数理解析研究所講究録
第220巻 1974年 77-90

正曲率のコンパクト等質空間について

大阪大学　　竹内勝

次元が2以上のRiemann多様体Mに対して，そのすべての断面曲率が正であるとき，簡単のため，Mは<u>正曲率をもつ</u>ということにしよう。正曲率をもつコンパクト単連結Riemann多様体の下部位相多様体としては古くから

(i)　階数1のコンパクト単連結対称空間，すなわち，球面，複素射影空間，実四元数体上の射影空間，Cayley射影平面 $P_2(\mathbb{K})$

が知られている。このほかの例として，近年

(ii)　Berger [1] による奇数次元（7次元，13次元）の例

(iii)　Wallach [5] による偶数次元（6，12，24次元）の例

(iv)　Wallach [6] による7次元の例無限個

が見出された。ここでは，これらの例について(iii)，(iv)を中心にしてその構成法を紹介したい。

これらの例はじつはいずれも<u>等質</u>である，すなわち，Mの等長変換群がM上可移的である。実際，Mが正曲率をもつこ

とを確かめるためには，Mが等質であるならば，Mのある1点を通る平面についてだけ断面曲率が正になることを確かめれば十分であるから，例を作るのが容易になる。

そこでまず，等質Riemann多様体の一般論の復習をしよう。（例えば Kobayashi-Nomizu [3] を参照）Gをコンパクト連結Lie群，Kをその閉部分群とする。

$$M = G/K$$

とし，GはMにほとんど効果的に作用しているものとする。Mの原点Kをoで表わす。G, KのLie代数をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とする。$X \in \mathfrak{g}$ の生成するM上のベクトル場を X^* で表わす。M上のG不変なRiemann計量 $\langle\, ,\, \rangle$ を1つとって固定する。$\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{k}$ の補空間 $\mathfrak{p}$ を1つ，K（の $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用に関して）不変であるようにとって固定する。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \quad \text{（K空間としての直和）}$$

$X \in \mathfrak{g}$ の $\mathfrak{k}$ 成分，$\mathfrak{p}$ 成分をそれぞれ $X_{\mathfrak{k}}$, $X_{\mathfrak{p}}$ で表わす。$\mathfrak{p}$ はMの原点oにおける接空間 $T_o(M)$ と同一視される。G不変なRiemann計量 $\langle\, ,\, \rangle$ の定める $\mathfrak{p}$ 上のK不変な内積も $\langle\, ,\, \rangle$ で表わす。MのLevi-Civitaの接続を ∇ で表わせば，∇ はM上のG不変な線形接続である。このほかにM上にはG不変な線形接続 $\bar{\nabla}$ で，原点oにおいて

$$\bar{\nabla}_{X^*} Y^* = -\tfrac{1}{2}[X, Y]^* \qquad X, Y \in \mathfrak{p}$$

をみたすものが一意的に存在する。この２つの線形接続の差 $U=\nabla-\overline{\nabla}$ はM上のG不変な(1,2)型のテンソル場で

$$\langle U(X,Y),Z\rangle=\frac{1}{2}\{\langle [Z,X]_{\mathfrak{p}},Y\rangle+\langle [Z,Y]_{\mathfrak{p}},X\rangle\}\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{p}$$

をみたす。Mの曲率テンソル場Rは $X,Y\in\mathfrak{p}$ に対し

$$(*)\quad \langle R(X,Y)Y,X\rangle=-\frac{3}{4}\langle [X,Y]_{\mathfrak{p}},[X,Y]_{\mathfrak{p}}\rangle-\langle [[X,Y]_{\mathfrak{k}},Y],X\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\langle Y,[X,[X,Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}\rangle-\frac{1}{2}\langle X,[Y,[Y,X]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}\rangle+\langle U(X,Y),U(X,Y)\rangle-\langle U(X,X),U(Y,Y)\rangle$$

をみたす(Wallach [5])。Mが正曲率をもつための条件は（$\dim M\geqq 2$ であって）

(P)　$X,Y\in\mathfrak{p}$ が１次独立ならば $\langle R(X,Y)Y,X\rangle>0$

となる。とくに，$\mathfrak{p}$ 上のK不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が，$\langle\mathfrak{k},\mathfrak{p}\rangle=\{0\}$ をみたす $\mathfrak{g}$ 上のG不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に拡張される（このようなG不変Riemann計量をBergerにしたがって正規であるということにする）ときには，$U=0$ であって

$$\langle R(X,Y)Y,X\rangle=\frac{1}{4}\langle [X,Y]_{\mathfrak{p}},[X,Y]_{\mathfrak{p}}\rangle+\langle [X,Y]_{\mathfrak{k}},[X,Y]_{\mathfrak{k}}\rangle$$

