数理解析研究所講究録
第 219 巻 1974 年 103-108

Non-orientable closed manifold の Orientable manifold の中への写像について

関学 M2 崎田広造

証明したいことは，次の定理およびその系である。

[定理] M^nを closed conneted non-orientable PL n-manifold, N^{n+1}を$H_n(N; Z_2)=0$をみたす orientable PL $n+1$-manifold とし，$f: M^n \longrightarrow N^{n+1}$を任意のPL mapとする。また，$N(S_2(f); M)$を singular set $S_2(f)$のM^nにおける regular neighborhood とする。その時 $Cl\{M^n - N(S_2(f); M)\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_r$

但し $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi$ if $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots r$

と書くことができて，各Σ_iは，compact orientable PL manifold with boundary になる。

[系] M^nはN^{n+1}に embed できない。

定理を証明する前に，次の Lemma を証明しておく。

[Lemma] 前述のN^{n+1}に含まれるn次元 solid Klein Bottle $S^1 \times_\tau B^{n-1}$ をT^nとする。また，T^nの境界 ∂T^n $(= S^1 \times_\tau S^{n-2})$ をC^{n-1}とする。このT^nの core，即ち Int B^{n-1}から1点yをとり，$y \times S^1$ を考え，これをkとする。その時，$\mathrm{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \mod 2$ in N^{n+1}

[証明]

kのN^{n+1}における regular neighborhood $N(k; N^{n+1})$ を K とする。N^{n+1}が orientable であるから，明らかにKは $n+1$次元 solid torus である。また，k上の任意の1点xのN^{n+1}における regular neighborhood $N(x; N^{n+1})$ をDとすると，これは，明らかに $n+1$-ball である。故に，xを始点とする1次独立で，どの2つも互いに直交する$n+1$個の vectors，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ が，この $n+1$-ball Dの中でとれて，e_1はk上の vector，$e_1, e_2, \cdots e_n$ はT^nの中で直交するようにできる。そこで，点xより始まって，kを∂K^{n+1}までe^{n+1}方向に動かすことを考える。xより少しe_1方向に動いたk上の点$x+\varepsilon$ において，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ であった vectorは，kに沿って，T^nを一周してくると，$x-\varepsilon$ において，$e_1, -e_2, -e_3, \cdots -e_n\ -e_{n+1}$ となっている。何故ならば，kはS^1と homeomorphic であるから，k上の vector e_1 は一周してきても，やはりe_1である。次に，$e_1, e_2, \cdots e_n$は，non-orientable manifold $T^n = S^1 \times \varepsilon B^{n-1}$ の中の直交する vectors であって，一周してきても，e_1 は変らないから，他の vectors $e_2, e_3, \cdots e_n$ の符号は反対になる。そして，最後に，例えば，$e_1, e_2, \cdots e_{n+1}$ を右手系にとっておくと，N^{n+1} は orientable であるから，k に沿って，T^n を一周しても，e_1 $e_2, \cdots e_{n+1}$ が右手系であることには変りはない。一周すると $e_1, -e_2, -e_3, \cdots, -e_n$ となるから，e_{n+1} も $-e_{n+1}$ となる。そうすれば，$e_1, -e_2, \cdots -e_n, -e_{n+1}$ は始めの右手系と一致する。

故に，D内では，$D \cap T$ が hyperplane となっていて，このn次元 hyperplane $D \cap T$ の両側に k は押し出されたことになる。換言すると，$\mathring{D} \approx R^{n+1}$，$\mathring{D} \cap T \approx R^n$ であって，R^{n+1} のn次元 hyperplane R^n の両側に k は押し出されたことになる。だから，k は $\mathring{D} \cap T$ と少なくとも，奇数個の点で交わることになる。故に，k と T^n との Intersection number は 1 mod 2 となる。$\partial T^n = C^{n-1}$ であるから，k と C^{n-1} との Linking number も 1 mod 2 となる。即ち

$$\mathrm{Link}[C^{n-1}, k] = 1 \bmod 2 \quad \text{in } N^{n+1}$$

Q.E.D.

