，bridge の π のひねり を総称して handle のひねり と呼ぶ。

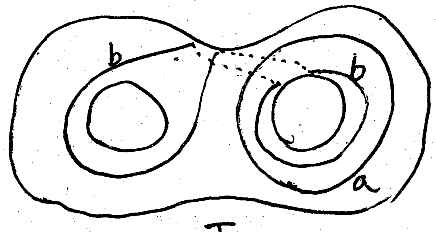


handle のわたり



(DxIは 1, 2, 3, 4 の順に動かく)

図のように handle $D\times I$ を，$D\times 1$ を固定したまま，$D\times 0$ を向きのついた閉曲線 C 上を滑べらして，も



T

との位置にもどした結果できる同相写像を<u>handleのわたり</u>と呼ぶ。図のような閉曲線 a はhandleのわたりによって、閉曲線 b に写される。

Heegaard分解 $M=T_1 \underset{f}{\cup} T_2$ が与えられたとき、handleのひねりとわたりを系1に適用して、簡単なHeegaard分解に手直しすることが可能な場合が少なくない。

Heegaard分解 $M=T_1 \underset{f}{\cup} T_2$ において、T_1, T_2 のmeridian系をそれぞれ $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ とし、$f^{-1}(C_i)=B_i$, $i=1,2,\cdots,n$ とおくと、定理1及び定理2より M の構造は同相性を除いて、$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ により完全に決定される。$T_1=N$ として、$\{N: A_1, A_2, \cdots, A_n; B_1, B_2, \cdots; B_n\}$ を<u>Heegaardのdiagram</u>と呼ぶ。逆にgenus n の閉曲面 N と、互いに交わらない単一閉曲線の系が二つ $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ が与えられ、$N-A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ も $N-B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ も連結であれば、$\{N; A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots; B_n\}$ をHeegaardのdiagramとするHeegaard分解をもつ向きづけ可能な閉3次元多様体が存在する。

$M=T_1 \underset{f}{\cup} T_2$ において、$f(T_2)$ を再び T_2 とおきかえ、$f=\mathrm{id}$. とみなすことができるから、Heegaard diagram

$\{N; A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ の $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ は solid torus T_1 と T_2 の meridian 系と考えて差支えない。N 上に互いに交わらない単一閉曲線 $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ があって、A_i と L_i は1点で交わり（代数的にも幾何的にも） $A_i \cap L_j = \phi$, $i \neq j$, であるとき、$\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ を T_1 の longitude 系と呼ぶ。

N の整係数の1次元 Homology 群は $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, $\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$ に対応する 1-cycle を $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ とすると、$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ を生成元とする自由加群である。$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ に対応する 1-cycle を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とすると、$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ がそれぞれ T_1 と T_2 の meridian 系であることより、$M = T_1 \cup T_2$ の整係数の1次元 Homology 群は T_1 の longitude 系に対する 1-cycle $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ を生成元とし、T_2 の meridian 系に対する 1-cycle を $\{\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0\}$ とする関係によって与えられる加群である。M の Homology 群 $H_1(M)$ においては、$\beta_i = c_{i1}\lambda_1 + c_{i2}\lambda_2 + \cdots + c_{in}\lambda_n$, $i = 1, 2, \cdots, n$, と表わすと、$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ が T_2 の meridian 系であることより、係数 $\{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, の最大公約数は1である。

また $H_1(M)$ は行列

$$\underline{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

によって完全に決定できる。さらに M が Homology-sphere になるため（$H_1(M)=\{0\}$）には、T_1 の longitude 系が T_2 の meridian 系で表わされねばならず、表わしたとき、それ等の係数の最大公約数が1であることより、つぎの定理が成立する。

定理3　M が Homology-sphere になるための必要十分条件は、C の行列式 $|C|$ の値が ± 1 となることである。

1次元 Homology 群の決定は、Heegaard diagram が与えられれば比較的簡単であるが、基本群は一般に可換でなく決定は面倒である。例えば定理3に対応するような Homotopy-sphere に関する定理は見当らない。ただし基本群 $\pi_1(M)$ に関しても、生成元と関係だけは $H_1(M)$ の場合と全く同様である。T_1 の longitude 系に対する道を $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, \hat{\lambda}_n\}$、$T_2$ の meridian 系に対する道を $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \cdots, \hat{\beta}_n\}$ とおくと、つぎの定理が成立つ。

定理4　基本群 $\pi_1(M)$ は $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, \hat{\lambda}_n\}$ を生成元、$\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2=\cdots=\hat{\beta}_n=1$ を関係とする群である。

