数理解析研究所講究録
第 220 巻 1974 年 1-20

負曲率空間について

東工大 理 市田 良輔

§1. 序

Mを $n(\geqq 2)$ 次元連結, 完備な C^∞ 級リーマン多様体で, 断面曲率が至る所非正だとする。その時, 次の事実が知られている。

<u>定理</u> Mの各点 p に対し, 指数写像 $\exp_p: T_pM \to M$ は被覆写像である。Mが単連結なら, Mは R^n と微分同相である。

この事実から次の事を導くことが出来る。

<u>系</u> $\pi_i(M)=0 \quad (i \geqq 2)$

従って, 断面曲率が非正であるリーマン多様体のホモトピー型は基本群 $\pi_1(M)$ によって完全に決定される。そこで, 基本群 $\pi_1(M)$ がMの微分幾何学的構造にどの様な影響を与えるかを知る事は興味あることであろう。次の事が知られている。

定理[3,8] Mを連結, コンパクトなリーマン多様体で, 断面曲率が至る所負だとする。その時, $\pi_1(M)$ の任意の可解

部分群は無限巡回群である。

この定理から，まず，Mの断面曲率が非正である時，$\pi_1(M)$又は，その部分群の可換性がMに何らかの幾何学的な性質を提供しないだろうか，という問題が考えられる。Lawson とYauは，この様な立場から，コンパクトで断面曲率が非正であるリーマン多様体について研究し，興味ある結果を得た。ここでの目的は彼らの得た主な結果を紹介することである。

§2. 基本補題

この節において，Lawson と Yau の定理を証明する為に必要な基本的な補題を述べる。

$\tilde{M}$は常に単連結，完備なリーマン多様体で断面曲率が至る所非正（以下，$K \leqq 0$で示す）であるとする。$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\tilde{M}$上の計量，∇ は Riemannian接続，Rは曲率テンソル，d は$\tilde{M}$の距離関数とする。特に断らない限り$\tilde{M}$の測地線は全て$\mathbb{R}$上で定義されていて，弧長をパラメーターに持つとする。

$\tilde{M}$上の連続関数fが凸であるとは，$\tilde{M}$の任意の測地線σに対し，$f \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が凸の時をいう。

$\tilde{M}$の部分集合C $(\neq \phi)$が凸集合であるとは，Cの任意の2点を結ぶ$\tilde{M}$の測地線分（唯一つ存在する）がCに含まれる時をいう。

補題1[2]　fを$\tilde{M}$上の凸関数とする。その時，$\tilde{M}^c=\{p\in\tilde{M},\ f(p)\leqq c\}$は凸集合である。

補題2[4]　Cを$\tilde{M}$の凸集合とする。その時，$\mathrm{Int}\,C$は$\tilde{M}$のある次元の全測地的部分多様体である。

補題3[2]　Aを$\tilde{M}$の不動点をもたない等長写像とする。その時，$f_A(p)=d^2(p,A(p))$, $p\in\tilde{M}$, はC^∞で凸である．点pがf_Aの臨界点である事と，Aがpと$A(p)$を通る測地線を不変にする事とは同値である。

証明). $p\in\tilde{M}$を固定する．pにおける接ベクトル$y\,(\neq 0)$を初速度にもつ測地線を$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\tilde{M}$, $\gamma(0)=p$, とする。$\gamma(t)$と$A\circ\gamma(t)$と結ぶ最短測地線分を$\sigma_t:[0,1]\to\tilde{M}$, $\sigma_t(0)=\gamma(t)$, $\sigma_t(1)=A\circ\gamma(t)$, とすれば，$f_A(\gamma(t))=L^2(t)=(\sigma_t\text{の長さ})^2$である．$\tilde{M}$においては2点間を結ぶ測地線分は唯一つ存在するから，f_AはC^∞である事が分る。今，C^∞-map $\Upsilon:[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to\tilde{M}$を$\Upsilon(s,t)=\sigma_t(s)$で定義し，$X=\partial\Upsilon/\partial s$, $Y=\partial\Upsilon/\partial t$と置けば，次の式を得る。

(1)　$L^{2\prime}(0)=2\,[\langle A_*y,\sigma_0'(1)\rangle-\langle y,\sigma_0'(0)\rangle]$

(2)　$L^{2\prime\prime}(0)=2\int_0^1[\|\nabla_X Y\|^2-\langle R(X,Y)Y,X\rangle]\,ds\geqq 0$

f_Aが凸である事は(2)から分り，次の主張も(1)から結論される。

注意：　C^∞関数fが凸であるとは，任意の測地線σに対し

$f''\circ\sigma(t) \geqq 0$ の時をいう。その時，p が f の臨界点なら p は f の最小値を与える点である。

<u>補題4</u> [2] S を $\tilde{M}$ の閉測地的部分多様体とする。その時 $d^2(p, S)$, $p \in \tilde{M}$, は C^∞-凸関数である。

