数理解析研究所講究録
第 223 巻 1974 年 54-61

推定量による分布の特徴づけ

東工大 理学部　　柴田里程

ここでは，Kagan, Rao, Linnik "Characterization Problems in Mathematical Statistics" (John Wiley & Sons 1973) の第7章に従って Shift parameter の推定量の admissibility による正規分布の特徴づけと，Scale parameter の推定量の admissibility による Gamma 分布の特徴づけについてその結果をまとめて報告する。いずれも Constant regression の諸定理が，直接，関数方程式を解く形に帰着して証明される。

§I　Shift parameter の推定量の admissibility による正規分布の特徴づけ

〔1〕損失関数が二次形式である場合

(A) one parameter のモデル $X_j = \theta + \varepsilon_j$ $(j=1,\cdots n)$ のとき。但し各 ε_j は分布関数 $F_j(x)$ に従う独立な誤差項で，$E\varepsilon_j = 0$，$\sigma_j^2 = E\varepsilon_j^2 < \infty$（既知）$(j=1,\cdots n)$ $\theta \in \Theta \subset R^1$ (parameter space) とするとき，

イ) $n \geqq 3$, $\sigma_j^2 > 0$ $(j=1,\cdots n)$ で, $\hat{L} = \sum_{j=1}^{n} c_j^{\circ} X_j$
$\left(c_j^{\circ} = (1/\sigma_j^2) / \left(\sum_{j=1}^{n} 1/\sigma_j^2 \right) \right)$ としたとき

- $\hat{L}$ が θ の推定量として不偏推定量のうちで admissible

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ は正規分布 $(j=1,\cdots n)$ (Kagan 1966)。

- $\hat{L}$ が θ の推定量として absolutely admissible

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ は正規分布 $(j=1,\cdots n)$。

  (これは, Hodges Lehman の Th. よりすぐ導びかれる。)

ロ) $n \geqq 3$, で, 各 $F_j(x)$ が $2K$ 次までのモーメントをもち, parameter space Θ が退化していない区間のとき,

- K 次の polynomial 統計量 $g(\hat{L}) = a_0 \hat{L}^K + \cdots + a_K$ $(a_0 \neq 0,\ K \geqq 1)$ が $g(\theta) = E_\theta(g(\hat{L}))$ の推定量として不偏推定量のうちで optimal

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ の最初の $K+1$ 次までの moment は正規分布の moment と一致。

ハ) $n \geqq 3$ で, 同分布 $(F_j(x) = F(x)\ \ j=1,\cdots n)$ で, 任意の次数のモーメントが存在し, P_K を K 次の二乗可積な θ の polynomial 不偏推定量全体としたとき, $\Theta = R^1$ なら

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ が $P_\infty = \bigcup_{K=1}^{\infty} P_K$ のうちで admissible

  $\Leftrightarrow$ $F(x)$ が正規分布

(B) Gauss Markov model で誤差項が parameter によらない場合。即ち $\mathbb{Y}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$ の形の model で誤差 vector $\boldsymbol{\varepsilon}'=(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ の各 ε_j は分布函数 $F_j(x)$ に従う独立な確率変数，parameter $\boldsymbol{\theta}$ は更に $r\ (\leqq n)$ 次元 Vector $\boldsymbol{\beta}'=(\beta_1 \cdots \beta_r)$ によって $\boldsymbol{\theta}=A\boldsymbol{\beta}$ と表わされ，$A=\begin{pmatrix} I_r \\ B \end{pmatrix}$ は既知の $n\times r$ 行列。

イ) B のどの二行についても少なくとも一つの共通の列に 0 でない要素があり，どの列も 0-vector でないとき

- 任意の $\boldsymbol{\lambda}'=(\lambda_1 \cdots \lambda_r)$ について $\boldsymbol{\lambda}'A'\mathbb{Y}$ (LSE) が $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\beta}=E_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\lambda}'A'\mathbb{Y})$ の不偏推定量のうちで admissible