この場合，T^n は，non-orientable であるから，mod 2 で考えた。そして，C^{n-1} を bound する complex（この場合，T^n）のとり方にも依らないことが必要であるから，

$H_n(N^{n+1};Z_2)=0$ が必要であった。だから，証明では，t_0 を動かしたが，逆に，t_0 を固定して，T^n を動かすと考えてもよい。

［定理の証明］

M^n の三角形分割を K とする。

ある i に対して，もし Σ_i が non-orientable と仮定すると次のような n 次元 solid Klein Bottle T^n が Σ_i の中に存在する。すなわち，Σ_i の中には，次の条件(1)(2)を満たす n-simplex の有限列 $s=s_1, s_2, \cdots s_m, s_{m+1}=s$ が必ず存在する．

(1) $1 \leqq i \leqq m-1$ なる i に対して，s_i と s_{i+1} は共通の $(n-1)$-face Δ_i^{n-1} をもち，且つ同調している。

(2) s_m と s_{m+1} は共通の $(n-1)$-face Δ_m^{n-1} をもつが，同調はしていない。

このような n-simplex の有限列は M^n の分割にかかわらず必ず存在する。$T^n=s_1 \cup s_2 \cup \cdots \cup s_m$ とすると，作り方より，T^n は non-orientable compact connected PL n-manifold であって，$T^n=S^1 \times_\tau B^{n-1}$ となる。

$cl[M^n-T^n]=A^n$ とおくと，$\partial T^n=\partial A^n$ となり，これを C^{n-1} とおく。明らかに，$C^{n-1}=\partial T^n=S^1\times_\tau S^{n-2}$ であって

closed connected non-orientable PL $(n-1)$-manifold である。

T'をT^nのfirst derived subdivision とする。$\overset{*}{\Delta}{}^n_i$, $\overset{*}{\Delta}{}^{n-1}_i$ $(i=1,2,\cdots m)$ をそれぞれ, Δ^n_i, Δ^{n-1}_i の重心とする。$\overset{*}{\Delta}_i$ と $\overset{*}{\Delta}_i$ を結ぶT'の1-simplex を P_i とする。$\overset{*}{\Delta}_i$ と $\overset{*}{\Delta}_{i+1}$ を結ぶT'の1-simplex を q_i とする。$k=(P_1\cup q_1)\cup(P_2\cup q_2)\cup\cdots\cup(P_m\cup q_m)$ とおくと, 明らかに, k は $S^1\times(\mathrm{Int}\,B^n$の1点) に$T^n$の中で isotopic である。今 $f: M^n\to N^{n+1}$ を任意のPL map とすると, Z_i の作り方より, (° は内部)

$f(\mathring{T})\cap f(\mathring{A})=\phi$ であり, また singular set $S_2(f|Z_i)=\phi$ であるから, $f|Z_i$ は embedding である 故に, $f|T$ も embedding となる。以上のことより $f(C^{n-1})$ は $N^{n+1}-f(\mathring{T})$ で $f(A^n)$ を bound するから

$\boxed{1}$ $f(C^{n-1})\sim 0 \mod 2$ in $N^{n+1}-f(k)$

('$\sim$' means "homologous")

一方, Lemma より

$\mathrm{Link}[f(C^{n-1}), f(k)]=1 \mod 2$ in N^{n+1}

$\boxed{2}$ $\therefore f(C^{n-1})\nsim 0 \mod 2$ in $N^{n+1}-f(k)$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ より矛盾が出る。

故に, Z_i $(i=1,2,\cdots r)$ は orientable manifold である。

Q.E.D.

［系の証明］

もし，M^n が N^{n+1} に embed できたとすると，$S_2(f) = \phi$．よって，$M^n = \Sigma_1$ となり，矛盾である。何故ならば，M^n は non-orientable であり，また，定理より，Σ_1 は orientable となるから。 Q.E.D.

応用例

(1) 2次元 non-orientable manifold P_n は homology sphere の中に embed できない。

(2) 2次元 non-orientable manifold P_n は Lens space $\mathcal{L}(2m+1, g)$ の中に embed できない。

∵ $H_1(\mathcal{L}) = Z_{2m+1}$，$H_2(\mathcal{L}) = 0$ であるから，universal coefficient theorem によって

$$H_2(\mathcal{L}; Z_2) = 0 \otimes Z_2 + Z_{2m+1} * Z_2 = 0$$