数理解析研究所講究録
第223巻 1974年 19-27

十分性による分布族の特徴づけ

早大理工 草間時武

この記事は、ほぼKagan-Linnik のCharacterization problems in Mathematical Statistics Chap 8. Characterization of Families of Distributions Admitting Sufficient Statistics の一部とSufficient Subspaces for a space of functions defined on a countable set (Rozental) の紹介である。

§1. Kagan は次の定理を証明した。(Kagan [3])。

定理1. $F(x-\theta)$ $\theta \in R^1$ なる分布族からのランダムサンプル $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を考える。$dP_\theta = dF(x_1-\theta)\cdots dF(x_n-\theta)$ とおく。dP_θ はLebesgue 測度に関して絶対連続とする。このとき $\bar{X}$ が十分であることから、F が正規分布であることが証明される。

証明の概要 t と θ に対して

$$\phi_t(\bar{X}) = E_\theta[\exp it(X_2 - X_1) \mid \bar{X}] \qquad a.e.[P_\theta] \quad \cdots (1)$$

とおく．したがって 両辺に $e^{i\tau\bar{X}}$ をかけて期待値をとれば，

$$E_\theta \exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))] = E_\theta[\phi_t(\bar{X})e^{i\tau\bar{X}}] \cdots (2)$$

$X_i \to X_i + \theta \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ と変換し，θ が Location parameter であることを用いれば，

$$E_0 \exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))] = E_0[\phi_t(\bar{X}+\theta)e^{i\tau\bar{X}}] \cdots (3)$$

$$E_0[\phi_t(\bar{X}+\theta)\exp(i\tau\bar{X})] = \psi_t(\tau) \quad --- (4)$$

とおく． μ を $\theta = 0$ のときの $\bar{X}$ の分布，すなわち $\mu(A) = P_0(\bar{X} \in A)$ とする．仮定より μ は Lebesgue 測度に関して絶対連続となる．(4) は

$$\int e^{i\tau u}\phi_t(u+\theta)\,d\mu(u) = \psi_t(\tau)$$

となる． (3) と (4) より

$$\psi_t(\tau) = E_0[\exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))]]$$

であるが，この右辺は (2) において $\theta = 0$ としたものであるから，$E_0(\phi_t(\bar{X})e^{i\tau\bar{X}}) = \int e^{i\tau u}\phi_t(u)\,d\mu(u)$ に等しい． ゆえに

$$\int e^{i\tau u}\phi_t(u+\theta)\,d\mu(u) = \int e^{i\tau u}\phi_t(u)\,d\mu(u).$$

したがって $\int e^{i\tau u}(\phi_t(u+\theta) - \phi_t(u))\,d\mu(u) = 0 \cdots (5)$

Fourier 変換の1意性より

$$\phi_t(u+\theta)-\phi_t(u)=0 \qquad a.e.[\mu] \quad \cdots(6)$$

もちろん exceptional set は θ と t に depend する.

$$\phi_t(u)=c(t) \qquad a.e.[\mu] \qquad \cdots(7)$$

を証明しよう. すなわち $\phi_t(u)$ は u に関して、ほとんど const であることを証明しよう. (exceptional set は t には depend するかもしれない). t を fix し $\phi_t(u)$ のかわりに $\phi(u)$ と書くことにする。(7) がなりたゝないとすると、$\phi_1(u) = Re\,\phi(u)$, $\phi_2(u)=Im\,\phi(u)$ とおくと

$$\text{ess sup}\,\phi_1(u) > \text{ess inf}\,\phi_1(u)$$

または $\text{ess sup}\,\phi_2(u) > \text{ess inf}\,\phi_2(u)$

のいずれかがなりたつ. 前者がなりたつとしよう. したがって $A=\{u: \phi_1(u)>k\}$ とするとき $\mu(A)>0$, $\mu(A^c)>0$ がなりたつような k が存在する。A^c から μ 測度 0 なる集合をとりのぞいて、

$$\frac{d\mu}{dm}>0 \qquad u\in A^c \qquad \cdots\cdots(8)$$

としてさしつかえない。こゝに m は Lebesgue 測度である. $\mu \ll m$ だから $m(A)>0$, $m(A^c)>0$ である. したがって $m[(A+\theta)\cap A^c]>0$ となる θ が存在する. (辻 [4] pp 203 深宮の定理)

(8) より、また $(A+\theta)\cap A^c \subset A^c$ だから、

$$\mu[(A+\theta)\cap A^c] > 0 \qquad \cdots (9)$$

(8) と(9)は矛盾することを示そう.

