数理解析研究所講究録
第219巻 1974年 109-126

Knot のある不変性

日大 農獣医　徳田広太郎

knot の結び量の定理は与えられた tame knot $K=(R^3, S^1)$ に対して結び量という実数 $Q(K)$ を定義し、$Q(K)$ は K の同位変形によって不変であることを示す[2)]。この定理の逆は成立たない。適当な条件を与えて、この定理の逆から knot の不変性が見つからないであろうか。この論文はこの問題に対する1つの解答を与えるものである。

§1. 結び量の定理

1.1 knot の graph[1)]

1つの tame knot $K=(R^3, S^1)$ と R^3 の中の1つの平面 π が与えられると、π の上の regular diagram (R.D. と略して書く) が定まる。この R.D. は knot と見なすことができ

る。n個の交点をもつ R.D. はπを $n+2$ 個の領域に分ける。これらの領域の中で弧を境界の一部として共有する２つの領域は異なるものとすれば、すべての領域は２種類に分けることができる。この中で無限遠点 P_∞ の属する方をWとし、他をBとする。BとWの何れの場合にも次の graph を定義する。Wの場合と同様であるからBの場合だけについて説明する。

Bの領域 R_i の内部に頂点という１点 A_i を定め、$A_i \in R_i$，$A_j \in R_j$ なる $\overline{R_i}$，$\overline{R_j}$ が交点 C_k を共有し、R_i から見て C_k の下の辺が右にあれば弧 $A_iC_kA_j$ に＋，左にあれば－の符号をつける。そうすると R_j から見ても同じ符号がつく。こうしてできたすべての頂点と弧からなる図形を K の graph といい，$g(K)$ と表わす。同様に W における K の graph を $g'(K)$ と表わす。$g(K)$ と $g'(K)$ を K の dual graph という。

K と π が与えられると、$g(K)$ と $g'(K)$ はそれぞれ一意に定まり、$g(K)$ または $g'(K)$ が与えられると K は一意に復元できる。

1.2 knot の結び量 [2)]

n個の頂点をもつ graph $g(K)$ が与えられると、次のよ

うにして行列 $A(K)=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots,n$, を作る。
A_i を $g(K)$ の1つの頂点とする。$i \neq j$ ならば A_i と A_j を結ぶすべての弧に対して

$$a_{ij} = (+\text{の弧の数}) - (-\text{の弧の数}),$$

A_i を端点にもつすべての弧に対して

$$a_{ii} = -\{(+\text{の弧の数}) - (-\text{の弧の数})\}$$

とする。そうすれば $A(K)$ は n 次の対称行列になる。
$A(K)$ から任意の1行1列を除いた行列式の絶対値を $Q(K)$ と表わす。Alexander Briggs[3] の表の 4_1 knot では

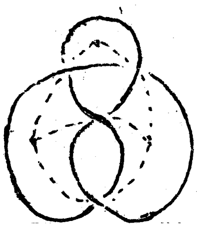
$g(K)=$ 
$$A(K)=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad Q(K)=5.$$

図1. Knot の結び量

$Q(K)$ は次の性質をもつ.

(1.1). (結び量の定理). K_1 と K_2 が同型であることを $K_1 \cong K_2$ と表わせば

$$K_1 \cong K_2 \text{ ならば } Q(K_1) = Q(K_2).$$

(1.2). (1.1) の系 $g(K)$ と $g'(K)$ を K の dual graph とすれば

$$Q(g(K)) = Q(g'(K)).$$

(1.3) K_0 を trivial knot とすれば

$$Q(K_0) = 1.$$

$Q(K)$ を K の結び量 (knotting quantity) と定義する。$Q(K)$ は $g(K)$ の交点数の概念によつて定義されている。

§2. Knot の基本変形

knot の同位変形を R.D. で見れば、交点以外の所では同位変形であるが、交点では singularity が起る。これらの singularity は図2で示す3種類の変形によつて表わされる。この変形を初等基本変形 (elementary fundamental operation) といい、簡単に E.F.O. と表わす。従つて knot の同位変形は R.D. では同位変形と E.F.O. の有限回の組合せによつて表わすことができる。この変形を基本変形 (fundamental operation) といい、F.O. と表わす。

knot K の E.F.O. を K の graph とそれの dual graph で表わすと図2になる。図中 O_1, O_1' 等はそれぞれ図に示した E.F.O. を表わし、—— , —(−)— は辺の符号がそれぞれ +, − であることを示す。

