数理解析研究所講究録
第 220 巻 1974 年 38-53

球面内の isoparametric 超曲面とその周辺

東京教育大　高木亮一

$M^n(K)$ によって定曲率 K の n 次元単連結空間形を表わす．$M^n(K)$ 上の自明でない函数 V に対して，二つの一変数函数 S、T が存在して $\|dV\|^2(p) = S(V(p))$, $(\Delta V)(p) = T(V(p))$, $p \in M^n(K)$ を満足するとき，V を $M^n(K)$ 上の isoparametric 函数といい，$V^{-1}(c)$ (c は正則値) を $M^n(K)$ 内の isoparametric 超曲面という。E. Cartan は一連の論文 [1-4] で $M^n(K)$ 内の isoparametric 超曲面の分類問題を研究し、先ず次の基本定理を証明した。

定理 1. M が $M^n(K)$ 内の isoparametric 超曲面ならば，M の主曲率はすべて一定である。

そこで以下 M を $M^{n+1}(K)$ $(n \geq 2)$ 内の連結で完備な超曲面とし，その主曲率はすべて一定であると仮定する。そのうち相異なるものは g 個であるとし、それらの重複度は夫々 $m_1, \cdots m_g$ とする：$m_1 + \cdots + m_g = n$。E. Cartan は $K \leq 0$ のとき、$g = 1, 2$ を証明し，M を完全に決定した。更に彼は $K > 0$ の

とき，$g=1,2,3$ の場合にMを決定し，$g=4$ で $m_1=m_2=m_3=m_4$ の場合に $m_1=1,2$ を主張し（証明は述べてない），実際に $(g,m_1)=(4,1),(4,2)$ の例を挙げている。これらの決定されたあるいは例として挙げられたMはすべてある g 次斉次多項式の零点の集合として表わされ，かつ結果的に $M^{n+1}(K)$ から誘導されたRiemann計量に関して等質である。最近H. F. Münzner [6] は，$K>0$ のとき一般にMとある方程式を満足する g 次斉次多項式が一対一に対応し，かつ $g=1,2,3,4,6$ であることを証明し，E. Cartanの理論を飛躍的に発展させた。g の範囲はこれがbest possibleである。実際，Mが等質のとき，そのどの値もとり得る。本稿でMünznerの定理の概略を紹介し（§1, §2），その後のいくつかの結果を報告したい（§3）。

§1. $S^{n+1}=M^{n+1}(1)=\{x\in\mathbb{R}^{n+2};\|x\|=1\}$ とおき，Mを S^{n+1} 内の連結で向付可能な超曲面で，その主曲率 $k_1,\cdots,k_n$ はすべて一定であると仮定する。ν を S^{n+1} におけるMの単位法ベクトル場とする。$k_i=\cot\theta_i$，$0<\theta_1,\cdots,\theta_n<\pi$，$i=1,\cdots,n$ とおく。固定した添字 i に対して，Mから S^{n+1} への二つの写像 f_i, h_i を

$$f_i(p)=p\cos\theta_i+\nu\sin\theta_i,\quad h_i(p)=-p\sin\theta_i+\nu\cos\theta_i$$

で定義するとき，M 上の正規直交 frame 場 $e_1, \cdots, e_n$ とその coframe 場 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を $d\nu = -\sum_j k_j \omega_j e_j$ となるようにとれば，

$$df_i = \sum_j (\cos\theta_i - \sin\theta_i \cot\theta_j)\omega_j e_j,$$

$$dh_i = -\sum_j (\sin\theta_i + \cos\theta_i \cot\theta_j)\omega_j e_j$$

であるから，次を得る。

(1) df_i の階数は一定 $(= n - m_i)$ であるから，$\widetilde{M} = f_i(M)$ は S^{n+1} の $n - m_i$ 次元の部分多様体である。

(2) $\tilde{p} = f_i(p)$, $C = f_i^{-1}(\tilde{p})$ とおけば，$h_i(C)$ は $SN_{\tilde{p}}\widetilde{M} = \{X \in T_{\tilde{p}}(S^{n+1})\,;\, \|X\| = 1,\ X \perp T_{\tilde{p}}(\widetilde{M})\}$ における開集合 $(\neq \phi)$ である。

