数理解析研究所講究録
第 222 巻 1974 年 56-63

多変数フーリエ解析

東大教養学部　竜沢周雄

さきに「数論汎智」に Bocher による Poisson summation formula の変形とみられる次の定理を述べた

定理 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が各変数について周期1, unit cube で有界かつ可積分とする。点 $(x_1,\cdots,x_n)$ で $f(x_1,\cdots,x_n)$ が連續であるかぎり，そこで $f(x_1,\cdots,x_n)$ のフーリエ級数が収束するならば極限値は $f(x_1,\cdots,x_n)$ に等しい。

この定理は，たとえば有限次代数体における Hecke theta-formula を導びく場合に使われる（T. Tatuzawa; On the extended Hecke theta-formula, Proc. at the International Conference on Number theory, Moscow, 1971）。また，（竜沢周雄；整数論と解析的方法，日本数学会誌論説）にも応用例がみられる。

こゝではフーリエ解析の問題として，有界という仮定を除くこと，また不連續点まで考えることを問題とする。そしてフーリエ級数が収束するとき何に収束するかということを問

題とする。これについて1変数の場合は彌永記念号に筆者が書いている(T. Tatuzawa; On a theorem in the theory of Fourier series, Journ. of the Fac. of Sci., Univ of Tokyo, 1968)。そのとき，多変数の場合にはどうもできなかった。

こゝでは始めの定理を拡張したことにはならないが多少考えたところを述べてみる。簡単のため $n=2$ の場合について要点を述べる。

(1) $f(x, y)$ は各変数について周期1，unit cube

$$I=\{(x, y)\,;\ 0 \leqq x<1,\ 0 \leqq y<1\}$$

で可積分とする。

そのとき

$$a(m, n)=\iint_{I} f(x, y) e^{-2\pi i(m x+n y)} d x d y$$

を $f(x, y)$ の Fourier 係数といい，部分和

$$s(k, l)=\sum_{|m| \leqq k} \sum_{|n| \leqq l} a(m, n) e^{2\pi i(m x+n y)}$$

を定義し，形式的無限和

$$\lim_{k \to \infty,\, l \to \infty} s(k, l),\quad \text{ときには}\ \sum_{(m, n)}\sum\ \text{と略記}$$

を $f(x, y)$ の Fourier 級数と名付ける。点 (x, y) において

(2) すべての k について $\lim\limits_{l \to \infty} s(k, l)$ が存在する

(3) すべての l について $\lim\limits_{k \to \infty} s(k, l)$ が存在する.

(4) $\lim_{k\to\infty,\, l\to\infty} s(k, l)$ が存在する．換言すれば点 (x, y) において，$f(x, y)$ の Fourier 級数が収束する．

以上 (1), (2), (3), (4) の仮定のもとに

定理 1．そのとき

$$\lim_{\rho\to 0,\, \tau\to 0} \frac{1}{(2\rho)^2(2\tau)^2}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau}\left\{\int_{u-\rho}^{u+\rho}\int_{v-\tau}^{v+\tau} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right\}du\,dv$$

が存在し，$f(x, y)$ の Fourier 級数はこの値に収束する。

始めにこの定理を証明する方針を述べる。ρ，τ をそれぞれ $\frac{1}{2}$ より小さい任意の正数とし

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\rho}\frac{1}{2\tau}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau} f(u, v)\,du\,dv$$

とおくと，$\varphi(x, y)$ も各変数について周期 1 であり，この前の「数論汎習」の始めに述べたような手段により上述のように積分で定義された関数は必ず Fourier 展開可能になることを利用する。$\varphi(x, y)$ の Fourier 係数は

$$b(m, n) = \iint_I \varphi(u\ v)\,e^{-2\pi i(mu+nv)}\,du\,dv$$

$$= \iint_I e^{-2\pi i(mu+nv)}\left\{\frac{1}{2\rho}\frac{1}{2\tau}\int_{u-\rho}^{u+\rho}\int_{v-\tau}^{v+\tau} f(x\ y)\,dx\,dy\right\}du\,dv$$

$$= \frac{1}{2\rho}\frac{1}{2\tau}\iint_I f(x, y)\left\{\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau} e^{-2\pi i(mu+nv)}\,du\,dv\right\}dx\,dy$$

$$= \rho(m)\,\tau(n)\,a(m,n)$$

たゞし，

$$\rho(m)=\frac{\sin 2\pi m\rho}{2\pi m\rho},\qquad \tau(n)=\frac{\sin 2\pi n\tau}{2\pi n\tau}$$