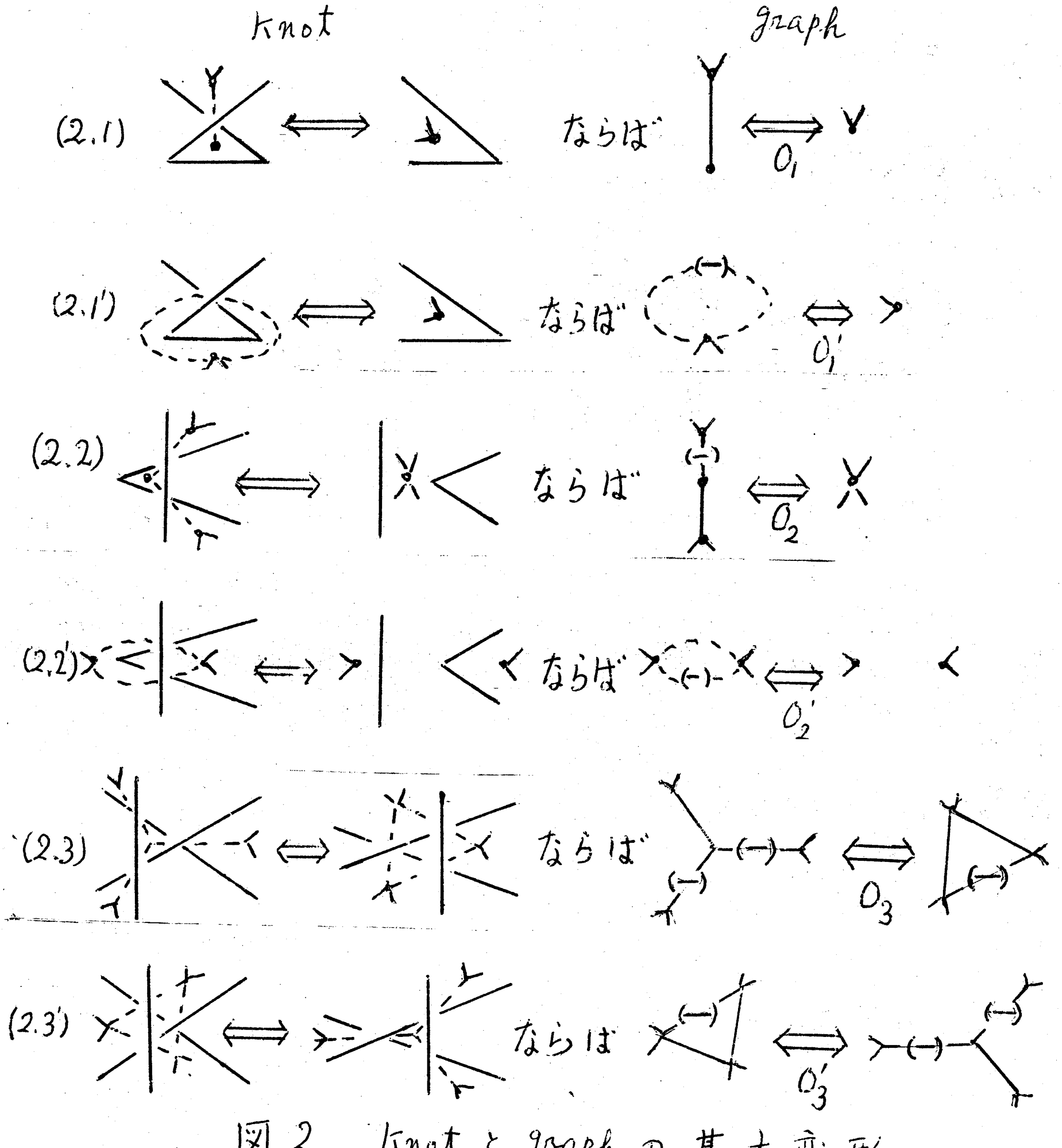


図2. knot と graph の基本変形

図3はこの論文でよく使う図2の E.F.O. から誘導される変形を示す（次の図の記号は P.1.1 参照）。

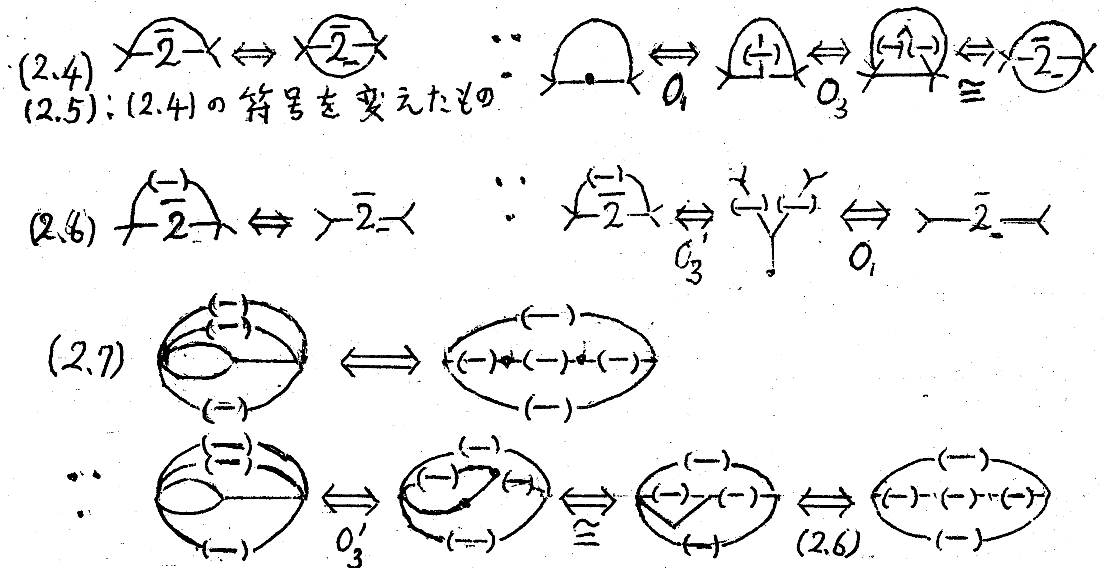


図3. 基本変形の応用

§3 Knot の結び量の定理の逆に関する問題

問題 1. （結び量の定理の逆）. $Q(K_1)=Q(K_2)$ ならば $K_1\cong K_2$ か.

この問題は成立たない。何故ならば $Q(4_1)=Q(5_1)$ であるが $4_1\neq 5_1$ である。

問題 2. $K_1 \cong K_2$ ならば $A(K_1) = A(K_2)$ か。

この問題も成立たない。何故ならば $g(3_1) \cong g'(3_1)$ であるが $A(g(3_1)) \neq A(g'(3_1))$ である。

定義. knot K の graph $g(K)$ において、2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ弧を l，l に隣合う graph の一部からなる Block を B とする。A_i と A_j を固定して l の内部を B だけを越すことを $C(l \# B)$ と表わし、$l \# B = g(K)$ のときは $C(l, g(K))$ と表わす。