(3) $h_i(p)$ に関する $\widetilde{M}$ の主曲率は $\cot(\theta_j - \theta_i)\ (\theta_j \neq \theta_i)$ で与えられる。

$k_1, \cdots k_n$ のうち相異なるものは $k_1, \cdots, k_g$ であり，$0 < \theta_1 < \cdots < \theta_g < \pi$ としてもよい。k_α $(\alpha = 1, \cdots, g)$ の重複度を m_α とする。

<u>定理 2</u>. 1) $\theta_\alpha = \theta_1 + \dfrac{\alpha - 1}{g}\pi$,

2) $m_\alpha = m_{\alpha+2} \pmod g$.

証明。函数 $\chi_t : SN_{\tilde{p}}\widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\chi_t(Z) = \det(A_Z - tI)$ で定義する。ただし，$t \in \mathbb{R}$ で A_Z は Z に関する $\widetilde{M}$ の shape operator を表わす。このとき (3) より $\chi_t(h_\alpha(p)) =$

$\prod_{\beta,\beta\neq\alpha}(\cot(\theta_\beta-\theta_\alpha)-t)^{m_\beta}$。これは各 t に対して、$\chi_t|h_\alpha(C)$ が定値をとることを示す。(2) より $h_\alpha(C)$ は $SN_p\widetilde{M}$ における開集合であり，$\chi_t|SN_p\widetilde{M}$ は解析的であるから，各 t に対して、$\chi_t|SN_p\widetilde{M}$ は定値をとる。特に各 t に対して、$\chi_t(h_\alpha(p))=\chi_t(-h_\alpha(p))$。故に各 β ($\neq\alpha$) に対して、$\beta'\in\{1,\cdots,g\}$ が存在して、

$$\cot(\theta_\beta-\theta_\alpha)=-\cot(\theta_{\beta'}-\theta_\alpha),\ m_\beta=m_{\beta'}$$

を満足する。自然な準同型 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\pi\mathbb{R}$ による $\theta\in\mathbb{R}$ の像を $\overline{\theta}$ で表わせば，この式は写像 $\overline{\theta}_\beta\to 2\overline{\theta}_\alpha-\overline{\theta}_\beta$ が $\{\overline{\theta}_1,\cdots,\overline{\theta}_g\}$ を不変にし，$2\overline{\theta}_\alpha-\overline{\theta}_\beta$ の重複度が m_β に等しいことを意味する。

証了。

2) より，g が奇数ならば $m_1=\cdots=m_g$ であり，g が偶数ならば $m_1=m_3=\cdots=m_{g-1}$，$m_2=m_4=\cdots=m_g$ であることがわかる。写像 $\ell:\mathbb{R}\times M\to S^{n+1}$ を

$$\ell(\theta,p)=p\cos(\theta_1-\theta)+\nu\sin(\theta_1-\theta)$$

で定義すれば，$d\ell$ の (θ_1,p) での階数が $n+1$ であるから，ℓ の下で $\mathbb{R}\times M$ における (θ_1,p) のある開近傍 $\widetilde{A}$ と S^{n+1} における p のある開近傍 A は微分同型となる。$A\cap M$ は A の isoparametric 超面であることを示そう。二つの関数 $t,V:A\to\mathbb{R}$ を

$$t(l(\theta, p')) = \theta, \quad (\theta, p') \in \widetilde{A}$$
$$V(q) = \cos(g\,t(q)), \quad q \in A$$

で定義する。更に A から作られる $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の錐 $\bigcup_{r>0} rA$ 上の函数 $\overline{F}$ を $\overline{F}(rq) = r^g V(q)$ で定義する。構成の仕方から $\overline{F}|A$ の等位面は M に平行な超曲面の一部である（特に M も）。

<u>定理 3</u>. $\overline{F}$ は次の微分方程式を満足する g 次斉次多項式 $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ の制限として与えられる。