となるから，正曲率の条件は

(P)′　$X,Y\in\mathfrak{p}$ が１次独立ならば $[X,Y]\neq 0$

という（内積によらない）代数的条件になる。さらに，$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ が対称対である場合には，正曲率の条件は

(P)″　対称対 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ の階数は１

となる。したがって，(i)の空間は正規不変Riemann計量に関して正曲率をもつ。以後，(G,K)は条件(P)をみたすとしよう。

Gの中心の連結成分をZで表わし，

$$G_1=[G,G],\quad K_1=G_1\cap ZK,\quad M_1=G_1/K_1,\quad \hat{Z}=Z/Z\cap K$$

とおく。$\pi: Z\longrightarrow \hat{Z}$を射影準同形とする。$G_1$は$M_1$にほとんど効果的に作用する。$K_1\ni zk$ ($z\in Z$, $k\in K$)に対して$\rho(k_1)=\pi(z)$と定めることによって，準同形

$$\rho: K_1\longrightarrow \hat{Z}$$

が定義される。K_1は直積$G_1\times\hat{Z}$に，G_1への右作用とρによる$\hat{Z}$への左作用によって作用する。このとき，商多様体$G_1\times_{K_1}\hat{Z}$はMと微分同相になる。実際，$(g_1,\pi(z))\in G_1\times\hat{Z}$の類に$(g_1z)o\in M$を対応させる写像が微分同相を与える。したがって，主バンドル

$$\hat{Z}\longrightarrow M\longrightarrow M_1$$

が得られる。ファイバー$\hat{Z}$はMのなかで全測地的で平坦である。底空間M_1に，射影がRiemannian submensionとなるようにRiemann計量を導入すれば，これはG_1不変Riemann計量で，やはり正曲率をもつ（O'Neillの定理）。Mが単連結ならばM_1も単連結である。

KはK_1と準同形ρから

$$K=\{z^{-1}k_1\ ;\ z\in Z,\ k_1\in K_1,\ \rho(k_1)=\pi(z)\}$$

として再構成される。

$$L_1=G_1\cap K$$

とおくと，L_1 は準同形 ρ の核に一致し，したがって K_1 の正規閉部分群である。また，自然な仕方で

$$M = G_1/L_1$$

と同一視される。したがって，M は正曲率の G_1 不変な Riemann 計量をもつ。G_1 は M にほとんど効果的に作用する。したがって，下部位相多様体だけを問題にする限り，G は半単純であると仮定してよい。

<u>定理 1</u>（Wallach [5]）

(a) $\dim M$ が偶数のとき，G は単純で，G の階数 $=$ K の階数。

(b) $\dim M$ が奇数のとき，$\dim Z \leq 1$ で，G の階数 $=$ K の階数 $+1$。

(b) の場合に $\dim Z = 1$ ならば，準同形 ρ は自明でない。実際，自明であるとすると，主バンドル $\hat{Z} \longrightarrow M \longrightarrow M_1$ が自明になって M の基本群は無限群になる。これは，正曲率をもつコンパクト Riemann 多様体の基本群は有限である（Myers の定理）ことに矛盾する。したがって，L_1 は K_1 の余次元 1 の正規閉部分群である。

一般に，有限次元実 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその部分代数 $\mathfrak{k}$ の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して，$\mathfrak{g}$ を Lie 代数にもつ単連結 Lie 群 $\tilde{G}$ のなかで，$\mathfrak{k}$ が閉部分群 $\tilde{K}$ を生成するとき，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の<u>閉部分代数</u>であると

いうことにしよう。

さて，われわれの $M=G/K$ より得られるLie代数の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は以下の条件をみたす。

(1) $\mathfrak{g}$ はあるコンパクトLie群のLie代数であって，$\mathfrak{k}$ はその閉部分代数である。

(2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は効果的な対である。すなわち，$\mathfrak{k}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ のイデアルは $\{0\}$ だけである。