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ が正規分布 $_{(j=1,\cdots n)}$ (C. R. Rao 1959, 1967)。

ロ) B の各行が 0-vector ではなく，I_r や B の他の行とも比例する Vector でないとき，ある $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\beta}=E_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\lambda}'A'\mathbb{Y})$ について LSE を $\hat{L}=\sum_{j=1}^{n} a_j Y_j\ (a_j \neq 0)$ としたとき，

- $\hat{L}$ が $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{\beta}$ の不偏推定量のうちで admissible

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ が正規分布 $_{(j=1,\cdots n)}$ (C. R. Rao 1959, 1967)。

ハ) k 次元 Vector $G'\boldsymbol{\beta}$ (G; $r\times k$ 行列 $k<r$) の推定の場合には B がイ) と同じ条件を満し，LSE $D'\mathbb{Y}$ (D; $n\times k$ 行列) の各行が 0-vector でなければ，

- $D'\mathbb{Y}$ が $G'\boldsymbol{\beta}$ の不偏推定量のうちで admissible

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ が正規分布 $_{(j=1,\cdots n)}$ (Kagan 1969)

(C) Gauss Markov model で誤差項が parameter による場合。即ち各 ε_j が分布関数 $F_\theta(x)$ に従う独立な確率変数で，A の rank が r で non exceptional*，各 θ に対して $F_\theta(x)$ の 2K 次までのモーメントが存在するとき，

- r 個の線型独立な parameter の関数 $P_1'\beta, \cdots, P_r'\beta$ の LSE $L_1, \cdots, L_r$ が不偏推定量のうちで optimal

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ の K+1 次までのモーメントが正規分布と一致する。$(j=1,\cdots n)$

注)* 行列 A が exceptional とは，$A=\begin{pmatrix} I_r \\ B \end{pmatrix}$ と表わしたとき B の標準形の各行に少なくとも一つ 0 でない要素があり，それが ± 1 である。

(D) (A) で誤差項が独立でなく $\varepsilon_1=\xi_1$，$\varepsilon_j=\lambda\varepsilon_{j-1}+\xi_j$，$(j=2,\cdots n)$，$n\geqq 3$ （各 ξ_j は分布関数 $F_j(x)$ に従う独立な確率変数で $E\xi_j=0$，$0<E\xi_j^2<\infty$ ）なる自己回帰をしている場合 $\lambda\neq 1$ ならば，

- 最良線型不偏推定量 $\hat{L}=\sum_{j=1}^{n} c_j^0 x_j$ が不偏推定量のうちで optimal

  $\Leftrightarrow$ $F_j(x)$ が正規分布 $(j=1,\cdots n)$。

〔2〕 損失関数が一次の場合

one parameter model $X_j=\theta+\varepsilon_j$ で独立，同分布とし，各 X_j の分布関数 $F(x-\theta)$ が Unimodal で，

連続可微分な確率密度関数 $f(x-\theta)$ をもつとしたとき，

(A) 損失関数が $r(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta}-\theta|$ で，$n \geqq 6$ ならば

- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ が θ の推定量として (absolutely) admissible

  $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ は正規分布　　(Kagan, Zinger 1971)。

(B) 損失関数が $r(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} -\alpha(\hat{\theta}-\theta) & \text{if } \hat{\theta} \leqq \theta \\ \beta(\hat{\theta}-\theta) & \text{if } \hat{\theta} > \theta \end{cases}$ で

$F(c) = \beta/\alpha+\beta$，　$n \geqq 6$ ならば，

- $\bar{X} - c$ が θ の推定量として admissible

  $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ は正規分布。

〔3〕損失関数が信頼区間の形のとき，すなわち

$r(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\hat{\theta}-\theta| \leqq b \\ 1 & \text{if } |\hat{\theta}-\theta| > b \end{cases}$ で，〔2〕と同じ model