証明) $\tilde{M} \setminus S$ の各点 p から S への最短測地線分を $\sigma : [0,1] \to \tilde{M}$, $\sigma(0)=p$, $\sigma'(1) \in \perp S$ (Sの法バンドル), とする。S が全測地的であるから最短測地線は唯一つ存在する。$d^2(p, S) = \|-\sigma'(1)\|^2 = (\sigma\text{の長さ})^2$ であるから C^∞である。今 p における接ベクトルを $Y (\neq 0)$ とし，Y を初速度にもつ測地線を $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \to \tilde{M}$, $\gamma(0)=p$ とする。σ_t を $\gamma(t)$ から S への最短測地線とする。$L(t) := \sigma_t$ の長さ，とする。その時，S が全測地的である事に注意すれば，$L^{2''}(t) \geqq 0$ が分る，従って，$d^2(p, S)$, $p \in \tilde{M}$, は凸である。

<u>補題5</u> [2] C を $\tilde{M}$ の閉凸集合とする。$\tilde{M} \setminus C$ の異なる2点 P_1, P_2 から C への最短測地線を σ_1, σ_2 とする。その時，

$d(p_1, p_2) \geqq d(\sigma_1(1), \sigma_2(1))$ である。$\sigma_i : [0, 1] \to \tilde{M}$, $\sigma_i(0) = p_i$。

証明) P_i から C への最短測地線は唯一つ存在することを注意する。$L(t) = d(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ とおく。C が凸であるから，$\sigma_1(1)$ と $\sigma_2(1)$ を結ぶ測地線分は C に含まれることと，σ_i が最短線である事から，$L^{2'}(1) \leqq 0$ が分る。又 $L^{2''}(t) \geqq 0$ である。この事から主張がいえる。($L(t)$ は減少関数である)

γ_1, γ_2 を $\tilde{M}$ の測地線とする。$t \to d(\gamma_1(t), \gamma_2(\mathbb{R}))$，又は

$t \to d(\gamma_2(t), \gamma_1(\mathbb{R}))$ が有界である時, γ_1 と γ_2 は same type であるといい $\gamma_1 \sim \gamma_2$ と書く。補題4から上の関数は凸関数である事が分る。$\mathcal{G}$を$\tilde{M}$の測地線の集合とする時, $\sim$は$\mathcal{G}$において同値関係であることが示される。

<u>補題6</u>　σとρを$\tilde{M}$の same type な異なる測地線とする。その時, σとρを境界にもつ等長的, 全測地的に埋めこまれた平坦な曲面が存在する。

証明）σとρは交点をもたない。$d(\sigma(t), \rho(\mathbb{R})) = d(\rho(s), \sigma(\mathbb{R}))$ $=$一定 である事を示すことが出来る。それで, $\sigma(t)$から$\rho(\mathbb{R})$への最短測地線を $\gamma_t : [0, 1] \to \tilde{M}$ とすれば, $\langle \gamma_t'(0), \sigma'(t) \rangle = 0$, $\gamma_t'(1) \in \perp \rho(\mathbb{R})$ が分る。又 $\sigma(\mathbb{R})$, $\rho(\mathbb{R})$ は凸集合であるから, $t_0 < t_1$ に対し, $d(\gamma_{t_0}(u), \gamma_{t_1}(u)) = t_1 - t_0$ である事が補題5の証明から分る。今 $\gamma_0(1) = \rho(0)$ となる様にρのパラメーターを取り変える。その時, C^∞-map $\Gamma : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \tilde{M}$ を $\Gamma(t, u) = \gamma_t(u)$ で定義すれば, Γは埋めこみである。$\partial\Gamma/\partial u = X$, $\partial\Gamma/\partial t = Y$ とおく。Yは各γ_tに沿うヤコビ場で両端でγ_tに直交しているから $\langle X, Y \rangle = 0$。更に $\|Y\| \leq 1$ である。それ故, $t_0 < t_1$ に対し, 曲線 $\Gamma(t, u)$, u:固定, $t_0 \leq t \leq t_1$, の長さは $(t_1 - t_0)$ より大きくない。$d(\gamma_{t_0}(u), \gamma_{t_1}(u)) = t_1 - t_0$ であったから, $\Gamma(t, \cdot)$ は測地線である。以上の事から, Γによって定義された曲面は, 全測地的である事が分る。又 Gauss-Bonnet の公式からその

曲面は平坦である。

<u>注意</u>: 補題6において$\tilde{M}$が実解析であるとしよう。$t>0$に対し，γ_{-t}とγ_tを両側に延長した測地線を又γ_{-t}, γ_tと書く。実解析性から$\gamma_{-t}\sim\gamma_t$である。従ってγ_{-t}とγ_tを境界にもつ等長的に埋めこまれた平坦な全測地的曲面Σ_tが存在する。$\Sigma_t\supset\gamma_0$で，$0<t_1<t_2$に対し$\Sigma_{t_1}\subset\Sigma_{t_2}$である。それ故，$\Sigma=\bigcup_{t\in\mathbb{R}^+}\Sigma_t$は等長的に埋めこまれた完備，平坦な全測地的曲面である。

<u>補題7</u> $\tilde{M}$を実解析的とする。γを$\tilde{M}$の測地線とする。その時，$C_\gamma=\bigcup\{\gamma'\in\mathcal{G};\gamma'\sim\gamma\}$は$\tilde{M}$の完備な全測地的部分多様体である。

証明）p, qをC_γの任意の2点とする。p, qを通るγとsame typeな測地線を夫々σ, ρとする。その時，$\sigma\sim\rho$である。従って，補題6と上の注意から，等長的に埋めこまれた完備，平坦な全測地的曲面が存在し，pとqを通る測地線を含む。それ故，その測地線はC_γに含まれる。よってC_γは凸集合である。補題2から，C_γは全測地的部分多様体である。完備である事は上の注意から分る。