定理 1. $A(K)$ に次の変形を行つても、$A(K)$ は変らない。

(a) $C(l \# B)$

(b) $g(K)$ の2つの頂点 A_i と A_j を結ぶ異符号の2辺の組を加えたり、または除く。

証明. (a) a_{ij}，$i \neq j$，は定義によつて A_i と A_j を結ぶ向きをもつ辺の数によつて定まり、辺の位置には関係しないから $C(l \# B)$ によつて a_{ij} は変らない。a_{ii} は a_{ij}，$i \neq j$，によつて一意に定まる。故に (a) は成立つ。

(b) A_i と A_j を結ぶ隣合う異符号の2辺は消える。従ってこのような辺の組を加えたり，除いたりしても a_{ij} に変化は起らない。また (a) によって両端を固定して辺の内部を任意の位置に移しても $A(K)$ に変りはない。故に(b)も成立つ。

問題 3. $A(K_1) = A(K_2)$ ならば $K_1 \cong K_2$ か。

$A(K)$ は K の R.D. によって π を分割してできたある領域を1点につぶしてできた graph によって定義されているから homotopic な概念であり，K の knot type は K の ambient isotopic (同型) な概念である。従って一般にはこの2つの概念の同値は一致しない。併し Alexander－Briggs の表[3]に表わされたすべての knot については問3は成立つ。それではどんな knot ならば問題 3は成立つか。