既に知られているHeegaard分解に関する重要結果として、つぎのようなものがあげられる。

<u>定理5</u>　3次元球面 S^3 の任意の Heegaard 分解 $S^3 = T_1 \cup T_2$ に対し、T_1 の meridian 系と T_2 の meridian 系を適当に選んで、T_2 の meridian 系が T_1 の longitude 系となるようにできる。(Waldhausen)

つぎの定理は自明であるが、良く用いられるのであげておく。

<u>定理6</u>　genus n の Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ において、T_1 の meridian と T_2 の meridian で一点だけで交わる(代数的にも幾何的にも)ものが~~ーつずつ~~存在すれば、genus n-1 の Heegaard 分解が存在する。

この定理はそれぞれの meridian に対応する handle はないものと見なして良いという意味である。これを<u>handle の cancel</u> と呼ぶ。すでに述べた handle のひねり、わたりでは genus は変化しなかったが、handle の cancel ができる場合は、genus が下るのであるから、Heegaard 分解は簡単になったと理解して良い。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ において、同相写像 $F: M \to M'$ が存在し、$F(T_1) = T_1'$, $F(T_2) = T_2'$ を満足するとき、$M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は <u>equivalent</u>

であるという。また定理2の条件をみたす $M = T_1 \cup_f T_2$ と $M' = T_1' \cup_f T_2'$ は <u>equivalent</u> であると言っても同じである。

二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ に対し、さらに三番目の Heegaard 分解 $M'' = T_1'' \cup T_2''$ が存在し、$T_1'' \cup T_2''$ を有限回 handle の cancel をすると $T_1 \cup T_2$ と equivalent となり、同様に $T_1'' \cup T_2''$ において有限回 handle を cancel すると $M_1' \cup M_2'$ と equivalent になるとき、$M = T_1 \cup T_2$ と $M' = T_1' \cup T_2'$ は <u>stably equivalent</u> であるという。つぎの定理は3次元多様体に関する Hauptvermutung に関連している。

<u>定理7</u>　一つの M の二つの Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は stably equivalent である。

cancel 不可能な Heegaard 分解を<u>極小</u>であるという。多少乱暴であるがつぎのような予想もある。これは極小な Heegaard 分解は<u>最小</u>であるだろうという予想である。

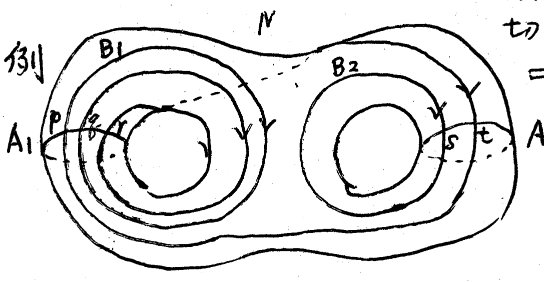
<u>予想</u>　向きづけ可能な閉3次元多様体 M の二つの極小な Heegaard 分解 $M = T_1 \cup T_2$ と $M = T_1' \cup T_2'$ は equivalent であろう！

この予想は S^3 の場合と $S^2 \times S^1$ の場合に肯定的に解決されている。S^3 の場合は定理5を使い。$S^2 \times S^1$ の場合はつぎの Haken の結果を用いる。

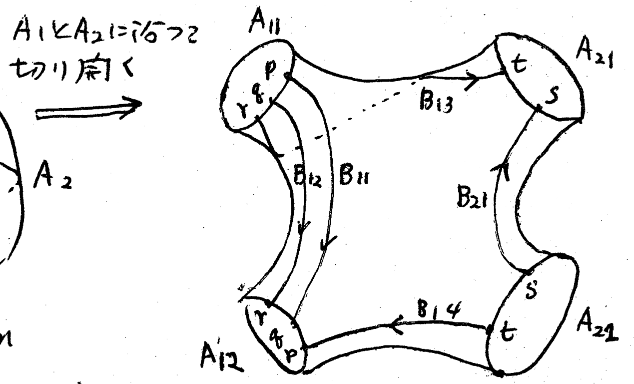
定理8. Heegaard分解 $M=T_1\cup T_2$ があって，M の2次元球面 S^2 で M の3次元球の境界とならないものが存在すれば，さらに M の2次元球面 $\bar{S}^2$ が存在し，$\bar{S}^2$ と $\dot{T}_1(=\dot{T}_2)$ の交わりは $\dot{T}_1$ 上で homotop 0でない単一閉曲線となる。

Heegaard diagram を有向graph を用いて表わす方法があるので，図を画いて説明する。Heegaard diagram $\{N; A_1, A_2, B_1, B_2\}$ において T_2 の meridian B_1 と B_2 に向きを与えておき，meridian系どうしの交点を p, q, r, s, t とする。