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n+2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 = g^2 \left(\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2\right)^{g-1}$$
$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = c \left(\sum_{i=1}^{n+2} x_i^2\right)^{g/2-1},$$

ここに $c = (m_2 - m_1) g^2/2$（g が奇数ならば $c = 0$）。

証明。t の定義と S^{n+1} の構造方程式から容易に

$$\|dt\|^2 = 1, \quad \Delta t = nH$$

を得る。ここに $H(q)$ は S^{n+1} の超曲面 $t^{-1}(t(q))$ の法ベクトル dt に関する平均曲率を表わす。よって定理 2 より

$$(6) \qquad \Delta t(q) = \sum_{\alpha=1}^{g} m_\alpha \cot\left(t(q) + \frac{\alpha-1}{g}\pi\right)$$
$$= \begin{cases} m_1 g \cot(g\,t(q)) & (g : \text{奇数}) \\ m_1 \frac{g}{2} \cot\left(\frac{g}{2} t(q)\right) - m_2 \frac{g}{2} \tan\left(\frac{g}{2} t(q)\right) & (g : \text{偶数}) \end{cases}$$

$\omega = \sin^{-1}\sqrt{m_1/(m_1+m_2)}$ とおけば g の奇偶を問わず

$$\Delta t = n \cot gt + \frac{n \cos 2\omega}{\sin gt}$$

を得る。V の定義より次は容易に計算できる。

$$(7) \qquad \begin{cases} \| dV \|^2 = g^2(1-V^2) \\ \Delta V = -g(n+g)V - ng\cos 2\omega \end{cases}$$

一方

$$\sum_{i=1}^{n+2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2(r\xi) = r^{2g-2}\left(g^2 V(\xi) + \| dV(\xi)\|^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n+2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(r\xi) = r^{g-2}\left(g(n+g)V(\xi) + \Delta V(\xi)\right)$$

であるから (7) より (4),(5) を得る。(4) に $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ を g 回適用すれば $\partial^{i_1+\cdots+i_g}F/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_g} = 0$, $\partial^{i_1+\cdots+i_{g-1}}F/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{g-1}} \neq 0$ がわかるから，F は g 次多項式である。F の斉次性は定義より自明。　　証了。

我々は最初 M の一点 p と M の単位法ベクトル場 ν を固定し，A を作りそして (4),(5) を満足する多項式 F を構成した。しかしこの F は M の向付可能性を仮定しなくとも，M だけで定まる。実際，上の議論の M として M の向付可能な連結開集合をとればよいし，ν の代りに $-\nu$ を考えるときは $V(\xi)$ を $V(\xi) = \sin(gt(\xi))$ で定義すればよいし，p の選び方に依ら

ないことはFが多項式であることから容易にわかる。

以下逆に(4),(5) を満足するg次斉次多項式Fを考える。$V=F|S^{n+1}$とおけば，Vは(7) を満足するから，それはS^{n+1}上のisoparametric 函数であること及びVの臨界値は± 1だけであることがわかる。よって$|\rho|\leq 1$に対して$M_\rho=\{p\in S^{n+1}; V(p)=\rho\}$とおけば，$M_\rho$ ($|\rho|<1$) はS^{n+1}内のcompact超曲面で，定理1よりその主曲率はすべて一定である。また明らかにM_ρ ($|\rho|<1$) は向付可能である。(7) よりM_ρ ($|\rho|<1$) はg個の相異なる主曲率を持つこと及びgが偶数のときは重複度が$n/g\pm c$である主曲率を夫々$g/2$個持つことがわかる。

<u>定理4</u>. 各ρ ($|\rho|\leq 1$) に対してM_ρは連結である。

証明は省略。従ってS^{n+1}内の連結な超曲面でその主曲率がすべて一定であるものを分類する問題は，(4),(5) を満足するg次斉次多項式Fを分類する問題に帰着されたわけである。

§2.

<u>定理5</u>. $g=1,2,3,4,6$.