(6)より、 $\phi_1(u+\theta) = \phi_1(u) \quad a.e.[\mu]$

であるから $\phi_1(u) > k \quad u \in A+\theta$ がなりたつ。ゆえに、

$\phi_1(u) > k \quad u \in (A+\theta)\cap A^c$ である. 一方 $\phi_1(u) \leqq k$

$u \in A^c$ だから $\phi_1(u) \leqq k \quad u \in (A+\theta)\cap A^c$. これは

矛盾である。ゆえに $\phi_1(u) = \mathrm{Const}$. 同様に $\phi_2(u) = \mathrm{const}$.

したがって $\phi_t(u) = \mathrm{Const} = c(t) \quad a.e.[\mu]$. したがって

$$\phi_t(\bar{X}) = c(t) \qquad a.e.[P_0] \qquad \cdots (10)$$

(1)において $\theta = 0$ とおき、(10) をもちいれば、

$$E_0[\exp it(X_2 - X_1) \mid \bar{X}] = c(t) \qquad \cdots (11)$$

$f(t) = \int e^{itx} dF(x)$ とおくと (11)より

$$E_0 \exp i\left(\tau \sum_1^n X_i + t(X_2 - X_1)\right) = c(t) E_0 \exp\left(i\tau \sum_1^n X_i\right)$$

$$\cdots (12)$$

がなりたつ. $c(t) = |f(t)|^2$ である。すなわち (12)は

$$f(\tau+t)f(\tau-t)[f(\tau)]^{n-2} = c(t)[f(\tau)]^n \cdots (13)$$

とかくことができる。

このƒが決して0とはならないことを示そう。$c(t)$ は十分 $\varepsilon > 0$ を小さくとれば、$c(t) \neq 0 \quad |t| < \varepsilon$ である.

fが0になるところがあるとする。t_0を fが0となる最小

(13) において $\tau = t_0 - \rho$, $t = \rho$ $(0 < \rho < \varepsilon)$ とおく.
$\tau + t = t_0$ であるから $f(\tau + t) = f(t_0) = 0$. ゆえに
(13) の左辺は 0. ゆえに $C(\rho)[f(t_0 - \rho)]^n = 0$. $0 < \rho < \varepsilon$ で
あるから $C(\rho) \neq 0$. ゆえに $f(t_0 - \rho) = 0$. これは t_0 が
f を 0 にする最小の正数であることに反する。したがって、
$f(t) \neq 0$ である。 $g = \log f$, $h = \log C$ とする.
(13) の両辺の $\log$ をとって、

$$g(\tau + t) + g(\tau - t) - 2g(\tau) = h(t) \qquad |t| < \varepsilon$$

この2階定差方程式をとくと $g(\tau)$ は 2次の多項式であることがわかる. したがって F は正規分布にしたがう
F が正規分布にしたがえば $\bar{X}$ は sufficient であることはあきらかであるから これは Location parameter をもつ分布族の中での、正規分布の特徴づけになっている。

§2 sufficient subspace

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ を可測空間 $\{P_\theta \mid \theta \in \Omega\}$ を $\mathfrak{A}$ 上の確率測度族とする. P_θ に関して2乗可積分な関数の全体は$_{R_\theta}$
内積として

$$(f, g)_\theta = \int_{\mathfrak{X}} f(x) g(x) \, dP_\theta(x)$$

とおくことにより Hilbert 空間を作る。

$R = \bigcap_{\theta\in\Omega} R_\theta$ とおく.　Rの線形部分空間 L は

① Lは各R_θの部分集合として closed

② Lは $f(x)\equiv 1$ なるfをふくむ.

③ $g\in R$ の R_θ への projection は θに depend しない.

をみたすとき、sufficient subspace という. もしLが、$\mathfrak{A}$の sub-σ-field $\mathfrak{B}$をてきとうにえらんで、Rの中の$\mathfrak{B}$-可測な関数の全体として表わされるならば、Lが sufficient subspace であることと、$\mathfrak{B}$が$\{P_\theta \mid \theta\in\Omega\}$に関して sufficient であることとは同値であることは条件③と、Lへの projection が conditional expectation になることからあきらかである. (Bahadur [1])
また任意のLが、必らずしもRにぞくする$\mathfrak{B}$-可測関数の全体とは一致しない.　Lがそのように、$\mathfrak{B}$-可測関数の全体として表わされるための条件は Bahadur [1] が与えた. したがって sufficient subspace の概念は sufficient subfield の概念の拡張である。Rozental は、$\mathfrak{X}$が高々可算集合の場合に、minimal な sufficient subspace を与えた.　$P_\theta(\{x\})$ を $P_\theta(x)$ で表わすことにする。
$x_1\sim x_2 \iff P_\theta(x_1) = cP_\theta(x_2)$ $(\forall\theta\in\Omega)$ と $\sim$を導入すると、これは同値関係だから$\mathfrak{X}$上に partition を生ずる.
Rにぞくし、partition の各要素である集合上で const で

