数理解析研究所講究録
第 221 巻 1974 年 28-37

変換群の現状と問題点 I)
（ホモトピー射影空間の上の S^1, Z_p, T^r-作用についての近況報告 ）

津田塾大 吉田 朋好

序

ホモトピー複素射影空間の上の、S^1, Z_p, T^r-作用についての、主に Hsiang 兄弟、G.E. Bredon、T. Petrie らによる研究の結果を紹介する。以下 $\mathbb{C}P^n$ は複素 n 次元複素射影空間、$\mathbb{R}P^n$ は n 次元実射影空間をあらわす。

§1. 固定点集合の Cohomology ([7], [8], [10] 等)

以下で $X \sim_p Y$ とは $H^*(X; Z_p) \cong H^*(Y; Z_p)$
(p : 素数)

$X \sim_Z Y$ とは $H^*(X; Z) \cong H^*(Y; Z)$

を意味する。

__定理__. X を有限 CW 複体とホモトピー同値な位相空間で、$X \sim_p \mathbb{C}P^n$ とする。Z_p が X の上に作用し、その固定点

集合を $F=\bigcup F_j$ （F_j は連結成分）とする。このとき、次のことが成り立つ。

a). $F_j \sim_p \mathbb{C}P^{n_j}$ 又は $\mathbb{R}P^{n_j}$ $\quad \exists n_j \leqq n$.

$\Sigma(n_j+1) = n+1$. 又.

F_j の数は p をこえない。

ただし、$p\neq 2$ のときは $\mathbb{R}P^{n_j}$ はあらわれない。

b). $F_j \sim_p \mathbb{C}P^{n_j}$ ならば

$$H^2(X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^2(F_j;\mathbb{Z}_p) \quad (\text{制限写像})$$

（証明は

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X\times_{\mathbb{Z}_p} E\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B\mathbb{Z}_p \\ \cup & & \cup & & \parallel \\ F & \longrightarrow & F\times B\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B\mathbb{Z}_p \end{array}$$

に関するスペクトル系列による。ここに $E\mathbb{Z}_p \to B\mathbb{Z}_p$ は普遍 $\mathbb{Z}_p$－バンドル。）

<u>定理.</u> X を有限CW複体とホモトピー同値な位相空間で $X\sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^n$ とする。S^1 が X に作用し、その固定点集合が $F=\bigcup F_j$ （F_j は連結成分）であるとする。このとき次のことが成り立つ。

・$F_j \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^{n_j}$ $\quad \exists n_j \leqq n$

$\sum(n_j+1)=n+1$ 、又

$H^2(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{} H^2(F_j;\mathbb{Z})$ （制限写像）

これらの定理の証明は、$X \to X\times_G EG \to BG$ （$G=\mathbb{Z}_p, S^1$）に関するCohomologyスペクトル系列の、初等的ではあるが、巧みな適用によってなされる。

§2. $(X\times_{S^1} ES^1)$ の Cohomology （W. Y. Hsiang, [10] VII 参照）

<u>定理</u> Xを有限CW複体とホモトピー同値な位相空間とし、$X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} \mathbb{C}P^n$ とする。X に S^1 が作用していて、その固定点集合が F であるとする。$j: F \to X$ を包含写像とする。このとき、

$$j^*: H^*(X\times_{S^1} ES^1;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(F\times BS^1;\mathbb{Z})$$

は単射。又、

$$H^*(X\times_{S^1} ES^1;\mathbb{Z}) \cong H^*(BS^1;\mathbb{Z})[\alpha] \Big/ \prod(\alpha-c_j t)^{n_j+1}$$

とかかれる。ここに、

n_j は、$F=\bigcup F_j$ （F_j は連結成分）で

$F_j \underset{\mathbb{Z}}{\sim} \mathbb{C}P^{n_j}$

α は、$H^2(X\times_{S^1} ES^1)$ の元で、制限写像によって、

$H^2(X)$ の生成元に写されるもの.

t は, $H^2(BS^1;\mathbb{Z})$ の生成元.