(3) $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \geqq 2$。

(4) $\mathfrak{k}$ 不変な $\mathfrak{k}$ の補空間 $\mathfrak{p}$ と，$\mathfrak{p}$ 上の $\mathfrak{k}$ 不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在して，条件(P)をみたす。

正規不変Riemann計量の場合には，(4)の代りにつぎの(4)$'$をみたす。

(4)$'$ $\mathfrak{g}$ 上に $\mathfrak{g}$ 不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が存在して，$\mathfrak{k}$ の直交補空間 $\mathfrak{p}$ は条件(P)$'$をみたす。

逆に，上の(1)～(4)（または(4)の代りに(4)$'$）をみたすLie代数の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が与えられたとき，$\mathfrak{g}$ をLie代数にもつコンパクト連結Lie群 G で以下の性質をもつものが存在する：$\mathfrak{k}$ の生成する G の連結Lie部分群 K は G の閉部分群で，$M=G/K$ は自然な仕方で $\tilde{G}/\tilde{K}$ と同一視され（したがって M は単連結），正曲率の（正規）G 不変Riemann計量をもつ。

(1)～(4)（または(4)の代りに(4)$'$）をみたすLie代数の対

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ および $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$ に対して，同形 $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ で $\alpha(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}'$ をみたすものが存在するとき，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ と $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$ は<u>同形</u>であるという。明らかに，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ と $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$ が同形ならばこれらから定まる M と M' は微分同相である。しかし，M と M' が微分同相であっても $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ と $(\mathfrak{g}', \mathfrak{k}')$ が同形であるとは限らない。例えば，奇数次元の球面 S^{2n-1} は

$$S^{2n-1} = SO(2n)/SO(2n-1) = SU(n)/SU(n-1)$$

と表わされ，S^{2n-1} の通常の正曲率の Riemann 計量は $SO(2n)$ と $SU(n)$ で不変である。以後，(1) ～ (4)（または (4) の代りに (4)$'$）をみたす対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を<u>（正規）許容対</u>とよぶ。

Berger [1] は正規許容対（の同形類）を分類した。その結果，(i) の多様体と同相でない M として（(ii) の例）

$$M = Sp(2)/SU(2) \qquad \dim M = 7$$

$SU(2) \subsetneq Sp(2)$ は 4 次元の既約表現

$$M = SU(5)/T^1 \cdot Sp(2) \qquad \dim M = 13$$

ここで，T^1 は $U(4)$ のスカラー行列全体のなすトーラス

$$T^1 \cdot Sp(2) \subset T^1 \cdot SU(4) = U(4) \subset SU(5)$$

を見出した。これらの M の正規不変 Riemann 計量は正数倍を除いて一意的である。

Wallach [5] は (a) $\dim M$ が偶数である場合に許容対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を分類した。分類は次の補題を用いてなされる。

補題 $\mathfrak{g}$をコンパクト半単純Lie代数，$\mathfrak{t}$をその1つの極大可換部分代数，$\mathfrak{k}$を$\mathfrak{t}$を含む$\mathfrak{g}$の部分代数とする。$(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$の根系を$\Delta$，$(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$の根系を$\Delta_1$とする。対$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$が条件(4)をみたすならば

$$\alpha,\beta\in\Delta-\Delta_1,\ \alpha\neq\pm\beta \Longrightarrow \alpha+\beta\in\Delta \text{ または } \alpha-\beta\in\Delta$$

をみたす。

この補題は曲率の式(*)より証明される。この結果，(i)の多様体に同相でないMとして（(iii)の例）

$$M = SU(3)/T^2 \qquad \dim M = 6$$

T^2 は $SU(3)$ の極大トーラス

$$M = Sp(3)/Sp(1)\times Sp(1)\times Sp(1) \qquad \dim M = 12$$

$$M = F_4/Spin(8) \qquad \dim M = 24$$

ここで，$Spin(8)\subset Spin(9)\subset F_4$，$F_4/Spin(9)=P_2(\mathbb{K})$

が見出された。これらのMはいずれも球面の等質超曲面に微分同相である。しかし，その正曲率のRiemann計量は球面から引きおこされたものではない。

さらに，(b) $\dim M$が奇数で，$\mathfrak{g}$の中心子の次元が1である場合にも許容対$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$の分類ができる。この場合，さきに述べた$G_1, K_1, L_1$のLie代数をそれぞれ$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{k}_1,\mathfrak{l}_1$とすれば