この証明は純粋にtopologicalで$M=M_0$のcohomology環の構造を調べることによってなされ，巧妙で長い。そのあらましを述べよう。簡単のため$M_+=M_{+1}$, $M_-=M_{-1}$, $k=\pm$とおく。$BM_k=\{Z\in NM_k; \|Z\|\leq 1\}$, $B_k=\{q\in S^{n+1}; kV(q)\geq 0\}$

とおく。ただし NM_k は M_k の法bundleを表わす。B_k は M を境界に持つ多様体である。V と S^{n+1} の指数写像 exp の間には $V(\exp Z) = k\cos(g\|Z\|)$, $Z \in NM_k$ なる関係がある。特に $\varphi_k : (BM_k, SNM_k) \longrightarrow (B_k, M)$ $\left(\varphi_k(Z) = \exp\frac{\pi}{2g}Z\right)$ は微分同型である。そこで次の状態に注目する。

I. $S^{n+1} = B_+ \cup M \cup B_-$ (Mに沿った接着)

II. B_k は M_k 上の単位円板bundleである(M は M_k 上の球bundle).

これを可換図式で表せば

$$\begin{tikzcd}
M_k \arrow[r, "i_k"] & B_k \arrow[d, "q_k"] & M \arrow[l, "j_k"'] \arrow[dl, "p_k"] \\
 & M_k \arrow[ul, leftrightarrow, "\mathrm{id.}"] &
\end{tikzcd}$$

ここに i_k, j_k は包含写像, p_k, q_k は bundle 写像である。p_k の fibre の次元を m_k で表わす。M_k が B_k と $M_k - M$ の変位 retract であること, Mayer-Vietoris の系列, Alexander と Poincaré の双対定理, Leray-Hirsch の定理を駆使して, 可換環 R に値をとる M の特異 cohomology $H^*(M)$ が詳しくわかる。ただし R は, M_k が向付可能のとき $\mathbb{Z}$ をとり, そうでないとき $\mathbb{Z}_2$ をとる。$\mu = m_+ + m_-$ とおく。

<u>定理6.</u> I と II が満たされれば, $g := 2n/\mu$ は整数である。

更に $m_+ = m_-$ ならば $H^q(M) \cong \begin{cases} R & (q=0, n) \\ R \oplus R & (q = jm_+, j=1,\cdots,g-1) \\ 0 & (\text{他のとき}) \end{cases}$

$m_+ \neq m_-$ ならば g は偶数で

$$H^q(M) \cong \begin{cases} R & (q=0, n) \\ R & (q = j\mu + m_k, j=0,\cdots,\frac{g}{2}-1) \\ R \oplus R & (q = j\mu, j=1,\cdots,\frac{g}{2}-1) \\ 0 & (\text{他のとき}) \end{cases}$$

この定理から，$\varepsilon = 0, 1$ と $j = 1, \cdots, \frac{g}{2}-1$ に対して $G^k_{2j+\varepsilon} = p^*_k(H^{j\mu+\varepsilon m_{-k}}(M_k))$ とおき，更に $G_0 = H^0(M)$，$G_g = H^{n-1}(M)$，$G_i = G^+_i \oplus G^-_i$ $(i=1,\cdots,g-1)$ とおけば，次の A～D を満足する R 上の 1 を含む代数 $G = \sum_{i=0}^{\infty} G_i$ が得られる。

A. $G_i = \begin{cases} R & (i=0, g) \\ 0 & (i > g) \\ G^+_i \oplus G^-_i & (i=1,\cdots,g-1) \end{cases}$ ただし $G^k_i \cong R$.