Mを連結，コンパクトなC^∞-級リーマン多様体で$K\leqq 0$とする。$\tilde{M}$をMの普遍被覆空間とする。$\tilde{M}$には，被覆写像$\pi:\tilde{M}\to M$が局所的等長である様にリーマン計量が導入出来，

$\tilde{M}$は完備で$K\leqq 0$になる。$\Gamma\cong\pi_1(M,p_0)$を$\tilde{M}$のdeck変換とする。$\pi_1(M,p_0)\ni a$に対応するdeck変換をAと書く。$a\neq e$ならaの代表元としてgeodesic loopを選ぶ事が出来，又その自由ホモトピー類には少なくも1つの閉測地線が存在する。従ってAは$\tilde{M}$において少なくも1つの測地線を不変にする。又Γはtorsion freeである。$\tilde{M}$の各点pに対し，pと$A(p)$を結ぶ測地線分を$\sigma_a:[0,1]\to\tilde{M}$，$\sigma_a(0)=p$，$\sigma_a(1)=A(p)$，とする。$\tilde{M}$においては2点間を結ぶ測地線は唯一つ存在するから，$V_a(p):=\sigma_a'(0)$によって定義された$\tilde{M}$上のベクトル場V_aはC^∞である。これをaに対応する基本ベクトル場と呼ぶ。$a\neq e$なら，$V_a(q)\neq 0$，$q\in\tilde{M}$，である。

<u>補題8</u>　$\tilde{M}$の各点pに対し，微分同型写像$\exp_p\, T_p\tilde{M}\to\tilde{M}$はdistance-increasingである。

証明）［6］を参照

<u>補題9</u>　Mをコンパクトなリーマン多様体で$K\leqq 0$とする。その時，$\tilde{M}$の各点pに対し，$\{V_a(p)/\|V_a(p)\|\in T_p\tilde{M}\,;\,e\neq a\in\pi_1(M)\}$は$T_p\tilde{M}$の単位球で稠密である。

証明）$X\in T_p\tilde{M}$，$\|X\|=1$，を固定する。$\gamma:[0,\infty)\to\tilde{M}$を$\gamma'(0)=X$である測地線とする。$D$を$p$を含む$\tilde{M}$に対するコンパクトな基本領域とし，$\delta$を$D$の直径とする。今$t_n\to\infty$なる数列$\{t_n\}$を取る。その時，$A_n^{-1}(\gamma(t_n))\in D$なる$A_n\in\Gamma$が存在する。

p と $A_n(p)$ を結ぶ測地線分を $\mathcal{V}_{a_n}=\mathcal{V}_n$ とし，γ と $\mathcal{V}_n$ のなす角を θ_n とする。その時，補題8から，次を得る。

$$\begin{aligned} d^2(A_n(p),\gamma(t_n)) &\geqq d^2(p,A_n(p)) + t_n^2 - 2d(p,A_n(p))\cdot t_n\cdot\cos\theta_n \\ &\geqq 2d(p,A_n(p))t_n(1-\cos\theta_n). \end{aligned}$$

又，$d(A_n(p),\gamma(t_n)) \leqq \delta$ であるから，$\theta_n\to 0\ (n\to\infty)$ である。

注意：$\pi_1(M)\ni a, b$ に対し，$A_*\mathcal{V}_b=\mathcal{V}_{aba^{-1}}$ である。もし $ab=ba$ なら $\mathcal{V}_b$ はA-不変になる。

§3 Lawson と Yau の結果について

この節において，Lawson と Yau の主な結果[7]について述べる。

The flat torus theorem　Mを連結，コンパクトな C^∞-リーマン多様体で $K\leqq 0$ とする。その時，$\pi_1(M)$ が階数 k の自由アーベル群を持つ事と，k次元平坦トーラスがMに等長的，全測地的に immerse される事とは同値である。

証明）$f: T^k\to M$ を k次元平坦トーラスからMへの等長的，全測地的は immersion とする。$\pi_1(T^k)\ni a(\neq e)$ に対し，aの代表として geodesic loop γ を選べる。そのとき，$f\circ\gamma$ は $f(T^k)$ の geodesic loop であるが，$f(T^k)$ は全測地的であるから，$f\circ\gamma$ は M_1 における geodesic loop である。それ故 $f\circ\gamma\neq 0$ である。従って，$f_*:\pi_1(T^k)\to\pi_1(M)$ は injective である。

