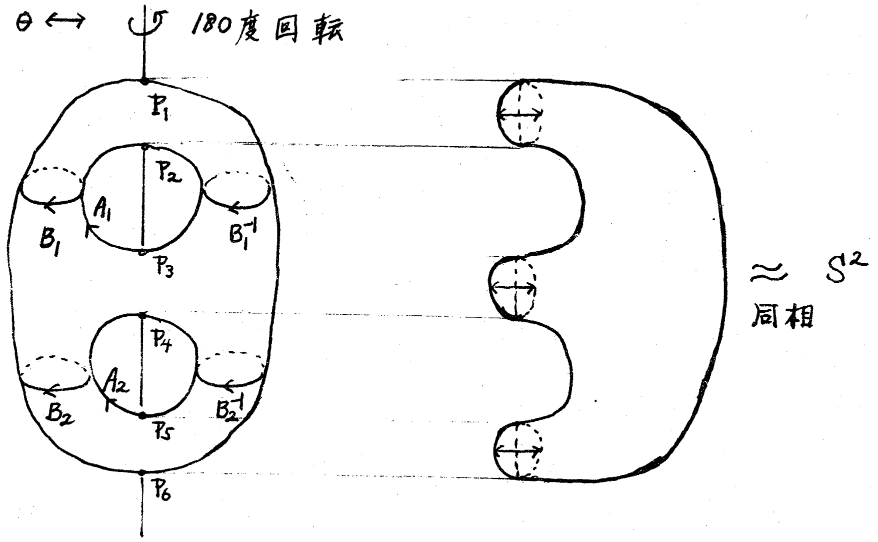
数理解析研究所講究録
第 221 巻 1974 年 63-69

M_2 上の holomorphic θ-line bundles

島根大文理
松永弘道

1.

M_2 を genus 2 の compact Riemann surface とする。[2] の Theorem 25 (p 228) および p 244 によれば M_2 は holomorphic involution θ をもち, M_2/θ は complex projective line $\mathbb{P} = S^2$ となる。θ は 6 個の fixed points をもつ。さらに Corollary 1 (p 246) によれば, この様な θ は一意に存在する。このことから θ は位相的には次の図の様な involution であることがわかる。



$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ は θ による固定点であって, θ によって一次元 homology basis は次の様に変換される。

$$A_1 \longrightarrow (-A_1),\quad B_1 \longrightarrow (-B_1),\quad A_2 \longrightarrow (-A_2),\quad B_2 \longrightarrow (-B_2)$$

目標 M_2 上の holomorphic θ-line bundles の同値類の個数は各 degree について有限であることを示すこと。

$\mathcal{O}^*$ を M_2 上の sheaf of germs of nowhere vanishing holomorphic functions とすると $\mathcal{O}^*$ は θ-sheaf である。何となれば f_x を x に

おける holomorphic function の germ とするとき，θ の作用 $\tilde{\theta}$ を

$$\tilde{\theta}(f_x) = (f\circ\theta^{-1})_{\theta(x)}$$

で定義すればよいからである。

性質1．M_2 上の holomorphic line bundles の各同値類は高々2個の holomorphic θ-line bundles の同値類を含む。

証明　[1] の 143-03 を $\mathcal{G}=\mathcal{O}^*$, $\pi = Z_2$ の場合に適用すると

$$\text{(I)}\quad e \to H^1(Z_2, H^0(M_2,\mathcal{O}^*)) \xrightarrow{i} H^1(M_2, Z_2\,;\,\mathcal{O}^*) \to H^1(M_2,\mathcal{O}^*)^{Z_2}$$

において $H^0(M_2,\mathcal{O}^*) = \Gamma(M_2,\mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$ （M_2 は compact，$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ M_2 上の holomorphic function $M \to \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ は定数であるから $H^1(Z_2, H^0(M,\mathcal{O}^*))$ の元 $\{\varphi\}$ に対して

$$1 = \varphi(\theta^2) = \varphi(\theta)\cdot\varphi(\theta), \quad \therefore\ \varphi(\theta)=\pm 1。$$

よって φ と φ' とが同値であるための必要十分条件は

$$\exists\, m \in H^0(M,\mathcal{O}^*) \ \text{s.t.}\ \varphi'(\theta) = m\,\varphi(\theta)\,(\theta\cdot m)^{-1} = \varphi(\theta)$$