この問題に対する1つの解答が次の主定理である。

§4 主定理

定理 2. graph $g(K)$ において，l を $g(K)$ の2つの

頂点 A_i，A_j を結ぶ弧，B を ℓ に隣合う graph の一部から構成された Block とし，m を A_i と A_j を通る直線とする。

1. B は m に関して対称に同位変形ができる，
2. $g(K)$ に対して，次の A.O. が存在する；
   a) $f|g(K)-B$ は恒等変形，
   b) $f(\ell\#B)$ は m に関して対称になる同位変形，

とすれば

$$g(K)\cong C(\ell, g(K)).$$

証明．f_i は $g(K)$ の E.A.O. であって，$f=f_m f_{m-1}\cdots f_2 f_1$

$B_i=f_i(B_{i-1})$，$i=1,2,\cdots,m$，$B_0=B$．

S_i は B_i の m に関する対称変形で，$B_i'=S_i(B_i)$．

$f_i'=S_{i-1}f_i^{-1}S_i^{-1}$ であって $f'=f_1'f_2'\cdots f_{m-1}'f_m'$

とすれば次の diagram ができる。

$$\begin{tikzcd}
\ell\#B_0 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "S_0"] & \ell\#B_1 \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "S_1"] & \ell\#B_{i-1} \arrow[r, "f_i"'] \arrow[d, "S_{i-1}"] & \ell\#B_i \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, "S_i"] & \ell\#B_{m-1} \arrow[r, "f_m"'] \arrow[d, "S_{m-1}"] & \ell\#B_m \arrow[d, "S_m"] \\
\ell'\#B_0' & \ell'\#B_1' \arrow[l, "f_1'"'] \arrow[r, dashed, no head] & \ell'\#B_{i-1}' & \ell'\#B_i' \arrow[l, "f_i'"'] \arrow[r, dashed, no head] & \ell'\#B_{m-1}' & \ell'\#B_m' \arrow[l, "f_m'"']
\end{tikzcd}$$

図 4．$C(\ell\#B)$ の diagram

$$f' = \prod_{i=m}^{1} f_i' = \prod_{i=m}^{1} \left(S_{i-1} f_i^{-1} S_i^{-1} \right) = S_0 f^{-1} S_m^{-1}$$

であって、S_0 と S_m は graph の恒等変形であって、f は同位変形であるから、f'もまた同位変形になる。一方

$$C(l, g(K)) = f' S_m f$$

であるから $C(l, g(K))$ は同位変形である。

系．定理2は A_i, A_j を結ぶ弧 l を A_i, A_j を両端点とする mに平行な直線に対称な Block としても成立つ。

§5. 主定理の応用

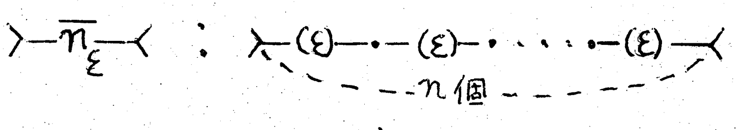
$g(K)$ において無限遠点 P_∞ は任意の領域の内部にあるようにできるから $C(l \# B)$ を行うとき、l は P_∞ を含む領域 $\overline{R}_\infty$ の境界の上にあるとしても一般性を失わない。

また l が $\overline{R}_\infty$ の境界上にあるとき、P_∞ を他の領域に移せば、$C(l \# B)$ の $B=\phi$ のときと考えられるから次の5.1 が成立つ。

5.1　$g(K)$ の R_∞ の境界上の弧 l に対しては恒に

$$g(K) \cong C(l, g(K)).$$

今後よく使う記号を説明する。



$\varepsilon = \pm$ であって $+$ は省く.

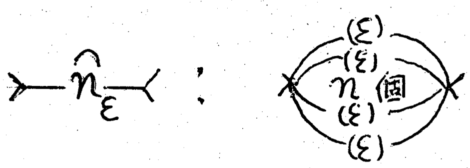


図5. 記号の説明

次に定理2の仮定を満足する幾つかの B を示す。

定理 3.

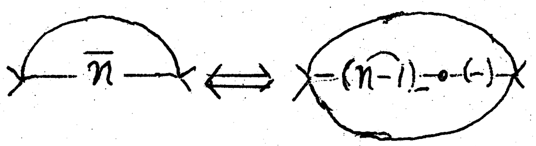
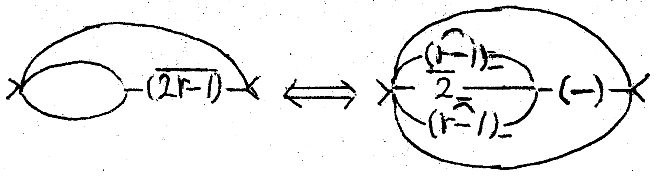


図6　定理 3

定理 4.

(4.1)



(4.2)

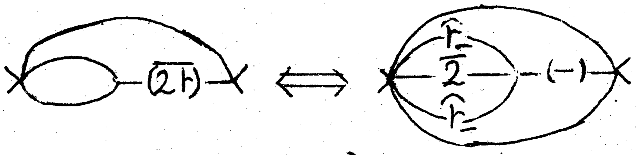
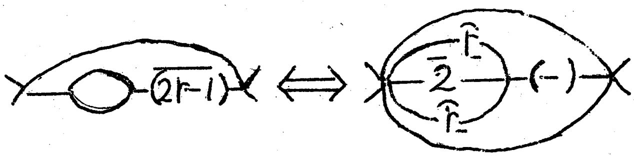
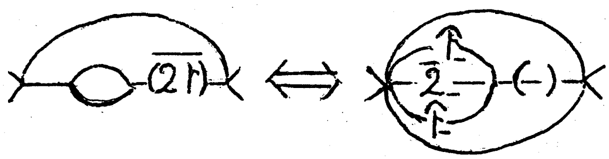


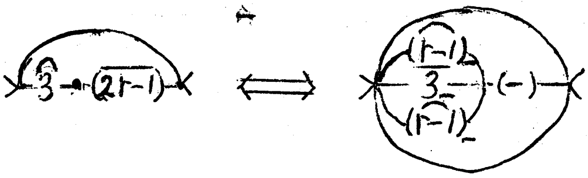
図7　定理 4

定理 5.