逆をいう。$\mathcal{A}$ を $\pi_1(M)$ の階数 k の自由アーベル群とする。$a_1 \cdots a_k$ を $\mathcal{A}$ の生成元とする。A_i, $1\le i\le k$, を a_i に対応する deck 変換とすれば, M がコンパクトであるから, $d(p, A_i(p))$, $p\in\tilde{M}$ (Mの普遍被覆空間), は最小値(A_i によって不変な測地線上の点で最小値を取る)をもつ。最小値を与える点の集合を C_i とする。C_i は凸集合である(補題1)。$\bigcap_{i=1}^{k} C_i \neq \phi$ である。$C := \bigcap_{i=1}^{k-1} C_i \neq \phi$ と仮定し, $C\cap C_k \neq \phi$ をいう。C は凸集合で, $\mathcal{A}$ が可換だから $A_k C = C$ である。各 $q\in\tilde{M}$ に対し, q から C への最短測地線を $\gamma:[0,1]\to\tilde{M}$, $\gamma(0)=q$, とする。その時, $A_k\gamma$ は $A_k(q)$ から C への最短測地である。従って補題5から, $d(q, A_k(q)) \geqq d(\gamma(1), A\circ\gamma(1))$, $(\gamma(1), A\circ\gamma(1)\in C)$。この事は, $C\cap C_k\neq\phi$ を意味する。今 $p\in\bigcap_{i=1}^{k} C_i$ とすると, p と $A_i(p)$ $1\le i\le k$, を通る測地線 γ_i は A_i-不変であることに注意する。p を含む, $\mathcal{A}$ 不変な $\tilde{M}$ の k 次元完備、平坦な全測地的部分多様体を構成する。まず, $A_1A_2=A_2A_1$ であるから全ての測地線 $A_2^j\gamma_1$, $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$ は same type である。補題6から $\bar{A}_2^j\gamma_1$ と $A_2^j\gamma_1$ を境界にもつ等長的, 全測地的に埋めこまれた平坦な曲面 Σ^j が存在する。$A_2\gamma_2=\gamma_2$, $A_1A_2=A_2A_1$ である事から $\gamma_1\subset\Sigma^i\subset\Sigma^{i+j}$ $(i, j\geqq 0)$ なる事が分る。従って $\Sigma_{1,2}=\bigcup_j\Sigma^j$ は等長的, 全測地的に埋めこまれた平坦な 2-plane である。$\Sigma_{1,2}$ は A_1, A_2 不変である。次に $\Sigma_{1,2}$ の各点 q に対し, q と $A_3(q)$ を通る測地線

をγ_qとし，$\Sigma_{1,2,3}=\bigcup_{q\in\Sigma_{1,2}}\gamma_q$ とおく。$\Sigma_{1,2,3}$ は A_1, A_2, A_3 不変で，平坦な全測地的曲面 Σ_{12}，$\Sigma_{1,3}$，$\Sigma_{2,3}$ を含んでいる。この事から $\Sigma_{1,2,3}$ は平坦な 3-plane に等長的であり，$\widetilde{M}$ の totally geodesic に 埋めこまれた部分多様体である。

以下，同様な方法をくり返す事により，平坦な k-plane に等長的な，全測地的に埋めこまれた $\widetilde{M}$ の $\mathcal{A}$-不変な部分多様体 $\Sigma_{1,\cdots,k}$ を作ることが出来る。$\pi(\Sigma_{1,\cdots,k})\subset M$ がもとめるものである。

<u>The center theorem</u>　Mを連結，コンパクト C^∞-リーマン多様体で$K\leqq 0$ とする。$\mathcal{Z}$を$\pi_1(M)$の中心とする。その時，

1) $\mathcal{Z}$ は階数kの自由アーベル群である。但し，kはM上の平行ベクトル場の作る空間の次元。

2) M は等長的，全測地的にはめこまれたk次元平坦トーラスを葉とする葉層構造をもつ。

証明) $\mathcal{Z}\ni a\,(\neq e)$ に対応する$\widetilde{M}$のdeck変換をAとする．D を deck変換群Γの$\widetilde{M}$におけるコンパクト領域とする。その時，各$p\in\widetilde{M}$ に対し，$G(p)\in D$ なる $G\in\Gamma$ が存在する。それで，
$d(p, A(p))=d(G(p), GA(p))=d(G(p), AG(p))$ であるから，
$d(p, A(p))$, $p\in\widetilde{M}$, は有界である。従って，$d(p, A(p))=$一定, $p\in\widetilde{M}$ (補題3)。それ故，各$p\in\widetilde{M}$ に対し，A は p と $A(p)$ を通る測地線γ_p を不変にする。今σをpを通りγ_pと異なる測地線

とすれば，$q\in\sigma$ に対し，$\gamma_q\sim\gamma_p$ である。従って，補題6から，$\Sigma=\bigcup_{q\in\sigma}\gamma_q$ は $\hat{M}$ の A 不変な平坦，全測地的曲面である。a に対応する基本ベクトル場 v_a (§2) は Σ に接していて Σ 上平行ベクトル場である。p と σ は任意であったから v_a は $\hat{M}$ 上平行ベクトル場である。以上の事から，各 $a\in\mathcal{L}$ に対し v_a は $\hat{M}$ 上平行ベクトル場である。de Rhame の分解定理から，$\hat{M}=\mathbb{R}^r\times\hat{M}'$ となる。v_a, $a\in\mathcal{L}$, は $\mathbb{R}^r$ に接している。v_a, $a\in\mathcal{L}$, が張る空間を $\mathbb{R}^k$ とする。その時，$\hat{M}=\mathbb{R}^k\times\hat{M}''$, $\hat{M}''=\mathbb{R}^{r-k}\times\hat{M}'$, となる。各 $a\in\mathcal{L}$ に対し，A は $\hat{M}$ 上に次の様に作用する：$A(x,y)=(x+t_a,y)$，又各 $G\in P$ は，$GA=AG$, $A\in\mathcal{L}$, であるから，$\hat{M}$ に次の様に作用する：$G(x,y)=(x+t_g, G'(y))$，G' は $\hat{M}''$ の等長写像。以上の事から定理の主張がいえた。