よって $\varphi=\varphi'$ が成りたつことである。従って

$$H^1(Z_2, H^0(M,\mathcal{O}^*)) = Z_2$$

が得られる。証明終り。

定義　$\mathfrak{S}$ を M_2 上の θ-sheaf とする。U を M_2 上の一つの開集合とし，$\Gamma(U,\mathfrak{S})$ を U 上のすべての section のなす abel 群とするとき，

$$\theta : \Gamma(U,\mathfrak{S}) \longrightarrow \Gamma(\theta U,\mathfrak{S})$$

を

$$(\theta s)(y) = \tilde{\theta}(s\cdot\theta^{-1}(y))$$

で定義する。

この定義を transition function $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{O}^*$ に適用すると $\theta g_{ij} : \theta U_i \cap \theta U_j \longrightarrow \mathcal{O}^*$ は次の式をみたす。

$$(\theta g_{ij})(y) = \tilde{\theta}(g_{ij}\cdot\theta^{-1}(y)) = (g_{ij}\cdot\theta^{-1})_y .$$

従って θ は自己同型写像 $\theta : H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*)$ をひきおこす。

性質2. $E \longrightarrow M_2$ を holomorphic θ-line bundle とすると, $\theta\{E\} = \{E\}$ がなりたつ。ただし $\{E\}$ は E の同値類を表わす。

証明. M_2 は holomorphic θ-line bundle であるから $\theta : M \longrightarrow M$ の lift としての involution $\bar{\theta} : E \longrightarrow E$ をもつ。$\hat{\theta}_i$ を $\psi_{\theta(i)}\circ\bar{\theta}\circ\psi_i^{-1}$ で定義する。ただし $\psi_{..}$ は E の local triviality である。

すると可換図式

$$\begin{tikzcd}
(U_i \cap U_j)\times \mathbb{C} \arrow[r, "\hat{\theta}_i"] & (\theta U_i \cap \theta U_j)\times \mathbb{C} \\
E|U_i \cap U_j \arrow[u, "\psi_i"] \arrow[r, "\bar{\theta}"] \arrow[d, "\psi_j"] & E|\theta U_i \cap \theta U_j \arrow[u, "\psi_{\theta(i)}"] \arrow[d, "\psi_{\theta(j)}"] \\
(U_i \cap U_j)\times \mathbb{C} \arrow[r, "\bar{\theta}_j"] & (\theta U_i \cap \theta U_j)\times \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

から $g_{\theta(i)\theta(j)} = \hat{\theta}_j\cdot(g_{ij}\circ\theta^{-1})\cdot\hat{\theta}_i^{-1}$ が得られ $(g_{\theta(i)\theta(j)})$ と $(g_{ij}\circ\theta^{-1})$ とは同値となる。証明終り。

$\mathfrak{P}_0(M) = \{\xi \in H^1(M, \mathcal{O}^*) ; c_1(\xi) = 0\}$ とおく。ただし, c_1 は first Chern class を表わす。Chern class の naturality によって θ は自己同型 $\theta : \mathfrak{P}_0(M) \longrightarrow \mathfrak{P}_0(M)$ をひきおこす。

$\mathcal{O}^{1,0}$ を M_2 上の the sheaf of germs of abelian differentials とし, δ を sheaves の exact sequence $0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^{1,0} \longrightarrow 0$ に関連した cohomology exact sequence の coboundary とすると δ は中への同型となり, 次の自然な同型がなりたつ。[2] の P134.

$$\mathfrak{P}_0(M) \approx \frac{H^1(M_2, \mathbb{C})}{H^1(M_2, \mathbb{Z}) + \delta\Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})},$$

ここに $\mathbb{C}$ は複素数体を, $\mathbb{Z}$ は整数全体のなす加群を, $\Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})$ は abelian differentials のなす加群を表わす。

本稿 P.1 での一次元 homology classes A_1, B_1, A_2, B_2 の Poincaré dual を a_1, b_1, a_2, b_2 とすると

$$\theta(a_1) = -a_1, \quad \theta(b_1) = -b_1, \quad \theta(a_2) = -a_2, \quad \theta(b_2) = -b_2$$

を得る。$H^1(M, \mathbb{Z})$ および $H^1(M, \mathbb{C})$ の basis としてこれらをとることにする。$\mathfrak{P}_0(M)$ の元 ξ の代表元をこれらの basis で表わすとき, 上記の同型が θ-equivariant であるから

$$\theta(\xi) = \xi \iff \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - x_1\omega_{11} - x_2\omega_{12} \\ 2\alpha_2 - x_1\omega_{21} - x_2\omega_{22} \\ 2\alpha_3 - x_1\omega_{31} - x_2\omega_{32} \\ 2\alpha_4 - x_1\omega_{41} - x_3\omega_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix},$$