(5.1) 

(5.2) 

定理 6.

(6.1) 

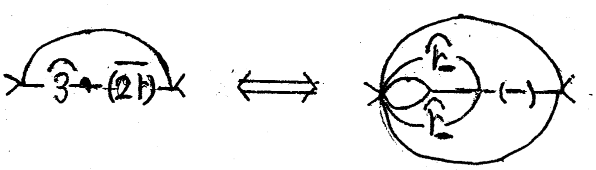
(6.2) 

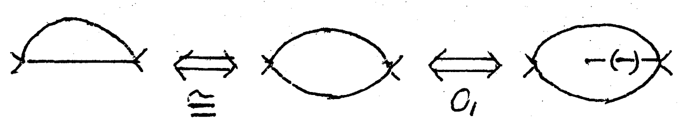
図 9. 定理 6

定理の証明.

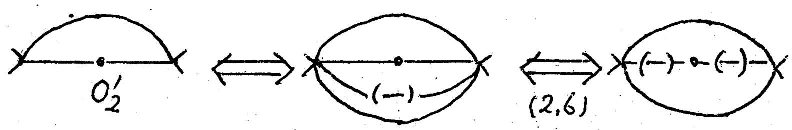
上にならべた定理3, 4, 5, 6の証明をする。

定理 3 の証明.

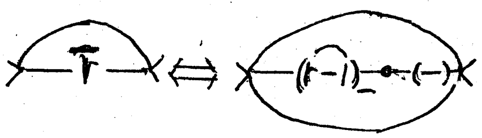
$n=1$ のとき



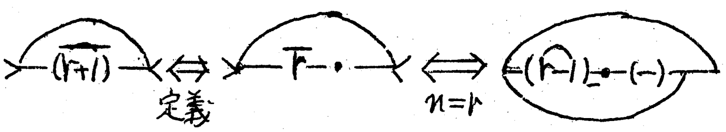
$n=2$ のとき



$n=r$ のとき



を仮定すれば $n=r+1$ のとき



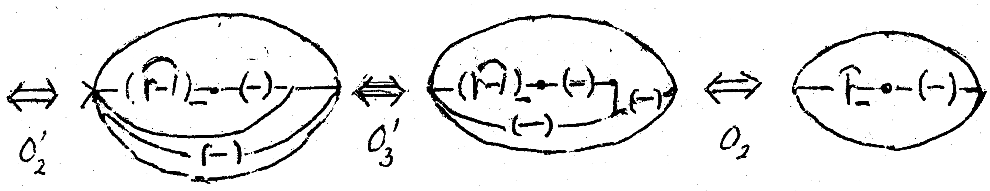
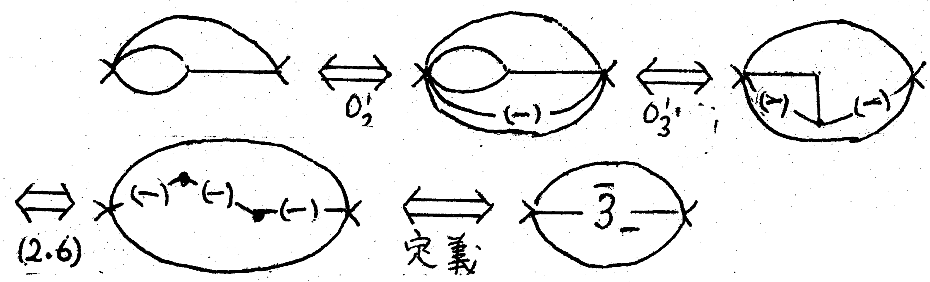


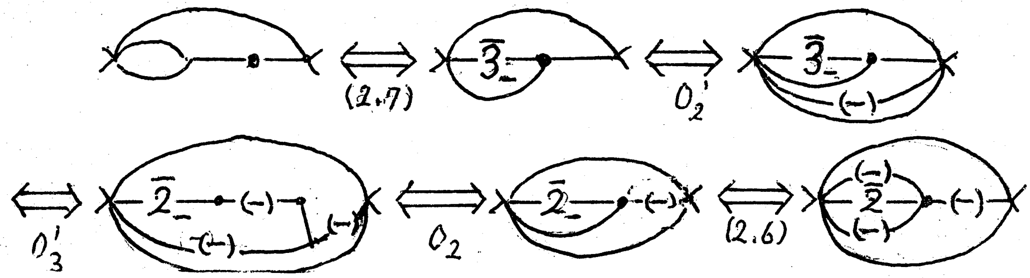
図 10 定理 3 の証明

定理4の証明.