(α) $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{k}_1)$は，$\dim\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1$が偶数である許容対

(β) $\mathfrak{l}_1$は$\mathfrak{g}_1$の閉部分代数で，$\mathfrak{k}_1$の余次元1のイデアル

をみたす。Lie代数の3つ組$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{t}_1)$の同形を対の場合と同様に定義すると，$\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$が奇数，$\dim \mathfrak{z} = 1$である許容対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$の同形類全体から，(α),(β)をみたす3つ組$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{t}_1)$の同形類全体への自然な写像が定義される。この写像は単射であるが，全射ではない。(α)をみたす$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1)$のWallachの分類を用いて$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$が分類される。結果は

(イ) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{u}(n), \mathfrak{u}(n-1))$ $(n \geq 2)$, $\quad M = S^{2n-1}$

(ロ) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{sp}(n), \mathfrak{t}^1 \oplus \mathfrak{sp}(n-1))$ $(n \geq 2)$, $\quad M = S^{4n-1}$

(ハ) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{u}(3), \mathfrak{t}^2)$, $\quad \dim M = 7$

(イ)の場合は，$G = U(n)$を$S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$に自然に作用させる。(ロ)の場合は，$G = Z \times Sp(n)$, $Z = \{\varepsilon \in \mathbb{C} \,;\, |\varepsilon| = 1\}$，を$S^{4n-1} \subset \mathbb{C}^{2n}$に

$$(\varepsilon, g) \cdot x = \varepsilon g x \qquad \varepsilon \in Z,\ g \in Sp(n),\ x \in S^{4n-1}$$

によって作用させる。(イ),(ロ)の場合は$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$の同形類は1つである。(ハ)の場合は，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$の分類は$SU(3)$の1つの極大トーラス$T^2$のなかの1次元部分トーラス$T$の（$T^2$を不変にする$SU(3)$の自己同形に関する）分類と同値である。$T^2$として，$SU(3)$の対角行列全体のなすトーラスをとれば，$T$の代表として

$$T_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i k\theta} & & \\ & e^{2\pi i l\theta} & \\ & & e^{-2\pi i (k+l)\theta} \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{array}{l} k, l \in \mathbb{Z} \\ (k, l) = 1 \\ |k| + |l| \neq 0 \end{array}$$

をとれる。T が $T_{1,-1}$ に共役である場合を除いて，対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$は許容対になる。このとき

$$(\#) \qquad H^4(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n, \qquad n = |k^2 + l^2 + kl|$$

となる。したがって，M は(i)の多様体と同相でなく，M のなかには同相でないものが無限個ある（(iv)の例）。

以上によって，許容対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$の分類で残っているものは，(b) $\dim M$ が奇数，$\mathfrak{g}$ が半単純であって，不変 Riemann 計量が正規でないものだけである。

以下，Wallach の例(iii)，(iv)の不変 Riemann 計量の定め方を説明しよう。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$を(1)～(3)をみたす Lie 代数の対とする。$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$ 不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle_0$ と $\mathfrak{g}$ の部分空間 V_1, V_2 が存在して

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + V_1 + V_2$ （$\langle\ ,\ \rangle_0$ に関する直交分解）

2) $\mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{k} + V_1$ とするとき，$\mathfrak{g}_{(1)}$ は $\mathfrak{g}$ の部分代数

3) $[V_2, V_2] \subset \mathfrak{g}_{(1)}$ （したがって$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(1)})$は対称対）

4) $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $X_i, Y_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$, $[X, Y] = 0$,

X, Y は1次独立 $\Longrightarrow [X_1, Y_1] \neq 0$

がなりたつとき，対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$は<u>条件(II)</u>をみたすという。$V_2 = \{0\}$ のときの条件(II)は条件(4)$'$と同値である。

<u>定理 2</u>（Wallach [6]）

対$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$は条件(II)をみたすとする。

$$\mathfrak{f} = V_1 + V_2$$

とおいて，$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{k}$ 不変な内積 $\langle\ ,\ \rangle_t$ $(-1<t<0)$ を

$$\langle X_1+X_2,\ Y_1+Y_2\rangle_t=(1+t)\langle X_1,Y_1\rangle_0+\langle X_2,Y_2\rangle_0 \qquad X_i,Y_i\in\mathfrak{V}_i\ (i=1,2)$$