注意：$\pi_1(M)$ がアーベルなら M は平坦トーラスである。

定理　M を連結，コンパクト，リーマン多様体とし $K\leqq 0$ とする。その時，M 上に丁度 k 個の一次独立な平行ベクトル場が存在する事と，$\pi_1(M)$ が階数 k の中心をもつ事とは同値。

証明）$\pi_1(M)$ が階数 k の中心をもてば，center theorem から M 上に一次独立な k 個の平行ベクトル場が存在する。逆を示す。$\{v_1,\cdots,v_k\}$ が M 上の一次独立な平行ベクトル場の maximal set をなすとする。$\hat{v}_i$ を v_i, $1\leqq i\leqq k$, の $\hat{M}$ への

lift とする。そのとき，$\hat{v}_j$ ，$1\leq j\leq k$，は $G_*\hat{v}_j=\hat{v}_j$ ，$G\in\Gamma$ なる $\hat{M}$ 上の平行ベクトル場である。従って，de Rhame の分解定理を使って，$\hat{M}=\mathbb{R}^k\times\hat{M}'$ となり，各 $\hat{v}_j$ は $\mathbb{R}^k$ に接している。その時，各 $G\in\Gamma$ は $\hat{M}$ に次の様に作用する：$G(x,y)=(x+c_g,\ G'(y))$，G' は $\hat{M}'$ の等長写像。(以下 $G'=g$ と書く)

<u>補題</u> $G\in\Gamma$ に対し，$G(x_0,y_0)=(x_0+c_g,\ y_0)$ である様な点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^k\times\hat{M}'$ が存在したとする。その時，$G^n\in\mathcal{Z}$ (中心) となる整数 $n\,(\geq 1)$ が存在する。

(補題の証明) 任意の $H\in\Gamma$ を固定する。変換 $HG^nH^{-1}G^{-n}\in\Gamma$ を考える。全ての n に対して

$$
\begin{aligned}
d((x_0,y_0),\ HG^nH^{-1}G^{-n}(x_0,y_0)) &= d((x_0,y_0),(x_0,hg^nh^{-1}(y_0)))\\
&= d((x_0,h^{-1}(y_0)),(x_0,g^nh^{-1}(y_0)))\\
&\leq d((x_0,h^{-1}(y_0)),(x_0,y_0))+d((x_0,y_0),(x_0,g^nh^{-1}(y_0)))\\
&= 2d((x_0,y_0),(x_0,h^{-1}(y_0)))
\end{aligned}
$$

Γ は $\hat{M}$ に固有不連続に作用しているから，ある番号 J_H があって，$p>q\geq J_H$ に対して，$HG^pH^{-1}G^{-p}(x_0,y_0)=HG^qH^{-1}G^{-q}(x_0,y_0)$ となる。$m=p-q$ とおくと，$HG^mH^{-1}G^{-m}=1$。今 M がコンパクトであるから，Γ は有限生成である，従って，ある番号 J が存在し，上と同じ事がいえる。だから，ある整数 $n\,(\geq 1)$ があって，すべての $H\in\Gamma$ に対し，$HG^n=G^nH$ である。よって，G^n は中心 $\mathcal{Z}$ の元である。

さて，次の事実は良く知られている。

“M上の平行ベクトル場はKilling vector fieldで，逆に，Killing vector fieldはM上平行ベクトル場である”。

よって，$I(M)$のLie環はM上の平行ベクトル場の作る空間と同型。この事から，$I_0(M)$はk次元トーラス群である。今，T_0をMのある点pの$I_0(M)$の軌道とすれば，T_0はMの平坦な全測地的部分多様体である。$\mathbb{R}^k_0=\mathbb{R}^k\times\{p_0\}$, $\pi(p_0)=p$をT_0の逆像とする。その時，$\Gamma_0=\{G\in\Gamma;\ G(\mathbb{R}^k_0)=\mathbb{R}^k_0\}$と置く。$\Gamma_0$は$\mathbb{R}^k_0$上の自由固有不連続群で，$\mathbb{R}^k_0/\Gamma_0=T_0$であるから，$\Gamma_0\cong\underbrace{\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}}_{k}$である。$A_1,\cdots,A_k$を$\Gamma_0$の生成元とする。その時，補題によって，$A_i^{n_i}\in\mathcal{L}$, $1\leq i\leq k$, である整数$n_i\ (>0)$が存在する。$m=n_1\times\cdots\times n_k$とする。$\Gamma_0^m=\{A^m;\ A\in\Gamma_0\}$は階数kの自由アーベル群である。$\Gamma_0^m\subset\mathcal{L}$であるから，$\mathrm{rank}(\mathcal{L})\geqq k$である。中心定理を考えに入れれば，$\mathrm{rank}(\mathcal{L})=k$。

<u>The splitting theorem</u>　Mを連結，コンパクト実解析的リーマン多様体で$K\leqq 0$とする。もし，$\pi_1(M)=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$で，$\pi_1(M)$が中心をもたないとするなら，Mは次の様にリーマン積に分解される：$M=M_{\mathcal{A}}\times M_{\mathcal{B}}$, $\pi_1(M_{\mathcal{A}})=\mathcal{A}$, $\pi_1(M_{\mathcal{B}})=\mathcal{B}$.