ここに (α_i) は ξ の代表元, (ω_{i1}), $(\omega_{i,2})$ は $\delta\Gamma(M_2, \mathcal{O}^{1,0})$ の

basisを表わし，x_1, x_2 は複素数，n_i，$i=1,\cdots,4$ は整数である。
従って $\theta(\xi)=\xi$ であるための必要十分条件は

$$\alpha_i \equiv \frac{n_i}{2} \mod \delta\Gamma(M_2, \theta^{1,0}), \quad i=1,\cdots,4$$

である。よってこの様なものは整数と $\delta\Gamma(M_2, \theta^{1,0})$ を法として考えると $n_i=0$ 又は $\frac{1}{2}$，$i=1,2,3,4$ の高々 $2^4=16$ 個しかない。

次に ξ を first Chern class $c_1(\xi)=\Upsilon$ である holomorphic θ-line bundle とし，η を同じ条件みたす holomorphic θ-line bundle とすると $\xi\cdot\eta^{-1}\in P_0(M_2)$ みたすから P1 の目標は達せられた。

例 (U_i, z_i) を M_2 の complex structure を与える local coordinates とする。$U_i\cap U_j\neq\phi$ のとき，$f(z_j)=z_i$ とおく。このとき，

$$\kappa_{ij} = 1\Big/\frac{df(z_j)}{dz_j}$$

が定める canonical bundle κ は holomorphic θ-line bundle である。

・Weil の公式について。

研究集会の際 Weil の公式の Grothendieck による定式化 [1]，P.13 を用いて θ の fixed points における point bundles が holomorphic θ-line bundle ではないと述べましたが，その後 Grothendieck による定式化自体に無理があり，これらの point bundles は holomorphic θ-line bundles であるとの結論を得ましたので，このことについて訂正と詳述とを追記致します。

[3], P63 の公式を $T = T' = 1$, $\Theta' = 1$ の場合に適用する。

P.1の各 fixed point P_i, $i = 1, \cdots, 6$ では local coordinate $(U(P_i), z)$ を適当にえらんで $p : M_2 \longrightarrow M_2/\theta$ は P_i の近くで $p(z) = z^2$, $\theta(z) = -z$ がなりたつ様にできる。実 P_i の近くでの meromorphic function $d(z)$ は $d(-z) = v(z) \cdot d(z)$, $v(z)$ は holomorphic function, をみたすとき degree 1 の local divisor とよばれる。([3], P.54, P.52).
もし $d(z)$ が P_i において degree 1 の pole をもつ meromorphic function であれば $v(0) = -1$ がなりたつ。$M_2 \xrightarrow{p} M_2/\theta$ においては

$$i(d(z)) = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{1}{2}}, \quad [3], P52 。 \Theta \text{ を}$$

$$\Theta_P = \begin{cases} d(z), & \text{if } P = P_i, \\ I_P & \text{if } P \neq P_i \end{cases}, \quad [3]\ P56 .$$

で定義される M_2/θ 上の degree 1 の divisor とする。

$$N = \dim \{ \Phi : \text{meromorphic function on } M_2/\Theta = \mathbb{P} \text{ s.t. } \Theta\Phi, \text{ hol.} \}$$

$$\sigma = \dim \{ dI : \text{differential on } \mathbb{P} \text{ s.t. } \left(\frac{dI}{dz}\right) / \Theta, \text{ hol.} \}$$

$$I(\Theta) = \sum_P i(\Theta_P) = i(d(z)) = -\frac{1}{2},$$

とおき, ζ_{P_i} を divisor $d(z)$ が定める point bundle ([2], P114) とすると line bundle $P_*(\zeta_{P_i})$ に関する Riemann Roch の定理によって

$$G(P_*(\zeta_{P_i})) = N - \sigma + 1 .$$

上の Θ が θ-divisor であることより ζ_{P_i} は holomorphic θ-line bundle である。([1], P.06〜07). 従って [3], P63 の公式によって

$$-\frac{1}{2} = I(\Theta) = G(P_*(\zeta_i)) + \frac{1}{2}, \quad \therefore G(P_*(\zeta_{p_i})) = -1.$$

[2], P.114 によれば $G(\zeta_{p_i}) = 1$. である。

参考文献

[1] A. Grothendieck, Sur le memoire de Weil [4], Generalisation des fonctions abeliennes, Semi. Bourbaki 1956 141. 01~15.

[2] R. C. Gunning, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton, 1966.

[3] A. Weil, Generalisation des fonction abéliennes, J. math. pures et appl. t17, 1938.