c_j は, $j^*(\alpha) = c \otimes t + \cdots \quad \in H^2(F \times BS^1;\mathbb{Z})$

$c \in H^0(F;\mathbb{Z})$

とした時 $c = \Sigma c_j \in H^0(F;\mathbb{Z}) = \Sigma H^0(F_j;\mathbb{Z})$

となる c_j をあらわす。

上の定理は, $X \times_{S^1} ES^1$ の Cohomology に関しては, $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用と、一般の $X \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^n$ なる X 上の S^1-作用とは区別のないことを示している。

§3. ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 上の S^1-作用 (T. Petrie の結果. [11], [13], [14], [15])

ここでは ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 上のなめらかな S^1-作用に関する、T. Petrie の結果について紹介する。

X を ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ であるなめらかな多様体. $h: X \to \mathbb{C}P^n$ をホモトピー同値を与えるなめらかな写像とする。H を $\mathbb{C}P^n$ 上の Hopf line bundle とし. h による H の引きもどしを. η であらわす。

次の仮定をおく

<u>仮定</u>(*) X の上に S^1 がなめらかに作用し. 固定点集合は.

$(n+1)$ 個の離散的な点集合 $\{p_i\}_{0\leq i\leq n}$ とする。

整数の組 $\{a_i\}_{0\leqq i\leqq n}$, $\{x_{ij}\}_{0\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq n}$ を次のように定義する。

$\{a_i\}$: X 上の S^1-作用が η のバンドル-作用に lift できることを使って、η を S^1-バンドルとする。このとき、$\eta|p_i$ での η のファイバーへの S^1の表現を t^{a_i} とする（ここに t は $R(S^1)$ の basic character).

$\{x_{ij}\}$: X の接バンドルを TX とし、$TX|p_i$ における S^1 の表現を $\sum_{j=1}^{n} t^{x_{ij}}$ とする。

注 : X 上の S^1-作用が η に lift できることは $H^1(X;Z)=0$ による。[18], [19] 参照。lift の仕方は一意的ではない。したがって $\{a_i\}$ は一意に定まらないが、差 $\{a_j-a_i\}$ は一意に定まる.

<u>定理</u> $\hat{A}(X)=\Pi(\gamma_i/2)(\sinh\gamma_i/2)^{-1}$
（ここに γ_i^2 の symmetric function = Pontrjagin class)

は、η と $\{x_{ij}\}$ によってきまる。

系

$$\xi_i(t) = \prod_{j\neq i}\left(t^{-(a_j-a_i)/2} - t^{(a_j-a_i)/2}\right)\prod\left(t^{-x_{ij}/2} - t^{x_{ij}/2}\right)^{-1}$$

とおく。

$\xi_i(t)$ が i によらないならば、$h^*\hat{A}(\mathbb{C}P^n) = \hat{A}(X)$

この定理と、系によって仮定 $(*)$ をみたすような S^1-作用を許すホモトピー $\mathbb{C}P^n$ はかなり限られたものになることがわかる。

$\{a_i\}$ と $\{x_{ij}\}$ の関係については、$\{a_j-a_i\}_{j\neq i}$ と $\{x_{ij}\}$ とが（i を固定して）一致するかどうかという W. Y. Hsiang による問題があったが、T. Petrie は、[11] に於て、両者が一致しない例を $\mathbb{C}P^3$ 上に構成した。

$\{a_i\}$ と $\{x_{ij}\}$ の関係については次の定理がある。

<u>定理</u>：
$$\prod_{j\neq i}(a_j-a_i) = \pm\prod_{j=1}^{n} x_{ij}$$

この定理は Cohomological な手段によって証明される。
（[10] VII）.