証明）各$a\in\mathcal{A}$に対し，$\tilde{M}_a=\{p\in\tilde{M};\ d(p,A(p))$の最小値を与える点$\}$とする。$\tilde{M}_a\neq\phi$である。更に，$\tilde{M}_a$は$\tilde{M}$の完

備，連結全測地的部分多様体である。(補題 3.7)．又，基本ベクトル場 $\widetilde{V}_a$ は $\widetilde{M}_a$ 上の接平行ベクトル場である。(center theorem の証明参照)

<u>主張1</u>　$\dim \widetilde{M}_a < \dim \widetilde{M}$ なる $a \in \mathcal{A}$ が存在する。

実際，そうでないとすれば，$\widetilde{M}_a = \widetilde{M}$ $(\forall a \in \mathcal{A})$ で $\widetilde{V}_a$ は $\widetilde{M}$ 上の平行ベクトル場である。従って，$\widetilde{M} = \mathbb{R}^k \times \widetilde{M}'$ となる，$\mathbb{R}^k$ は $\widetilde{V}_a (a \in \mathcal{A})$ によって張られるユークリッド空間。その時，$A(x, y) = (x + t_a, y)$ となるから，$\mathcal{A}$ はアーベル群になる。これは，$\pi_1(M)$ が中心をもたないという事に反する。

今，$\dim \widetilde{M}_a < \dim \widetilde{M}$ なる $a \in \mathcal{A}$ を取る。すべての $b \in \mathcal{B}$ に対し，$BA = AB$ であるから $B(\widetilde{M}_a) = \widetilde{M}_a$ である。

<u>主張2</u>　$\pi(\widetilde{M}_a)$ は M でコンパクトである。

$\{p_n\}$ を $\pi(\widetilde{M}_a)$ の点列とする。各 p_n を通る長さが一定 $= l = d(q, A(q))$, $\forall q \in \widetilde{M}_a$, の閉測地線が存在する．(補題3) それらを $\gamma_n(s)$; $0 \leq s \leq l$ とする。M がコンパクトだから，部分列を取ることにより，$\{\gamma_n\}$ は M のある閉測地線 γ, $\lim \gamma_n(0) = \gamma(0) = p$, に一様に収束する。それ故，ある番号 J に対し，各 γ_n $(n \geq J)$ は自由にホモトープである。今 U を正則に被覆される p の近傍とする。$\gamma_n(0) \in U$, $n \geq J$, としてよい。$\{\gamma_n(0) = p_n\}_{n \geq J}$ と p を $\widetilde{U}$ ($\pi^{-1}(U)$ のある連結成分) に lift し夫々 $\{\widetilde{p}_n\}_{n \geq J}$, $\widetilde{p}$ と書く。その時，各

γ_n を $\tilde{p}_n$ を通る測地線 $\tilde{\gamma}_n$ に lift する。各 $\tilde{\gamma}_n$ が A によって不変になる様に $\tilde{U}$ を取れる。その時, $\tilde{p}_n \to \tilde{p}$ であるから, γ を $\tilde{p}$ を通る測地線 $\tilde{\gamma}$ に lift したとき, $A\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}$ である。よって, $\tilde{p} \in \tilde{M}_a$. だから $p \in \pi_1(\tilde{M}_a)$。$\pi_1(\tilde{M}_a)$ はコンパクトである。

今, ある $a_1 \in \mathcal{A}$ に対し, $A_1(\tilde{M}_a) \cap \tilde{M}_a \neq \phi$ としよう。$A_1(\tilde{M}_a) = \tilde{M}_{a_1 a a_1^{-1}}$ であるから, 上の主張から, $\pi(A_1(\tilde{M}_a))$ はコンパクトであることが分る。又, $A_1(\tilde{M}_a) \cap \tilde{M}_a$ は $\tilde{M}$ の完備, 連結,全測地的部分多様体で $\mathcal{B}$-不変である。更に, $\pi(A_1(\tilde{M}_a) \cap \tilde{M}_a)$ はコンパクトである。$\mathcal{A}$ から有限個の元 $a_1, \cdots, a_k$ を以下の条件をみたす様に取れる：$\tilde{N} = \bigcap_{i=1}^{k} A_i(\tilde{M}_a) \cap \tilde{M}_a$ に対し, 任意の $c \in \pi_1(M)$ に対し, $c(\tilde{N}) = \tilde{N}$ 又は $c(\tilde{N}) \cap \tilde{N} = \phi$. $\tilde{N}$ は $\mathcal{B}$-不変な全測地的部分多様体である。$N = \pi(\tilde{N})$ とする。N は M のコンパクトな全測地的部分多様体である。$\Gamma_1 = \{c \in \pi_1(M) ; c(\tilde{N}) = \tilde{N}\}$ とすれば, $N = \tilde{N}/\Gamma_1$ である。$\Gamma_1 = \mathcal{A}' \times \mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$ は $\mathcal{A}$ のある部分群.