B. $G^k = G_0 + \sum_{i=1}^{g-1} G^k_i$ は G の部分代数。

C. x_1, y_1 を夫々 G^+_1, G^-_1 の R－生成元とすれば，G は基底が $\{1, y_1\}$ であるような自由 G^+－加群でもあり，基底が $\{1, x_1\}$ であるような自由 G^-－加群でもある。

D. $u \in G^k_i$, $w \in G^h_j$ に対して $uw = \pm wu$.

$(k, h \in \{+, -\},\ i, j \in \{1, \cdots, g-1\})$

これを基に，M_k が向付可能であるか否かに応じて別々に G の構造に関する議論を展開し，定理5を証明する。最後に証明は省略するが

<u>定理7</u>. $g=6$ ならば $m_+ = m_-$（§1の記号では $m_1 = m_2$）。

§3. 微分方程式(4),(5)の解について知られていることをまとめてみよう。先ず，g が与えられたとき，(4),(5)は F のみならず m_1, m_2 にも関する方程式であることを注意する。以下の例1～5は一般解である。例6～10は H. Ozeki & M. Takeuchi [7] によって与えられた特殊解で，例6～9は既に分類されている S^{n+1} $(n \geq 3)$ 内の等質超曲面の方程式を決定したものである。尚例10だけは対応する S^{n+1} 内の isoparametric 超曲面は等質とならないこともわかっている。

<u>例1</u>([1]). $g=1$ の場合。$m_1 = n$ で $F = x_{n+2}$. このとき $|\rho| < 1$ に対して $M_\rho = SO(n+1)/SO(n)$（小円）。

<u>例2</u>([1]). $g=2$ の場合。m_1, m_2 は $m_1, m_2 \geq 1$, $m_1 + m_2 = n$ なる任意の整数で

$$F = x_1^2 + \cdots + x_{m_1+1}^2 - x_{m_1+2}^2 - \cdots - x_{n+2}^2.$$

このとき $|\rho| < 1$ に対して $M_\rho = SO(m_1+1)/SO(m_1) \times SO(m_2+1)/SO(m_2)$.

<u>例3</u>([2]). $g=3$ の場合. $\mathbb{F}$ によって $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$（4元数体）または $\mathbb{K}$（Cayley代数）を表わす。$\mathbb{F}$ 係数の3

次正方行列を $M_3(\mathbb{F})$ で表わし，$H_3(\mathbb{F})=\{X\in M_3(\mathbb{F})\,;\,{}^t\overline{X}=X\}$ とおく。$H_3(\mathbb{F})$ に内積 $(\ ,\ )$ を $(X,Y)=\frac{1}{2}\mathcal{R}e\,\mathrm{Tr}\,XY$ で定義すれば，$\mathbb{R}^{n+2}=\{X\in H_3(\mathbb{F})\,;\,\mathrm{Tr}\,X=0\}$ $(n+2=5,8,14,26)$ と考えてよい。$\mathbb{F}\ni x$ に対して，$t(x)=x+\overline{x}\in\mathbb{R}$，$n(x)=x\overline{x}\in\mathbb{R}$ とおく。このとき

$$F(X)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1 n(a)-\xi_2 n(b)-\xi_3 n(c)+t(abc)\right),$$

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1 & c & \overline{b}\\ \overline{c} & \xi_2 & a\\ b & \overline{a} & \xi_3\end{pmatrix}\ (\xi_i\in\mathbb{R},\ a,b,c\in\mathbb{F},\ \textstyle\sum\xi_i=0),$$

$$m_1=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}$$

と表わせる。また F は $H_3(\mathbb{F})$ 内の平面 $\sum\xi_i=0$ の適当な直交座標系 x_1,x_2 に関して

$$F=x_1^3-3x_1x_2+\frac{3}{2}x_1(a\overline{a}+b\overline{b}-c\overline{c})+\frac{3\sqrt{3}}{2}x_2(a\overline{a}-b\overline{b})$$
$$+\frac{3\sqrt{3}}{2}(abc+\overline{abc}),\quad a,b,c\in\mathbb{F}=\mathbb{R}^n$$

とも表わせる。このとき $|\rho|<1$ に対して

$$M_\rho=SO(3)/(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\qquad(\mathbb{F}=\mathbb{R})$$
$$M_\rho=SU(3)/T^2\qquad(\mathbb{F}=\mathbb{C})$$
$$M_\rho=Sp(3)/Sp(1)^2\qquad(\mathbb{F}=\mathbb{H})$$
$$M_\rho=F_4/Spin(8)\qquad(\mathbb{F}=\mathbb{K})$$

注1．$-\frac{2}{3\sqrt{3}}F$ は Jordan 代数 $H_3(\mathbb{F})$（積は $X\circ Y=$

$\frac{1}{2}(XY+YX)$ で定義)の norm と呼ばれるものである。

注2. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ のとき，M_1 または M_{-1} はいわゆる Veronese 曲面である。