の場合，$n \geqq 3$ ならば

- ある零列 $b_j \to 0$ $(j \to \infty)$ に対して，常に $\bar{X}$ が admissible

  $\Longleftrightarrow$ $F(x)$ は正規分布　。

（もし，$F(x)$ が正規分布でなければ，十分小さな $b>0$ に対してある区間 $\Delta = (\underline{\Delta}(X_1 \cdots X_n), \bar{\Delta}(X_1 \cdots X_n))$ が存在して，任意の $\theta \in R^1$ について，

$$P_\theta(\theta \in [\underline{\Delta}, \bar{\Delta}]) > P_\theta(\theta \in [\bar{X}-b, \bar{X}+b])$$ ）

[4] Pitman estimator が損失関数のとり方によらずに決まるのはどの様な分布のときか？　この一つの答が次の様な形で示されている。

独立同分布な one shift parameter model で，X_j の分布 $F(x)$ が正の連続確率密度をもち，損失関数の族 $\{ r_s(\hat{\theta}, \theta) = | e^{is\hat{\theta}} - e^{is\theta} |^2 \quad s \in R^1 \}$ を考えたとき，$n \geqq 3$ ならば

- Pitman estimator がどの $r_s(\hat{\theta}, \theta)$ についても同じである

$\Longleftrightarrow$ $F(x)$ は正規分布，又は，確率密度関数 $f_{\alpha,\beta}(x) = (2\beta / K(\alpha)) \exp(-\alpha \cosh \beta x)$ をもつ

(Rukhin 1970)．

§II Scale parameter の推定量の admissibility による Gamma 分布の特徴づけ

[1] $X_1 \cdots X_n$ は独立で退化していない分布関数 $F_1(x/\sigma)$, $F_2(x/\sigma)$, $\cdots$, $F_n(x/\sigma)$, $\sigma \in R_+^1$ に従い，$F_j(0) = 0$ $\int x^2 dF_j(x) < \infty$ $(j = 1, \cdots n)$ とし，損失関数は二次形式であるとき，

イ) • ある $n_2 > n_1 \geqq 3$ に対して最良線型推定量 $\hat{\sigma}$ が absolutely admissible

$\Longleftrightarrow$ $F_j(x)$ は Gamma 分布 (Kagan, Rukhin 1967)
(Khatri 1968)

ロ) • ある $n_2 > n_1 \geqq 3$ に対して最良不偏線型推定量 $\hat{L}_U$ が不偏推定量のうちで admissible

$\Longleftrightarrow$ $F_j(x)$ は Gamma 分布 (Kagan, Rukhin 1967)
(Khatri 1968)

〔2〕 $X_1 \cdots X_n$ は独立同分布で退化していない分布関数 $F(x/\sigma)$, $\sigma \in I$ (退化していない区間) に従い, $F(0_-)=0$ $\alpha_{2k} = \int x^{2k} dF(x) < \infty$, $g(\bar{X}) = a_0 \bar{X}^k + \cdots + a_k$ $(a_0 \neq 0)$, $k \geqq 1$ としたとき, $m \geqq 3$ ならば

• $n = m, m+1, \cdots, m+k-1$ に対して, $g(\bar{X})$ が $g(\sigma) = E_\sigma(g(\bar{X}))$ が不偏推定量のうちで optimal

$\Longleftrightarrow$ $F(x)$ は Gamma 分布 (Kagan 1968)

§III まとめ

§I では, [1] での $n \geqq 3$ の仮定は本質的で, $n=2$ では対称分布等が含まれてしまうが, [2] での $n \geqq 6$ の仮定は本当に必要かどうか今のところ不明である。又、[4] の問題も損失関数をもう少し一般にした形での解答が望まれる。

§II では損失関数が2次形式以外の場合は, 現在みあたらない, 又, Shift, Scale いずれの parameter も未知の場合

も一つの問題として研究集会で提起された。更に，正規分布，Gamma 分布以外の分布を推定量のよさから特徴づけるといった方向もあると思われる。

1974.8.