今から, N について考える。$\mathcal{A}'$ をアーベル群と仮定してもよい。実際, そうでないと, 今までの議論から, $\dim \tilde{N}_a < \dim \tilde{N}$ なる $a \in \mathcal{A}'$ が存在し, 新しいコンパクトなリーマン多様体 $N_1 (\subset N \subset M)$ を作る事が出来る。$\dim M < \infty$ だから, 同じ議論を有限回くり返し, 目的に達することが分る。

以下, $\mathcal{A}'$をアーベルとする。その時, $V_a, a\in\mathcal{A}'$ は $\widetilde{N}$上平行ベクトル場になるから, $\widetilde{N}=\mathbb{R}^k\times\widetilde{N}'$ となり, $\mathcal{A}'$は次の様に$\widetilde{N}$に作用する: $A(x,y)=(x+t_a, y)$, $a\in\mathcal{A}$. 又 $\mathcal{B}$は$\widetilde{N}$に次の様に作用する。$B(x,y)=(x+t_B, B'(y))$, B'は$\widetilde{N}'$の等長写像 ($\mathcal{B}$は$\mathbb{R}^k$を不変にする)。$\widetilde{N}/\mathcal{A}'\times\mathcal{B}$ はコンパクトであるから, $\widetilde{N}'/\mathcal{B}'$ もコンパクトになる。($\mathcal{B}'=\{B'; B\in\mathcal{B}\}$)

次の事を容易に示すことができる。

i) Sを$\widetilde{N}$の$\mathcal{B}$-不変な閉凸集合とする。その時, $T(x,y)=(x+t,y)$ なる translation Tに対し, $T(S)$も又$\mathcal{B}$-不変な閉凸集合である。

ii) $pr:\widetilde{N}\to\widetilde{N}'$ に対し, $pr(S)=\widetilde{N}'$ である。(補題9)

今から, $\mathcal{B}$-不変な全測地的部分多様体 $\widetilde{M}_{\mathcal{B}}\subset\widetilde{N}$, ($\dim\widetilde{M}_{\mathcal{B}}=\dim\widetilde{N}-k$) を構成しよう。$p\in\widetilde{N}$を固定する。$\langle\mathcal{B}p\rangle$を$p$を含む最小な$\mathcal{B}$-不変な閉凸集合とする。$\widetilde{N}'$の任意の点$y$に対し, 凸集合 $C_y=\langle\mathcal{B}p\rangle\cap\mathbb{R}^k\times\{y\}$ が有界であることを示そう。実際, 有界でないとする。その時, 発散点列$\{q_j\}$が取れる。Fを$\mathbb{R}^k\times\{y\}$における$\mathcal{A}'$のコンパクトな基本領域とする。その時, Fと$\mathcal{A}'$から以下の様な列が取れる: $A_jp_j=q_j$, A_jは異なるとしてよい。今, 任意の$a\in\mathcal{A}$に対し, $d(q,A(q))$, $q\in\widetilde{M}$ を考える。この関数は $\mathcal{B}p=\{B(p); B\in\mathcal{B}\}$で一定である。更に, $\langle\mathcal{B}p\rangle$上で

で有界になる。($\widetilde{M}'=\{q\in\widetilde{M}';\ d(q,A(q))\leqq d(p,A(p))\}$ とすると $\widetilde{M}'$ は $\mathcal{B}$-不変な凸集合で $\langle\mathcal{B}p\rangle$ を含んでいる)

従って，$d(q_j,A(q_j))=d(A_jp_j,AA_jp_j)=d(p_j,A_j^{-1}AA_jp_j)<\infty$ (for all j) である。部分列を選ぶことにより，$p_j\to p_0$，$A_j^{-1}AA_j(p_j)\to q_0$ となる様な $\widetilde{M}$ の点 p_0，q_0 が存在する。更に，$d(q_0,A_j^{-1}AA_j(p_0))\leqq d(q_0,A_j^{-1}AA_j(p_j))+d(p_j,p_0)$ であるから，$A_j^{-1}AA_j(p_0)\to q_0\ (j\to\infty)$。$\Gamma$ は固有不連続だから，定数 J_a が存在し，$i,j\geqq J_a$ に対し，$A_j^{-1}AA_j=A_i^{-1}AA_i$ でなければならない。M がコンパクトで，$AB=BA$，$a\in\mathcal{A}$，$b\in\mathcal{B}$，であることから，$\mathcal{A}$ は有限生成である．従って，ある定数 J が存在し，$i,j\geqq J$ に対して $A_jA_i^{-1}C=CA_jA_i^{-1}$，$\forall C\in\pi_1(M)$。これは $\pi_1(M)$ が中心をもたないという事に反する。かくして，$C_y=\langle\mathcal{B}p\rangle\cap\mathbb{R}^k\times\{y\}$ は有界である。($\langle\mathcal{B}p\rangle\subset\widetilde{N}$)。更に，$C_y=\{y\}$ という。今，そうでないとする。$C_y\subset\mathbb{R}^k\times\{y\}$ はコンパクト凸集合であるから，任意に与えられた点 $\bar{p}\in C_y$ に対し，以下の性質をもつ $\mathbb{R}^k\times\{y\}$ の translation T が存在する：$\bar{p}\in C_y\cap T(C_y)\subset C_y$．
今，T を $\widetilde{N}=\mathbb{R}^k\times\widetilde{N}'$ に自然に拡張すれば，先に述べた性質 i) によって，$\langle\mathcal{B}p\rangle\cap T(\langle\mathcal{B}p\rangle)$ は $\langle\mathcal{B}p\rangle$ の $\bar{p}$ を含む $\mathcal{B}$-不変な真閉凸集合になる。$p=(x_0,y_0)$ とする。もし，$y=y_0$ のとき ($\bar{p}=p$) この事は，$\langle\mathcal{B}p\rangle$ が p を含む最小な閉凸集合である事に反す

