数理解析研究所講究録
第 222 巻 1974 年 100-108

$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)/\log p_n$ の評価について

名大 理・数　　小林功武

いわゆる素数の small difference について述べる．たゞ，細部を完成させていないし，最終的の面倒な数値計算もまだ実行していない云わば私的な覚書であることに少し気がさすが，元々筆者自身は問題の理論的側面に興味の重点を置いて来たので，その点に関しては大略説明しておいたつもりである．必要最小限の文献は末尾に挙げておいた．特に Huxley のは，筆者の講演後に出た最新の文献であるが，我々の立場からして興味深い論文であるから，一読をお勧めしたい．

p_1，p_2，$\cdots$ は素数を増加順に並べた列とし，

$$E=\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)/\log p_n$$

で E を定義する．E の上からの評価を問題にするとき，現今普通に用いられる方法では，以下の二定理に基礎を置くのである．

N を大きい正数として

$$Z(N;2n)=\sum_{\substack{N/\log N<p,p'\leqq N\\ p-p'=2n}}(\log p)(\log p') \qquad (0<n\in\mathbb{Z})$$

とおく；ただし，ここでも以下においても文字pは素数を表わすものとする．

$$T(\alpha)=t(0)+2\sum_{n=1}^{k}t(n)\cos 2\pi n\alpha$$

を，負でない実係数を有し，恒等的に0でなく，常に$T(\alpha)\geqq 0$ $(\alpha\in\mathbb{R})$なる cosine polynomial とするとき

[定理A] $C>0$ を絶対定数，$k<(\log N)^C$ とする．任意の$\varepsilon>0$ に対し，$N>N_0(\varepsilon)$ ならば，

$$\sum_{n=1}^{k}t(n)Z(N;2n)>2N\sum_{n=1}^{k}t(n)H(n)-\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)t(0)N\log N,$$

ただし

$$H(n)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\prod_{\substack{p|n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}.$$

[定理B] 任意の$\varepsilon>0$に対し，$N>N_1(\varepsilon)$ならば

$$Z(N;2n)<(8+\varepsilon)H(n)N, \qquad (n=1,2,\cdots.)$$

さて，$a>0$，$0<c<1$ なる定数a, cをとって，$k=[a\log N]$，$h=[ca\log N]$ とおき，$Z(N;2n)=0$ $(n=1,2,\cdots,h)$ と仮定すると，定理A，Bから

$$(8+\varepsilon)N\sum_{n=h+1}^{k}t(n)H(n)>2N\sum_{n=1}^{k}t(n)H(n)-\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)t(0)N\log N,$$

(1) $$\left(\frac{1}{32}+\frac{\varepsilon}{4}\right)k/a > \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{k} t(n)H(n) - \left(1+\frac{\varepsilon}{8}\right)\sum_{n=h+1}^{k} t(n)H(n)$$

を得る．そこで，いま，$\mathfrak{F}$を区間[0,1]上の有界変動関数φで $\varphi\geqq 0$, $\int_0^1\varphi\,dt>0$ を満たすもの全体の成す関数族とし，$T(\alpha)$として，$\varphi\in\mathfrak{F}$ によって

$$t(n)=\sum_{j=n}^{k}\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{j}{k}\right)\varphi\left(\frac{j-n}{k}\right)$$

で与えられるものをとる．すると

$$t(n)=\psi(n/k)+O(1/k),\quad \text{ただし}\quad \psi(t)=\int_t^1\varphi(u)\varphi(u-t)\,du,$$

$$\sum_{n=1}^{l}H(n)\psi(n/k)=k\int_0^{l/k}\psi(t)\,dt+o(k),\quad (1\leqq l\leqq k)$$

などから，(1)より

(2) $$\left(\frac{1}{32}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\psi(0)a^{-1}>\frac{1}{4}\int_0^1\psi(t)\,dt-\left(1+\frac{\varepsilon}{8}\right)\int_c^1\psi(t)\,dt$$

が出る．故に，予め a, c, φ が

$$\frac{1}{32}\psi(0)a^{-1}<\frac{1}{4}\int_0^1\psi(t)\,dt-\int_c^1\psi(t)\,dt,$$

即ち

(3) $$\frac{1}{4}\int_0^1\psi(t)\,dt-\int_c^1\psi(t)\,dt>0,$$

$$\frac{1}{32}\psi(0)\left(\frac{1}{4}\int_0^1\psi(t)\,dt-\int_c^1\psi(t)\,dt\right)^{-1}<a$$