と略記した。別の証明は（T. Tatuzawa; Some results in the Fourier analysis, Nagoya math. jour., 1966）をみられたい。同様に

$$\psi(x,y)=\frac{1}{2\rho}\,\frac{1}{2\tau}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau}\varphi(u,v)\,du\,dv$$

も Fourier 展開可能で，その Fourier 係数は

$$c(m,n)=\rho(m)\,\tau(n)\,b(m,n)=\rho(m)^2\,\tau(n)^2\,a(m,n)$$

で与えられる。かくて，(1) だけの仮定から

$$\sum_{(m,n)}\sum \rho(m)^2\,\tau(n)^2\,a(m,n)\,e^{2\pi i(mx+ny)}$$

(5) $$=\frac{1}{(2\rho)^2(2\tau)^2}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau}\left\{\int_{u-\rho}^{u+\rho}\int_{v-\tau}^{v+\tau}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}du\,dv$$

が求められた。こゝで左辺の級数が $|\rho|<\frac{1}{2}$，$|\tau|<\frac{1}{2}$ で一様収束することがわかれば，$\rho\to 0$，$\tau\to 0$ として定理1がえられる。かくて，(2), (3), (4) の仮定から (5) の左辺の一様収束性を導くことが以下の問題となるのである。

(4) により，$\varepsilon>0$ に対して M, N が存在して

$$K>M,\quad L>N$$

なるかぎり，

$$|s(K,L)-s(M,N)|<\varepsilon$$

となる。したがって，

$$\sum_{M<|m|\leqq K}\ \sum_{N<|n|\leqq L} a(m,n)\,e^{2\pi i(mx+ny)}$$

$$=s(K,L)-s(K,N)-s(M,L)+s(M,N)$$

の絶対値は 2ε をこえない。

こゝで，

$$S(l)=\sum_{M<|m|\leqq K}\ \sum_{N<|n|\leqq l} a(m,n)\,e^{2\pi i(mx+ny)}$$

とおけば

$$\sum_{M<|m|\leqq K}\ \sum_{N<|n|\leqq L} \tau(n)^2\, a(m,n)\,e^{2\pi i(mx+ny)}$$

$$=\sum_{N<l\leqq L}\tau(l)^2\{S(l)-S(l-1)\}$$

$$=\sum_{N<l\leqq L}S(l)\{\tau(l)^2-\tau(l+1)^2\}-\tau(N+1)^2S(N)$$
$$+\ S(L)\tau(L+1)^2$$

したがって，

$$\tau(l)^2-\tau(l+1)^2=\int_{2\pi(l+1)\tau}^{2\pi l\tau}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$$

に注意すれば

(6) $$\left|\sum_{M<|m|\leqq K}\ \sum_{N<|n|\leqq L}\tau(n)^2 a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}\right|$$

$$< 2(A+2)\varepsilon,\quad ただし,\ A=\int_0^\infty\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right|dx$$

さらに

$$T(l)=\sum_{M<|m|\leqq l}\ \sum_{N<|n|\leqq L}\tau(n)^2 a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}$$

とおけば

$$\sum_{M<|m|\leqq K,}\ \sum_{N<|n|\leqq L}\rho(m)^2\tau(n)^2 a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}$$

$$=\sum_{M<l\leqq K}\rho(l)^2\{T(l)-T(l-1)\}$$

となり前と同じように

(7) $$\left|\sum_{M<|m|\leqq K}\ \sum_{N<|n|\leqq L}\rho(m)^2\tau(n)^2 a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}\right|$$

$$< 2(A+2)^2\varepsilon$$

が求められる。

次に仮定 (2) により，$\varepsilon>0$ に対し $N'\geqq N$ なるある N' が存在し，$L>N'$ なるかぎり $0\leqq k\leqq M$ なるすべての k に対し

$$\left|\sum_{|m|\leqq k}\ \sum_{N'<|n|\leqq L}a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}\right|<\varepsilon$$