によって定義すれば，$\langle\ ,\ \rangle_t$ は条件(4)をみたす。

この定理は曲率の式(*)を $\langle\ ,\ \rangle_t$ について計算することによって証明される。

__例 1__　$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(3)$，$T_{1,-1}$ に共役でない $T_{k,l}$ の Lie 代数を $\mathfrak{k}$ とする。$\mathfrak{k}$ は

$$h_{k,l}=\begin{pmatrix}2\pi ik & & \\ & 2\pi il & \\ & & -2\pi i(k+l)\end{pmatrix}$$

で張られる。

$$\langle X,Y\rangle_0=-\mathrm{tr}\,XY \qquad X,Y\in\mathfrak{g}$$

とおく。

$$\mathfrak{g}_{(1)}=\left\{\begin{pmatrix}X & \\ & -\mathrm{tr}X\end{pmatrix}\ ;\ X\in\mathfrak{u}(2)\right\},\quad したがって\ \mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}_{(1)}$$

と定義し，$\mathfrak{g}_{(1)}$ における $\mathfrak{k}$ の直交補空間を $\mathfrak{V}_2$ とする。このとき，$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ は（これらの材料に関して）条件(II)をみたす。

したがって

$$M=SU(3)/T_{k,l}$$

は正曲率の $SU(3)$ 不変 Riemann 計量をもつ。このことから対応する $(\mathfrak{u}(3),\ \mathfrak{t}^2)$ が条件(4)をみたすことが証明される。

__例 2__　Wallach の偶数次元の３つの例の $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ はいずれも条

件(II)をみたす。

おわりに，(#)の証明を与えよう。

$$T = T_{k,\ell}$$

とおいて，ファイバー・バンドル

$$M \longrightarrow B_T \xrightarrow{\rho} B_{SU(3)}$$

を考える。ここで，B_G は G の分類空間を表わす。

$$H^*(B_T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t]$$

である。ここで，t は普遍Tバンドルの才1 Chern 類でつぎのようにして与えられる。$h_{k,\ell}$ は $\pi_1(T) \cong H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元で，$h_{k,\ell}$ の双対元（$\in H^1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$）に普遍Tバンドルの transgression をほどこしたものの(−1)倍が t である。

また

$$H^*(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_2, c_3]$$

である。ここで，c_i（$i = 2, 3$）は普遍SU(3)バンドルの才 i Chern 類である。

$$\rho^* : H^*(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(B_T, \mathbb{Z})$$

は Borel - Hirzebruch [2] より計算できて，とくに

$$\rho^*(c_2) = (k\ell - \ell(k+\ell) - (k+\ell)k)t^2 = -(k^2+\ell^2+k\ell)t^2$$
$$= \pm r t^2$$

となる。$B_{SU(3)}$ は単連結で

$$H^i(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) = \{0\} \quad (0<i<4), \quad H^i(M, \mathbb{Z}) = \{0\} \quad (0<i<2)$$

であるから，ファイバー・バンドル ξ に対する Serre [4] の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} H^4(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^4(B_T, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^4(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau} & H^5(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & & & \| \\ \mathbb{Z}\ (\text{生成元 } c_2) & & \mathbb{Z}\ (\text{生成元 } t^2) & & & & \{0\} \end{array}$$

より，(#) を得る。

また，同じ完全系列の低次の部分

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(B_T, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(B_{SU(3)}, \mathbb{Z}) \\ \| & & \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} & & & & \| \\ \{0\} & & \mathbb{Z}\ (\text{生成元 } t) & & & & \{0\} \end{array}$$

より

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

を得る。一方，Berger [1] より

$$H^*(Sp(2)/SU(2), \mathbb{R}) \cong H^*(S^7, \mathbb{R})$$

が知られているから，これらの M は Berger の 7 次元の例とも異なる。

文献

[1] M. Berger; Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictment positive; Ann. Scoula Norm. Pisa 15 (1961), 179-246.

[2] A. Borel - F. Hirzebruch; Characteristic classes and homogeneous spaces I; Amer. J. Math. 80 (1958), 459-538.

[3] S. Kobayashi - K. Nomizu; Foundations of Differential Geometry; Interscience, New York, 1969.

[4] J. P. Serre; Homologie singuliére des espaces fibrés; Ann. Math. 54 (1951), 425-505.

[5] N. R. Wallach; Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature; Ann. Math. 96 (1972), 277-295.

[6] ———— ; An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures; preprint.