例4([8]). $g=4$ で，$m_1=1$ または $m_2=1$ の場合。$m_1=1$ としてもよい。このとき $n=2m_2+2$ で

$$F=-\|x\|^4-\|y\|^4+6\|x\|^2\|y\|^2-8(x,y)^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^{m_2+2}\times\mathbb{R}^{m_2+2}=\mathbb{R}^{n+2}.$$

このとき $|\rho|<1$ に対して $M_\rho=(SO(m_2+2)\times SO(2))/(SO(m_2)\times\mathbb{Z}_2)$.

例5([7]). $g=4$ で，$m_1=2$ または $m_2=2$ の場合。$m_2=2$ としてもよい。$r\geq 2$ に対して

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}0 & {}^t\bar{X}\\ X & 0\end{pmatrix}=\hat{X}\ ;\ X\in M_{r,2}(\mathbb{C})\right\}$$

とおく。$\mathfrak{p}$ に内積 $(\ ,\ )$ を $(\hat{X},\hat{Y})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,\hat{X}\hat{Y}$ で定義すれば $\mathfrak{p}=\mathbb{R}^{4r}$ と考えてよい。このとき

$$F(\hat{X})=\frac{3}{4}(\mathrm{Tr}\,\hat{X}^2)^2-2\,\mathrm{Tr}\,\hat{X}^4,\ X\in\mathfrak{p},\ m_2=2r-3$$

となる。このとき $|\rho|<1$ に対して $M_\rho=S(U(r)\times U(2))/(SU(r-2)\times T^2)$.

注. 上の F において，$\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $(m_1,m_2)\to(1,\frac{n-2}{2})$ と置き変えれば例4の F と一致する。

例6. 例5の F において，$\mathbb{C}\to\mathbb{H}$, $(m_1,m_2)\to(4,4r-5)$ と置き変えれば，これは(4),(5)を満足する。このとき

$|\rho|<1$ に対して $M_\rho = (Sp(r)\times Sp(2))/(Sp(r-2)\times Sp(1)^2)$.

例7. $g=4$ とする。$\mathbb{F}$ によって $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表わす。$\{X\in M_5(\mathbb{F})\,;\,{}^tX=-X\}$ に内積 $(\ ,\ )$ を $(X,Y)=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,X\bar{Y}$ で定義すれば、これを $\mathbb{R}^{n+2}$ と同一視してもよい $(n+2=10,20)$。このとき

$$F(X)=\frac{3}{4}(\mathrm{Tr}\,X\bar{X})^2-2\,\mathrm{Tr}(X\bar{X})^2,\ X\in\mathbb{R}^{n+2},$$

$$(m_1,m_2)=\begin{cases}(2,2) & (\mathbb{F}=\mathbb{R})\\ (4,5) & (\mathbb{F}=\mathbb{C})\end{cases}$$

は(4),(5)を満足する。このとき $|\rho|<1$ に対して

$$M_\rho=\begin{cases}Sp(2)/T^2 & (\mathbb{F}=\mathbb{R})\\ U(5)/(SU(2)^2\times T) & (\mathbb{F}=\mathbb{C})\end{cases}$$

例8. $g=4$ とする。$\mathbb{C}^{16}$ に内積 $(\ ,\ )$ を $(z,w)=\sum_{i=1}^{16}z_i\bar{w}_i$ で定義し, $\mathbb{C}^{16}=\mathbb{R}^{32}$ と考える。$\mathbb{C}^8$ を $\mathbb{C}$ 上の Cayley 代数と同一視して, Cayley 代数の積によって $x\circ y\in\mathbb{C}^8$ $(x,y\in\mathbb{C}^8)$ を定義する。このとき

$$F(Z)=2\Big|\sum_{i=1}^{8}x_i^2\Big|^2+2\Big|\sum_{i=1}^{8}y_i^2\Big|^2+4\|x\circ y\|^2-(\|x\|^2+\|y\|^2)^2,$$
$$Z=(x,y)\in\mathbb{C}^{16},\ (m_1,m_2)=(6,9)$$

は(4),(5)を満足する。このとき $|\rho|<1$ に対して

$M_p = (Spin(10)\times U(1))/(SU(4)\times T)$.