これより (6), (7) を導いたと同じようにして

(8) $$\left|\sum_{|m|\leqq M}\ \sum_{N'<|n|\leqq L}\rho(m)^2\tau(n)^2a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}\right|$$
$$<(A+2)^2\varepsilon$$

が導かれる。

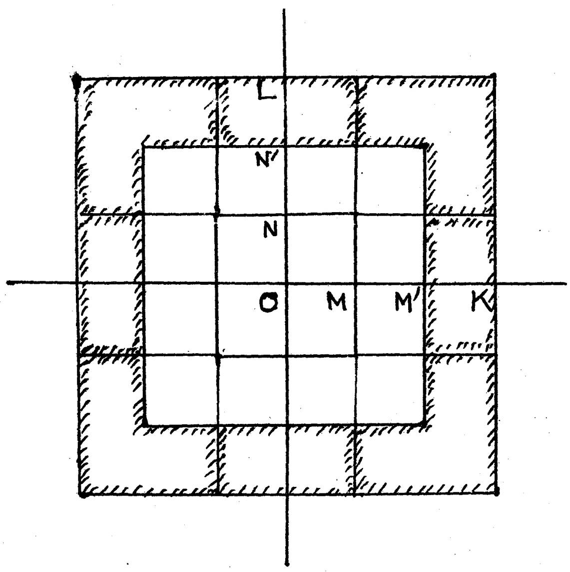
また仮定(3)から同じようにして

(9) $$\left|\sum_{|n|\leqq N}\ \sum_{M'<|m|\leqq K}\rho(m)^2\tau(n)^2a(m,n)e^{2\pi i(mx+ny)}\right|$$
$$<(A+2)^2\varepsilon$$

が導かれる。

こゝで右の図をみられたい。

(7)において K, L のかわりに M′, N′ とおいても成立つ。そのようにしてえられた不等式を(7)′とすれば、(7)(7)′(8), (9)より次の不等式が求められる。



$$\left|\sum_{|m|\leqq K}\ \sum_{|n|\leqq L}-\sum_{|m|\leqq M}\ \sum_{|n|\leqq N}\right|$$

$<6(A+2)^2\varepsilon$, ただし $\sum\sum$ は

$$\rho(m)^2\tau(n)^2a(m\ n)e^{2\pi i(mx+ny)}$$

の上にわたる和である。そしてこれは(5)の左辺の級数が ρ, τ に関し一様収束を示す関係にほかならない。

定理1における極限値はかなり複雑な形を示している。もし $f(x, y)$ の有界性の仮定をつければ幾分簡単にすることができる。

定理2. 定理1の極限値を

$$\lim_{\rho\to 0,\ \tau\to 0}\frac{1}{(2\rho)(2\tau)}\int_{x-\rho}^{x+\rho}\int_{y-\tau}^{y+\tau} f(u, v)\,du\,dv$$

におきかえることができる。ただし、正数 B, C が存在し ρ と τ とはつねに

(10) $$B \leqq \left|\frac{\rho}{\tau}\right| \leqq C$$

なる関係をたもって 0 に収束するようにする。

Lebesgueの定理によれば

$$\lim_{\rho\to 0,\ \tau\to 0}\frac{1}{(2\rho)(2\tau)}\int_{u-\rho}^{u+\rho}\int_{v-\tau}^{v+\tau} f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

は unit cube のほとんどいたるところで $f(u, v)$ に収束する。ただし Vitali の定理を使う関係で (10) のような正規性の条件が必要である。もし $f(u, v)$ が有界な仮定をみたすなら Egoroff の定理を使って定理1から定理2が導けるであろう。