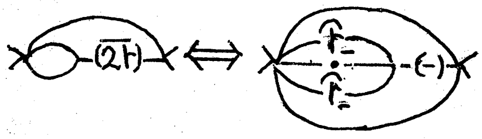
$n=1$ のとき



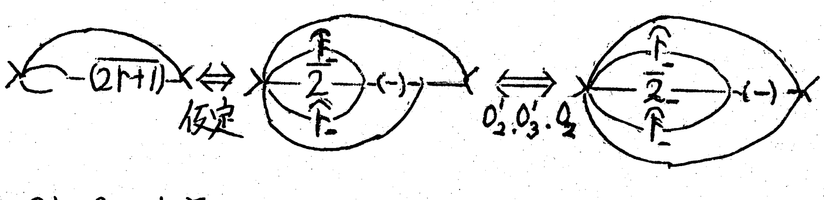
$n=2$ のとき



$n=2r$ のとき



を仮定すれば $n=2r+1$ のとき



$n=2r+2$ のとき

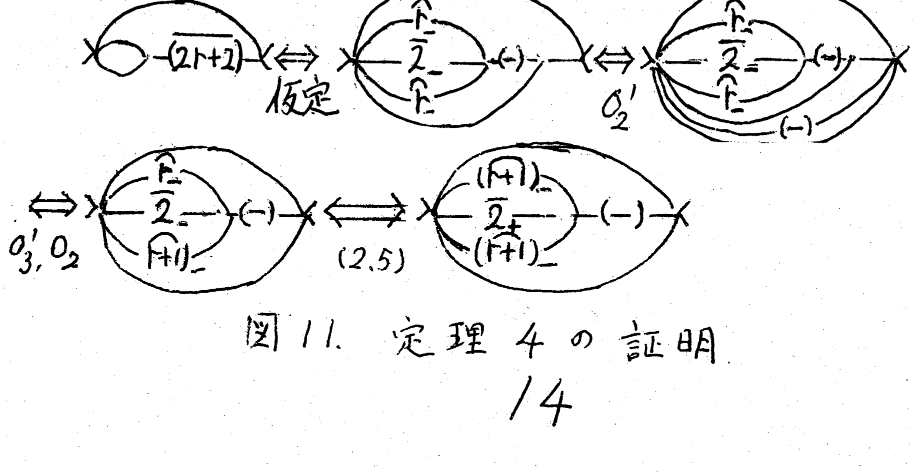
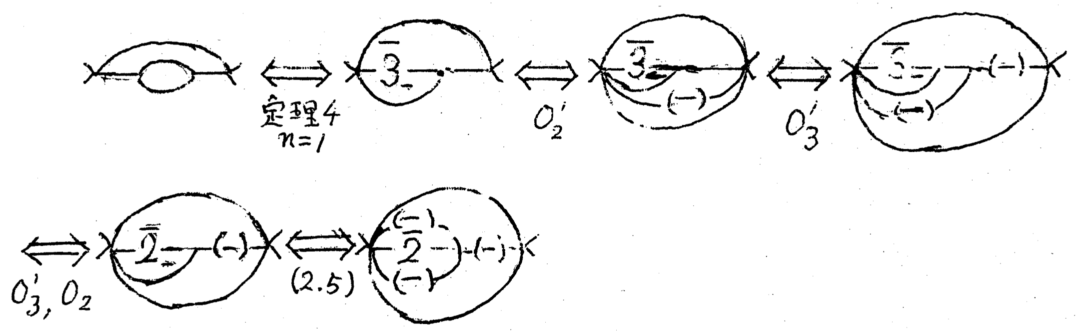