あるような関数の全体を L_0 とすると、L_0 は minimal な sufficient subspace になる。定理として述べると、

定理 2. (Rozental) $\mathfrak{X}$ を高々可算集合とする。上で定義した L_0 は sufficient subspace であり、sufficient subspace L が $L \subset L_0$ をみたすならば、$L = L_0$ である。

証明 まず L_0 が sufficient subspace であることを示そう。条件 ①, ② をみたすことはあきらかであるから ③ をみたすことを示そう。それには $(f, g)_{\theta_0} = 0$ $(\forall g \in L_0)$ がある θ_0 でなりたてば、$(f, g)_\theta = 0$ $(\forall g \in L_0)$ がすべての θ でなりたつことを証明すればよい。上で定義した $\mathfrak{X}$ の partition を $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ とする。$\chi_{X_\alpha} = g_\alpha$ とおくと、$g_\alpha \in L_0$. $(f, g_\alpha)_\theta = \sum_{x \in X_\alpha} f(x) p_\theta(x) = c_\alpha \sum_{x \in X_\alpha} f(x) p_{\theta_0}(x) = c_\alpha (f, g_\alpha)_{\theta_0} = 0$ である。任意の $g \in L_0$ を考えると $g = \sum_\alpha k_\alpha g_\alpha$ とかくことができる。

$$(f, g)_\theta = \sum_\alpha k_\alpha (f, g_\alpha)_\theta = 0$$

したがって ③ がなりたつ。

次に sufficient subspace L が $L \subset L_0$ ならば $L = L_0$ であることを証明する。各 X_α の中に x_α を固定する。あきらかに $p_\theta(x) = c_\alpha(x) p_\theta(x_\alpha)$ $(\forall \theta \in \Omega, \forall x \in X_\alpha)$. P_L を L への projection とする。

$$(P_L g_\alpha, g_\beta)_\theta = \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) p_\theta(x) = p_\theta(x_\beta) \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) c_\beta(x).$$

同様に

$$(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = P_\theta(x_\alpha)\sum_{x\in X_\alpha} P_L g_\beta(x)\, c_\alpha(x)$$

P_L は selfadjoint であるから $(P_L g_\alpha, g_\beta)_\theta = (P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta$ である. したがって

$$P_\theta(x_\beta)\sum_{x\in X_\beta} P_L g_\alpha(x)\, c_\beta(x) = P_\theta(x_\alpha)\sum_{x\in X_\alpha} P_L g_\beta(x)\, c_\alpha(x).$$

$\alpha\neq\beta$ のとき $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$ である. 何故ならもし $\neq 0$ ならば上式の右辺は $\neq 0$ だから $\sum_{x\in X_\alpha} P_L g_\beta(x)\, c_\alpha(x)$ で両辺をわることができて、

$$P_\theta(x_\alpha) = \frac{\sum_{x\in X_\beta} P_L g_\alpha(x)\, c_\beta(x)}{\sum_{x\in X_\alpha} P_L g_\beta(x)\, c_\alpha(x)}\, P_\theta(x_\beta) = c\, P_\theta(x_\beta)$$

これは $x_\alpha\in X_\alpha$, $x_\beta\in X_\beta$, $\alpha\neq\beta$ であることに矛盾する。

故に $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$ でなければならない。したがって

$P_L g_\beta = k_\beta g_\beta$ であるが、$1\in L$ であるから（仮定②）、$1 = P_L 1 = P_L\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\Lambda} P_L g_\alpha = \sum_{\alpha\in\Lambda} k_\alpha g_\alpha$

ゆえに $k_\alpha = 1$. ゆえに $P_L g_\beta = g_\beta$ $(\forall\beta\in\Lambda)$ すなわち $g_\beta\in L$ したがって $g\in L_0$ は $g\in L$. ゆえに $L = L_0$.

L_0 は Dynkin [2] によると、minimal sufficient subfield に対応するものである.

sufficient subspace については、色々未知のことがあると思う。Rozental の結果は一般の dominated case のときはどうなるか. また dominated case の場合に

なりたつ sufficiency のきれいな理論はこの場合どうなるか等.

References

[1] Bahadur measurable subspaces and subalgebra Proc of Amer Math Society (1955) pp565–570.

[2] E. B. Dynkin, Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions, Uspehi Mat. Nauk 6 (1951), no. 1 (41), 68–90; English transl. Selected Transls in Math Stat. and Prob., Vol 1, Amer. Math., Providence, R. I., 1961, pp 17–40.

[3] Kagan, A. M. "Theory of estimation for families with shift-, scale- and exponential parameter", Trudy Matem Inst, Steklov. AN SSSR 104 (1968) 19–87.

[4] 辻正次　実変数関数論　清水書院　(1950)