例9. $g=6$ とする。E_{ij} によって (i,j) 成分が1で他の成分は0である7次正方行列を表わす。$G_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ とおく。

$$\mathfrak{g}_i=\{\xi_1 G_{i+1,i+3}+\xi_2 G_{i+2,i+6}+\xi_3 G_{i+4,i+5}\,;\ \xi_i\in\mathbb{R},\ \sum\xi_i=0\}$$
$$(\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\mathfrak{g}=\sum_{i=1}^{7}\mathfrak{g}_i,\quad \mathfrak{p}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2+\mathfrak{g}_5+\mathfrak{g}_7$$

とおき，$\mathfrak{g}$ に内積 $(\ ,\ )$ を $(X,Y)=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,XY$ で定義すれば，$\mathfrak{g}=\mathbb{R}^{14}$, $\mathfrak{p}=\mathbb{R}^{8}$ と考えてよい。このとき

$$F(X)=-\frac{5}{4}(\mathrm{Tr}X^2)^3+18\,\mathrm{Tr}X^6,\quad X\in\mathfrak{p},\quad m_1=m_2=1$$

と $$F(X)=-\frac{5}{4}(\mathrm{Tr}X^2)^3+18\,\mathrm{Tr}X^6,\quad X\in\mathfrak{g},\quad m_1=m_2=2$$

は共に(4), (5) を満足する。このとき $|p|<1$ に対して

$$M_p=\begin{cases} SU(2)/T^2 & (\mathfrak{g}=\mathbb{R}^{14}) \\ G_2/T^2 & (\mathfrak{p}=\mathbb{R}^{8}). \end{cases}$$

注. $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$ の自己同型の全体から成るLie群のLie環である。即ち $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$ の derivation の全体である。

例10. $g=4$ とする。$\mathbb{F}$ によって $\mathbb{H}$ または $\mathbb{K}$ を表わす。r を自然数とする。普通の内積を考えて $\mathbb{F}^{2(r+1)}$ と $\mathbb{R}^{n+2}$ を同一視してもよい $(n+2=8(r+1),16(r+1))$。$\mathbb{R}^{n+2}=\mathbb{F}^{r+1}\times\mathbb{F}^{r+1}\ni(u,v)$ に対して

$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $u_0, v_0 \in \mathbb{F}$, $u_1, v_1 \in \mathbb{F}^r$ と分解する。

$$F_0(u,v) = 4(\|{}^t u \bar{v}\|^2 - (u,v)^2) + (\|u_1\|^2 - \|v_1\|^2 + 2(u_0, v_0))^2$$

とおけば

$$F = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - 2F_0,$$

$$(m_1, m_2) = \begin{cases} (3, 4r) & (\mathbb{F} = \mathbb{H}) \\ (7, 8r) & (\mathbb{F} = \mathbb{K}) \end{cases}$$

は (4), (5) を満足する。

以上まとめて，方程式 (4), (5) において一般解のわかっていない場合は次の通りである：

① $g = 4$, $m_1 \geq 3$, $m_2 \geq 3$

② $g = 6$, $m_1 = m_2 \geq 1$.

文献

[1] E. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, Annali di Mat., 17(1938), 177-191.

[2] E. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques, Math. Z., 45 (1939), 335-367.

[3] E. Cartan, Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces, C. R. Congrès Math. Liège, 1939, 30-41.

[4] E. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et 9 dimensions, Revista Univ. Tucuman, serie A, 1(1940), 5-22.

[5] W. Y. Hsiang & H. B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. Differential Geometry, 5(1971), 1-38.

[6] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, to appear.

[7] H. Ozeki & M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I, II, to appear.

[8] R. Takagi, A class of hypersurfaces with constant principal curvatures in a sphere, to appear.

[9] R. Takagi & T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a sphere, Differential Geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 469-481.