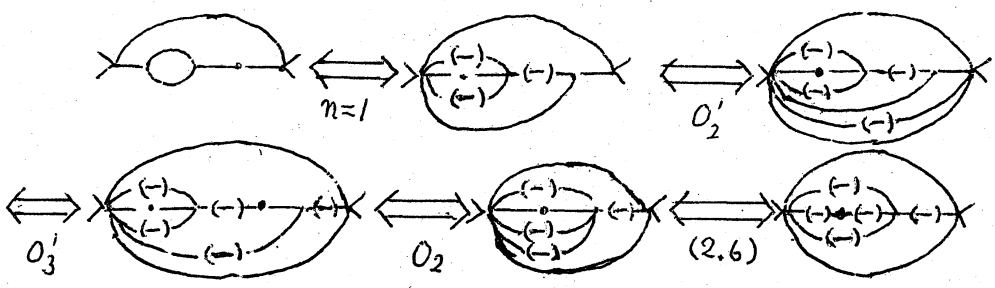
図11. 定理4の証明

定理5の証明。

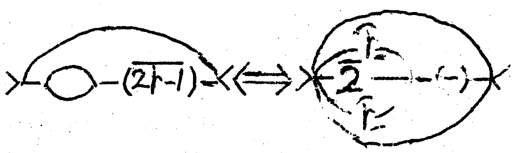
$n=1$ のとき



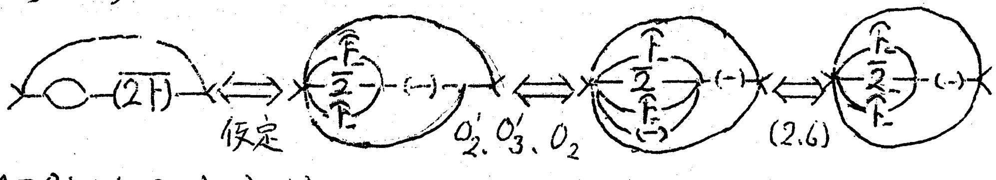
$n=2$ のとき



$n=2r-1$ のとき



を仮定すれば $n=2r$ のとき



$n=2r+1$ のときは

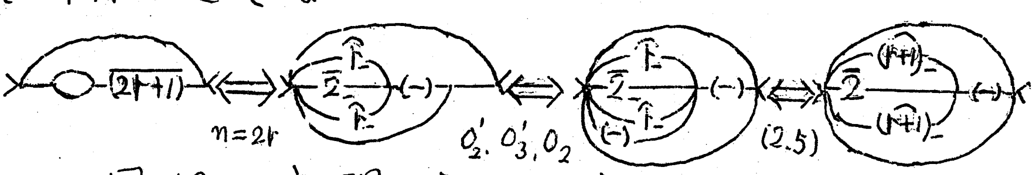
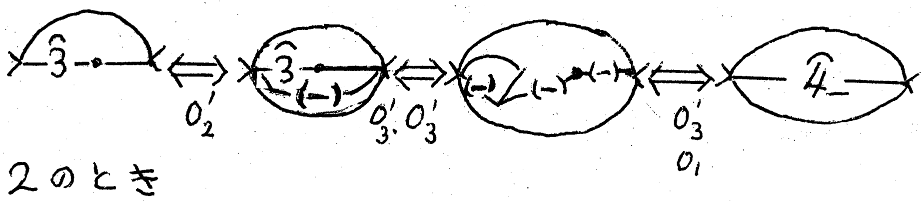