る。よって，$C_{y_0}=\{y_0\}$。又他の y に対しては，

$$\langle \mathcal{B}p\rangle \cap T\langle \mathcal{B}p\rangle \cap \mathbb{R}^k\times\{y_0\}=\phi$$

であるから，ii) に矛盾することが分る。従って，すべての $\tilde{N}'$ の点 y に対し，$C_y=\{y\}$ である。この事は $\langle \mathcal{B}p\rangle$ がある関数 $f:\tilde{N}'\to\mathbb{R}^k$ のグラフになっている事を示す。それで，$\tilde{M}_{\mathcal{B}}\overset{\mathrm{def}}{=}\langle \mathcal{B}p\rangle$ とすれば，$\tilde{M}_{\mathcal{B}}$ は完備な全測地的 $\mathcal{B}$－不変な多様体で $\dim\tilde{M}_{\mathcal{B}}=\dim\tilde{N}'$ である。$\tilde{N}'$ はコンパクトであったから $\tilde{M}_{\mathcal{B}}/\mathcal{B}$ はコンパクトになる。

さて，$\gamma\subset M_{\mathcal{B}}$ を任意の測地線とし，任意の $a\in\mathcal{A}$ を固定する。そのとき，$\gamma\sim A\gamma$ である事が分る。それで，補題6と"注意"により，γ と $A\gamma$ を通る平坦な全測地的曲面が存在する。この事から次の事が分る：

(1) 各測地線 $\gamma_t(s)=\exp_{\gamma(s)}(tv_a)$ $(t\in\mathbb{R})$ は γ と same type である。

(2) $\tilde{M}_{\mathcal{B}}$ のすべての測地線を考える事により，(1) から v_a は $\tilde{M}_{\mathcal{B}}$ に沿う平行ベクトル場である。

(3) $\tilde{M}_{\mathcal{B}}$ の接ベクトル X に対し，$\langle R(v_a,X)v_a,X\rangle=0$。

(1) から，任意の $t\in\mathbb{R}$ と任意の $a\in\mathcal{A}$ に対し，多様体 $\tilde{M}_{\mathcal{B},ta}=\{\exp_x tv_a\,;\,x\in\tilde{M}_{\mathcal{B}}\}$ は全測地的で，$\mathcal{B}$－不変である事が分る。この様な多様体は，互いに共通点をもたないかさもなくば一致する。又補題9から，この様な多様体全体は

$\tilde{M}$で稠密である事から，$\tilde{M}$の任意の点pに対し，pを通る$\mathcal{B}$-不変な全測地的部分多様体$\tilde{M}_{\mathcal{B},p}$が存在する。その接空間は$\{v_b(p)\}_{b\in\mathcal{B}}$によって張られている。

今までと全く同じ議論によって，$\mathcal{A}$-不変な全測地的部分多様体$\tilde{M}_{\mathcal{A},p}$（その接空間は$\{v_a(p)\}_{a\in\mathcal{A}}$によって張られている）による$\tilde{M}$のfoliationを構成出来る。(2), (3)から，任意の$a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$に対し，$\nabla_{v_a}v_b=\nabla_{v_b}v_a=0$, $\langle R(v_a,v_b)v_a,v_b\rangle=0$である。更に，$\langle v_a,v_b\rangle=0$である。実際，そうでなければ，ある$v_a$の$\tilde{M}_{\mathcal{B}}$への直交射影は$\tilde{M}_{\mathcal{B}}$上のgloball な平行ベクトル場になる。先に示した定理から，$\mathcal{B}$は中心をもたなければならない。しかし，これは矛盾である。

以上の事から$\tilde{M}=\tilde{M}_{\mathcal{A}}\times\tilde{M}_{\mathcal{B}}$（リーマン積）となり，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$は夫々，$\tilde{M}_{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}_{\mathcal{B}}$に作用している。従って，$M=(\tilde{M}_{\mathcal{A}}/\mathcal{A})\times(\tilde{M}_{\mathcal{B}}/\mathcal{B})$となる。これで主張がいえた。

注意：Lawson と Yau は，以上述べた他に，中心定理と次に述べた"定理"を使って，Mの等長群の性質を研究している。又，有限な体積をもつ多様体についても，"定理"の一般化をなしている。

更に，以上述べた事は，Gromoll と Wolf [5] によって一般化されている。特に，The splitting theorem が，M が C^ω-

組の時でも成立する事を証明している。

参考文献

[1] M. Berger, Seminaire de geodmetrie Riemannienne 1970-1971

[2] R. Bishop & B. O'neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) 1-49

[3] W. P. Byers, Generalization of a theorem of Preissmann, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 50-51

[4] J. Cheeger & D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math 96 (1972) 413-443

[5] D. Gromoll & J. A Wolf, Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature, Bull Amer. Math. Soc 77 (1971) 545-552.

[6] Hicks, Notes on differential geometry

[7] H. B. Lawson & S. T. Yau, Compact manifolds of nonpositive curvature, J. Diff. Geometry 7 (1972) 211-228

[8] A. Preissmann, Quelques propriétés globales des espace de Riemann, Comment. Math. Helv 15 (1942) 175-216.