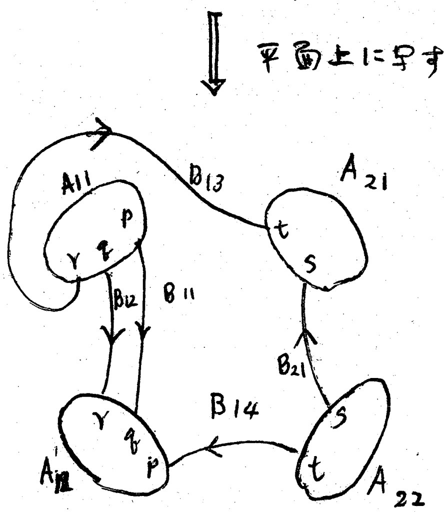
例



Heegaard diagram

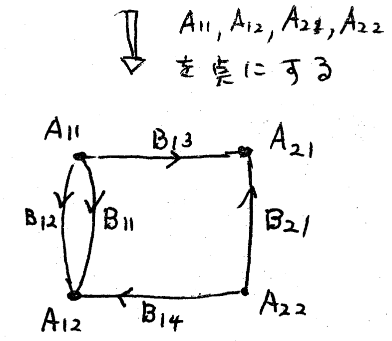


A1とA2に沿って切り開き，穴が四つあいた曲面とし，穴のふちにそれぞれ $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ と名づけておく。B_1 は向きのついた四つの線 $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$ になり，B_2 は向きのついた一つの線 B_{21} となる。$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{21}$ を平面上の図形とみなす。



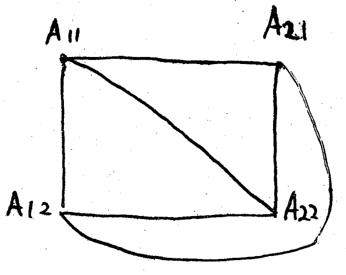
⇓

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を縮めて点とすると，頂点が $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ で，向きのついた辺 $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{21}$ をもつ平面上の有向グラフ $G(M)$ を得る。このように Heegaar diagram $M = T_1 \cup T_2$ が与えられていれば，それから有向グラフ $G(M)$ をつくることができ，逆に $G(M)$ から Heegaard diagram を再現することが可能である。genus n の Heegaard 分解においては，それを表わす平面上の有向グラフは，T_1 の meridian 系に対する $2n$ 個の頂点と，T_2 の meridian 系に対応する，向きのついた辺の集合系 n 個とから構成されている。相当複雑な Heegaard diagram でもこの有向グラフにするとかなり簡単になるので，Heegaard 分解研究の手段として有力である。

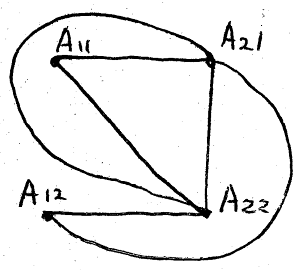


有向 Graph $G(M)$ の例

特に genus 2 の Heegaard 分解の場合は，handle のひねり，わたり等の手法によって単純化することと，有向グラフ $G(M)$ において，向きを無視し同じタイプの辺を一まとめ



G_1



G_2

にして一つの辺と見なすことにより，図のような二種類の無向グラフに reduce される。従って genus 2 の Heegaard 分解をもつ3次元多様体Mの位相的構造は無向グラフ G_1 または G_2 に属する有向グラフの構造によって決定でき，そのような有向グラフ $G(M)$ の構造の研究，分類が必要となる。

文献表

1. W. Haken : Some Results on Surfaces in 3-Manifolds. MAA Studies in Mathematics, Vol. 5.

2. C. D. Papakyriakopoulos ; Some Problems on 3-dim. Manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958).

3. K. Reidemeister ; Zur Dreidimensionalen Topologie ; Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg 9 (1933) P.189～194.

4. H. Seifert und W. Threlfall : Lehrbuch der Topologie ; Teubner, Leibzig, (1934).

5. J. Singer : Three-dimensional Manifolds and their Heegaard-diagrams : Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) P.88～111.

6. J. Stallings ; On Fibering Certain 3-Manifolds and Related Topics. Prentice-Hall. (1962)

7. J. Stallings ; On the Loop Theory : Ann. Math. 72 ((1960) P. 12 ~ 19.

8. F. Waldhausen, Über Involution der 3-Sphäre; Top. Vol. 8, P. 81 ~ 91.

9. F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre ; Topology, 7 (1968) P. 195 ~ 203.