を満たすようにとってあったとすれば(2)は不合理であり，十分大きいNに対し

$$Z(N;2n)>0,\quad 1\leqq n\leqq ca\log N$$

なるnが存在する；よって特に評価

(4) $$E\leqq\frac{1}{16}\psi(0)\frac{c}{\frac{1}{4}\int_0^1\psi\,dt-\int_c^1\psi\,dt}$$

を得る．(3)，(4) を φ で表わすことにより，先づ次の主張が得られた：

[主張1] $\varphi \in \mathfrak{F}$，

(5) $$\frac{1}{8}\left(\int_0^1 \varphi\, dt\right)^2 - \int_c^1 \varphi(t)dt \int_c^t \varphi(u-c)\, du > 0, \quad (0<c<1)$$

である限り，

(6) $$E \leqq \frac{1}{16}\left(\int_0^1 \varphi^2 dt\right) \frac{c}{\frac{1}{8}\left(\int_0^1 \varphi dt\right)^2 - \int_c^1 \varphi(t)dt \int_c^t \varphi(u-c)\, du}.$$

φ を固定するとき，(5) を充たす c の中に (6) の右辺を最小にする値が存在する．これを改めて c とするとき

(7) $$\int_c^1 \varphi(t)\varphi(t-c)\, dt > 0$$

(8) $$\int_c^1 \varphi(t)\left(c\varphi(t-c) + \int_c^t \varphi(u-c)du\right)dt = \frac{1}{8}\left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right)^2$$

が成立して

(9) $$E \leqq \frac{1}{16}\, \frac{\int_0^1 \varphi(t)^2 dt}{\int_c^1 \varphi(t)\varphi(t-c)\, dt}$$

と押えられる．

逆に，$c \in (0,1)$ を任意にとって固定するとき，条件 (7)，(8) を満たす $\varphi \in \mathfrak{F}$ の中に，(9) の右辺を最小にするものが存在することは，いわゆる Helly の選出定理によって容易に証明されるが，この極値的の φ に対し (9) が成立する．

それ故，いま，$c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ を parameter とし，(7)，(8)を

充たし，かつ(9)の右辺を最小ならしめる $\varphi\in\mathfrak{F}$ の集合 $\mathfrak{F}_c$ の代表要素を勝手に一つ択んで φ_c とし

$$(10)\qquad E \leqslant \inf_{c\in(\frac{1}{2},1)} \frac{1}{16}\,\frac{\int_0^1 \varphi_c(t)^2\,dt}{\int_c^1 \varphi_c(t)\varphi_c(t-c)\,dt} = E_0,\ \text{say},$$

と評価するとき，次の主張を得る：

[主張2] 一つの $\varphi\in\mathfrak{F}$ に対し，(5)を満足し，(6)の右辺を最小にする c の値の中に，$\frac{1}{2}$ より大きいものが存在するならば，このような φ を用いる限り，(6)から出る評価は，評価(10)より決して良くはない．

E_0 を求める為に，$\mathfrak{F}_c$ から具体的な代表関数を取り出したい訳である．そこで次の仮設を置く：

[仮設1] $\mathfrak{F}_c$ の代表要素として，$\inf_{t\in[0,1]} \varphi_c(t) > 0$ なる φ_c を取ることができる．

(恐らく，肯定的証明がそう困難なく得られるであろう．もしも誤りであるとすると，我々の問題はかなり厭わしい様相を帯びて来る！)

$\mathfrak{H}$ を $(c,1)$ 上2乗可積分な実値関数全体が通常の内積 $(\ ,\ )$

で成す Hilbert 空間とし，$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\psi_0=\sqrt{1-c})$ を $\mathfrak{H}$ における一つの完全正規直交系で，各 ψ_n が有界変動なるものとする．$\mathfrak{H}$ 上の有界線型作用素 T を

$$(Tf)(t)=cf(t)+\int_c^t f(u)\,du$$

によって定義する．

［補題］ f は $[c,1]$ 上の有界変動非負値関数であるとする．非負実数 β' と $[c,1]$ 上の有界変動非負値関数 g' の対 (β',g') で条件 $(f,g')>0$，$(Tf,g')=\frac{1}{8}\left((f,1)+(2c-1)\beta'+(g',1)\right)^2$ を満たすものの中に，

$$\frac{(f,f)+(2c-1)\beta'^2+(g',g')}{(f,g')}$$

を最小ならしめる対 (β,g) で $\inf_{t\in[c,1]} g(t)>0$ を満たすものが存在するならば，$\beta>0$ であり，g は

$$g=\lambda f+\eta Tf+\beta$$

の形である．たゞし

$$2\lambda=\frac{(f,f)+(2c-1)\beta^2+(g,g)}{(f,g)},$$

$$\eta\frac{U}{4}+\beta=0,\quad U=(f,1)+(2c-1)\beta+(g,1).$$

証明は：f, Tf, g', g を $\{\psi_n\}$ につき Fourier 展開する；

$g' = \sum x_n' \psi_n$，$g = \sum x_n \psi_n$ とおき，β' を点 $\{x_n'\}$（x_n' は独立変数とみなすことができる）の関数とみて $(\partial\beta'/\partial x_n')_{x_n'=x_n}$ を条件 $(Tf, g') = \frac{1}{8}((f,1)+\cdots)^2$ から求めて