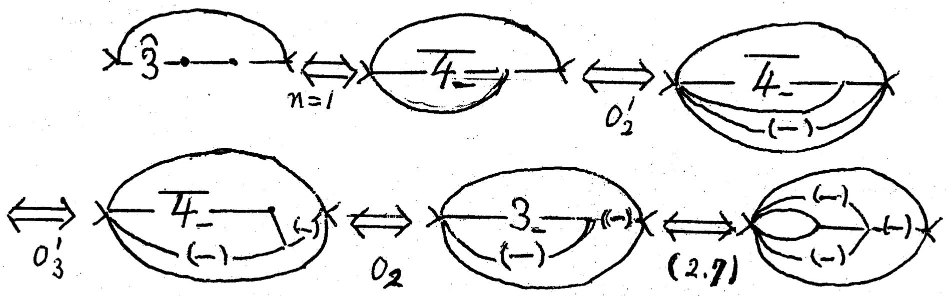
図12 定理5の証明

定理6の証明。

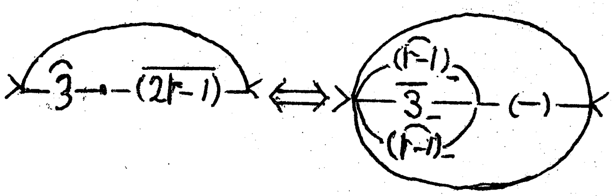
$n=1$ のとき



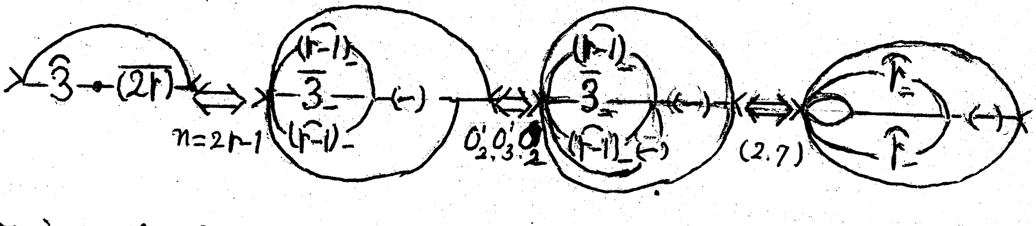
$n=2$ のとき



$n=2r-1$ のとき



を仮定して $n=2r$ のとき



さらに $n=2r+1$ のとき

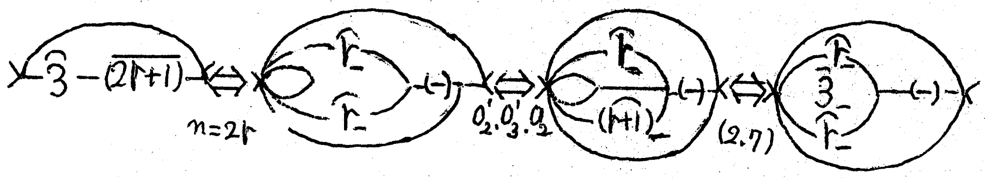
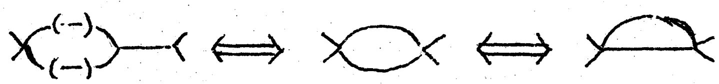


図13 定理6の証明

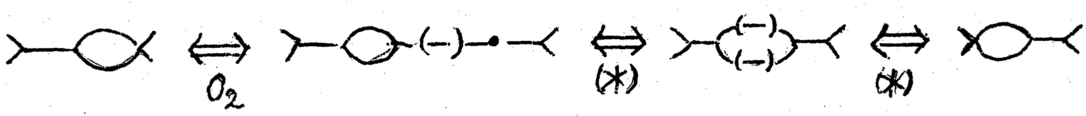
この論文は 4) (P.11) の定理3を拡張したものである。(5.1) と定理 3, 4, 5, 6 を組合せると 3) にある Alexander—Briggs の表に示された knot の範囲内では問題3は成立つ。

追加

寺阪英孝先生は定理5は定理4から次のようにして得られることを注意された。先生の何時もの御厚情に感謝します。

(*)  (定理8のために)

を使うと Block の左辺の弧を右辺に移すことができる。



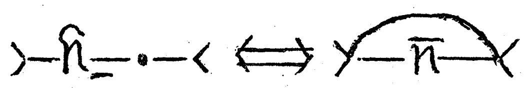
定理2の証明と同様にして次の定理が成立つ。

定理 7. 定理2の記号を使って、 $>B\overset{\ell}{—}<$ が基本変形によって左右線対称の graph に変形できるならば

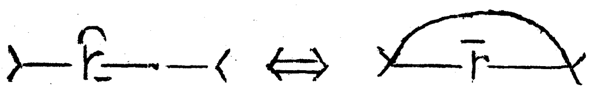
$$>B\,—\!< \;\Longleftrightarrow\; >\!—\,B<$$

が成立つ。

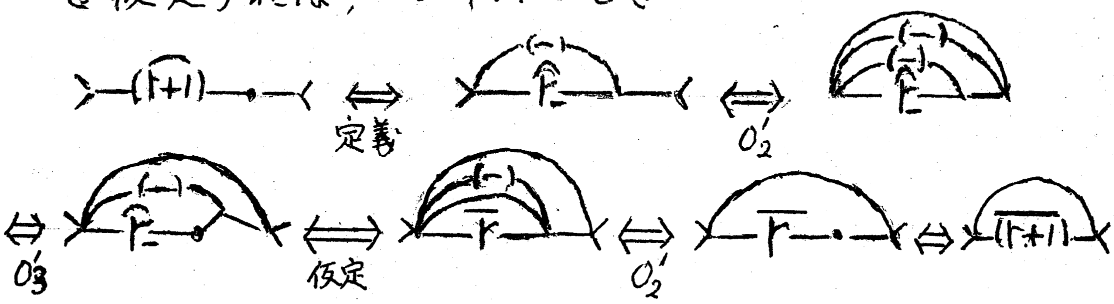
定理7の具体的な場合として次の定理が成立つ。

定理 8 

証明　n＝2のときはP.17の(*)である。
n＝rのとき



を仮定すれば，n＝r+1のとき



References

1) T. Yajima and S. Kinoshita: On the Graphs of Knots, Osaka Math. J., 1957.

2) 寺阪英孝：初等幾何学，第2版，岩波書店，1973．

3) K. Reidemeister: Knoten Theorie, Chelsea. 1948.

4) H. Tokuda: On the Congruence of Graphs of Knots, General Education Review, Colledge of Agr. and Vet. Med. Nihon Univ. Vol. 9. 1973.