Petrie は equivariant K-理論 $K_{S^1}^*(?)$ を用いて、さらに詳しい次の定理を得た（[11]）。

定理　整数 $m\ (>0)$ に対して、

$n_i(m) = m \mid (a_j - a_i)$ であるような $j\ (\neq i)$ の数

$d_i(m) = m \mid x_{ij}$ であるような j の数

とおき、

$$\delta_i(m) = n_i(m) - d_i(m)$$

とおく。このとき

$$\delta_i(m) \geqq 0\ , \qquad \delta_i(p^r) = 0 \quad \text{if } p^r : \text{素数の巾.}$$

が成り立つ。

§4 ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 上の T^n 作用.（[12]）

T^n を n 次元トーラスとし、ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 上のなめらかな T^n 作用についての Petrie [12] の結果を紹介する。

定理. X をホモトピー $\mathbb{C}P^n$、$h : X \to \mathbb{C}P^n$ をホモトピー同値を与える、なめらかな写像とする。n 次元トーラス T^n が X になめらかに、かつ、効果的に作用しているならば

$$h^* \mathcal{A}(\mathbb{C}P^n) = \mathcal{A}(X)$$

が成り立つ。

この定理は、T^nの適当な部分群S^1に§3に述べた定理の系を適用することによって得られる。

問題

1) $h : X \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ 向きを保つホモトピー同値写像（Xはなめらかな閉じた多様体）。もし、Xが、自明でないS^1-作用をもつならば $h^*\hat{A}(\mathbb{C}P^n) = \hat{A}(X)$ か？

2) M：なめらかな閉じた多様体

$$\max\{n \mid T^n \text{がなめらかに、かつ、効果的に} M \text{にはたらく}\}$$

を求めること。

3) とくに、ホモトピー$\mathbb{C}P^3$上の効果的T^2作用はどの程度、存在するか？

4) 問題1）に於ける $h^*\hat{A}(\mathbb{C}P^n) = \hat{A}(X)$ は、Xが効果的なT^n-作用をもつための十分条件か？

文献.

36

1. Atiyah.M.F. : "K-Theory" Benjamin New York 1967

2. Atiyah M.F. and Hirzebroch F. Spin-manifolds and group actions, Essays on Topology and Related Topics pp.18 — 28 Springer-Verlag, Berlin and New York 1970.

3. Atiyah M.F. and Segal G.B. : The index of elliptic operators II Ann.of Math. 87 (1968) 531 — 545

4. Atiyah M F. and Segal G.B. : Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry 3 (1969) 1 — 18

5. Atiyah M.F. and Singer I.M. : The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87 (1968) 484 — 530.

6. Atiyah M.F. and Singer I.M. : The index of elliptic operators III. Ann. of Math. 87 (1968) 546 — 604.

7. Bredon G.E. : The cohomology ring structure of a fixed point set. Ann. of Math. 80 (1964) 524 — 537

8. Bredon G.E. : Cohomological acpects of transformation groups, "Proc. Conf. Transformation Groups, New Orleans 1967" pp 245 — 280. Springer Verlag 1968

9. Bredon G.E. : Representations at fixed points of smooth actions of compact groups. Ann. of Math. 89 (1969) 515 — 532

10. Bredon G.E. : "Introduction to Compact Transformation Groups" New York - London ; Academic Press 1972

11. Petrie T. : Smooth S^1-actions on homotopy complex projective spaces and related topics. Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972)

12. Petrie T. : Torus actions on homotopy complex projective spaces. Inventiones math. 20. (1973) 139 — 146.

13. Petrie T. : Smooth S^1-actions and bilinear forms. Bull. A.M.S. 79 1056 — 1059

14. Petrie T. : Exotic S^1-actions on CP^3 and related topics. Inventiones math. 17 317–328.

15. petrie T. : Induction in equivariant K-theory and geometric applications Proc. Conference on Algebraic K-theory Ⅲ Springer Lecture Note 343

16. Petrie T. : Real algebraic actions on complez projective spaces — a survey Ann. l'Inst. Fourier (to appear)

17. Petrie T. : A setting for smooth S^1-actions with applications to real algebraic actions on CP^{4n-1} (to appear)

18. Stewart T.E. : Lifting group actions in fibre bundles Ann. of Math. 74 (1961) 192-198.

19. Su J.C. : Transformation groups on cohomology projective spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 305-318.