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n'} \frac{(f,f)+(2c-1)\beta'^2+(g',g')}{(f,g')}\right)_{x_n'=x_n} = 0$$

に代入すると g の形が判る；$\beta>0$ は，$\beta=0$ とすると $f=0$ が出て $(f,g)>0$ に矛盾するから……という風にやるのが最も手取り早いようである。

さて，仮設1を満足する $\varphi_c \in \mathfrak{F}_c$ をとる．すぐ判るように制限 $\varphi_c|_{(1-c,c)} = \beta$（定数関数）としてよい．$[c,1]$ 上の関数 f, g を

$$f(t) = \varphi_c(t-c), \quad g(t) = \varphi_c(t)$$

で与えると，f，(β, g) は補題の条件を満たす；補題における T は任意の作用素でも良いから，f, g を入れ替え，T の代りに T^*（T の共役作用素）としても適用できるから，結局，f，β，g 即ち φ_c を求める条件：

$$(!)\begin{cases} g(t) = (\lambda+\eta c)f(t) + \eta\int_c^t f(u)\,du + \beta, \quad f(t) = (\lambda+\eta c)g(t) + \eta\int_t^1 g(u)\,du + \beta, \\ v = (f,1)+(2c-1)\beta+(g,1), \quad \eta\frac{v}{4}+\beta = 0, \quad \beta>0, \\ (f,f)+(2c-1)\beta^2+(g,g) = 2\lambda(f,g), \\ \inf\limits_{t\in[c,1]} f(t) > 0, \quad \inf\limits_{t\in[c,1]} g(t) > 0 \end{cases}$$

が得られる．（$(Tf,g) = \frac{1}{8}v^2$ は (!) から自づと出るので省

いてある.)かくて, f, g は共に微分方程式

$$\{1-(\lambda+\eta c)^2\}y''+\eta^2 y=0$$

の解としてよい. $(\lambda+\eta c)^2 \neq 1$ は明らかだが, $(\lambda+\eta c)^2 \gtrless 1$ がすぐには分らないから, 取り敢えず次を仮定しよう:

[仮設2]　$1-(\lambda+\eta c)^2>0.$

そこで, $\omega=-\eta\,/\sqrt{1-(\lambda+\eta c)^2}$ とおくと

$$f(t)=\sin(\omega t+\mu),\quad g(t)=\sin(\omega t+\nu)$$

の形になる. これで問題は原理的には解けた訳で, 後は(!)を言い換えて行けば宜しい. 結論は次の通り:

[主張3] 仮設1, 2の下で, E_0 は次のようにして求められる:

$$(\#)\begin{cases} x+\dfrac{2\cos x}{\sin\theta+\sin x}-\dfrac{x\sin(\theta-x)+\cos x(\cos x-\cos\theta)}{2x\cos(\theta-x)+\sin 2x}=0, \\ 0<x<\pi/2,\quad x<\theta<\pi-x \end{cases}$$

を満たす対 (x,θ) に対し,

$$(11)\qquad y=x+\frac{2\cos x}{\sin\theta+\sin x},$$

$$(12)\qquad \lambda=\cos(x-\theta)-2y\sin(x-\theta)$$

とおく. (x,θ) を動かしたときの λ の下限を λ_0 とすれば

$$E_0 = \frac{1}{8}\lambda_0$$

である．また，仮設1，2の真偽に拘らず，(#)を充たす(x, θ)より(11)でyを定め(12)から得られるλによって，とにかく正しい評価ではあるところの

$$E \leqq \frac{1}{8}\lambda$$

が得られる．

尤も，実際にλ_0，或は一つのλの値を求めるとなると——計算器を使わない訳には行くまい！

文　　献

E. Bombieri - H. Davenport : Proc. Royal Soc. Ser. A, Math. & Phys. Sci. (London) 293 (1966), 1-18.

M. N. Huxley : Mathematika, 20 (1973), 229-232.

Г. З. Пильтяй : Исслед. теор. чисел, Саратов 4 (1972), 73-79.