数理解析研究所講究録
第223巻 1974年 82-98

正規分布の特徴づけ

東工大・理　伊藤一郎

§0. Introduction

確率分布の特徴づけに関して，最近英訳が出版された，Kagan-Linnik-Rao の "Characterization problems in mathematical statistics" (Wiley 1973) では，様々の角度から，様々の分布の特徴づけが扱われている。正規分布の特徴づけに関しては，その中でも数章に亘って定理が述べられており，また，現在 multi-normal を含めた正規分布の特徴づけに関する文献も 150 をこえている。そこで，この報告では，一次元正規分布に限っての特徴づけの主要なものをまとめて述べるが，この講究録で別に書かれるであろう "sufficiency を用いた特徴づけ" 等は省略する。終りの文献は，定理として述べられたものに限るが，その他も，K-L-R の本や，Kotz らの特徴づけに関する bibliography に殆んどがあげられている。

<u>定理</u> (Cramér)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d.

$L = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$: normal $\Rightarrow$ X_1 : normal

この有名な定理と，その Linnik による一般化された定理は，以下の定理の証明において，極めてしばしば用いられる。

§ 1. Independence of two statistics による特徴づけ.

(1) linear statistic と linear statistic の場合.

M. Kac (1939), S. Bernstein (1941) らによる Maxwell の速度分布からの特徴づけに始まり，B.V. Gnedenko, D. Basu, Yu.V. Linnik, E. Lukacs, E.P. King らの研究を経て，V.P. Skitovitch (1954) と G. Darmois (1954) によって独立に，完全に解決された。

<u>定理 1.1</u> (Skitovitch - Darmois)

$X_1, \cdots, X_n$: indep. (not nec. i.d.)

$L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$

$L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$

$L_1 \perp\!\!\!\perp L_2 \Rightarrow a_ib_i \neq 0$ なる i について X_i : normal

証明には，次の Linnik，Rao による函数方程式に関する lemma を用いる。なお，$X_1, \cdots, X_n, \cdots$ と可算個の場合にも，Ramachandran に同様の結論がある。

<u>Lemma</u> (Linnik, Rao)

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i (u + l_i v) = A(u) + B(v) + P_k(u, v)$$

$|u| < \delta$, $|v| < \delta$; P_k : poly. of deg. k

A, B, ψ_i : complex-valued

(i) l_i : distinct

(ii) A, B, ψ_i : conti.

$\Rightarrow$ A, B, ψ_i は 0 の近傍で deg. $\leq \max(n, k)$ の polynomial

(2) linear statistic と quadratic statistic の場合.

"母集団が normal の時，sample mean と sample variance は独立である" という Fisher の命題の逆として，初め Geary (1936) によって扱われたが，Lukacs の研究を経て，全ての moment の仮定なしで，Kawata - Sakamoto (1949)，Zinger (1951) によって解決された。また別の場合として Geisser (1956) があり，それらの一般化として Laha の結果がある。

定理 1.2

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \overline{X})^2$$

$\overline{X} \perp\!\!\!\perp S^2 \Rightarrow X_1$: normal

より一般に，sample mean と K-statistic の独立性からの正規分布の特徴づけが Basu-Laha，Lukacs らによって行なわれ，又，sample mean と p 次-central moment ($m_p = \frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^p$) との独立性からの特徴づけも Khalfin，Chugujeva，Laha-Lukacs-Newman，Anosov らによってかなり研究されている．

定理 1.3 (Geisser 1956)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. ，variance の存在仮定

$$Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}(X_{i+k} - X_i)^2$$

$\overline{X} \perp\!\!\!\perp Q \Rightarrow X_1$: normal

定理 1.4 (Laha 1956)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. ，variance の存在仮定

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0 , \quad \sum_{i,j} a_{ij} = 0$$

$\overline{X} \perp\!\!\!\perp Q \Rightarrow X_1$: normal

2つの quadratic statistics の場合にも，Lancaster (1960) の結果がある．しかも，彼の論文の中では，"独立性の仮定から，実はすべての次数の moment の存在がいえる" ということを注意している．

§ 2. Identically distributed statistics による特徴づけ

Polya (1923) による特徴づけ（X_1, X_2 : i.i.d. の時，X_1 と $a_1X_1+a_2X_2$ が同分布ならば，X_1, X_2 は normal）に始まる statistics の分布の同一性からの特徴づけは，J. Marcinkiewicz (1938), Yu. V. Linnik (1953) らによって解決されている．

<u>定理 2.1</u> (Marcinkiewicz)

$X_1, \cdots, X_n$: 有限個又は可算個の i.i.d.

すべての次数の moment の存在仮定

$$L_1 = \sum a_i X_i, \quad L_2 = \sum b_i X_i \quad ; \quad \{|a_i|\} \neq \{|b_i|\}$$

L_1, L_2 : 同分布 $\Rightarrow$ X_1 : normal

定理 2・2 (Linnik)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d.

$$L_1 = \sum a_i X_i \qquad ; \quad \max(|a_1|, \cdots, |a_n|) \neq \max(|b_1|, \cdots, |b_n|)$$
$$L_2 = \sum b_i X_i$$

γ を $\sigma(z) = \sum_i (|a_i|^z - |b_i|^z)$ の maximal real zero とする。

X_1 が $2[\frac{\gamma}{2}+1]$ 次の moment をもち、L_1, L_2 : 同分布

$\Rightarrow X_1$: normal

§3. Constant regression による特徴づけ

独立性を constant regression に弱めるという方向は、sample mean と sample variance の関係における Geary の定理の一般化という形で始まった。一方、2つの linear statistics に関する constant regression の形の定理は、統計的意味づけをもった Kagan-Linnik-Rao (1965) の論文に始まっている。

この形の定理は、"$E(Y|X) = EY \Rightarrow E(Ye^{itX}) = E(Y)E(e^{itX})$" という事実を使い、特性函数に関する函数方程式を導き、それを解くことによって証明される。

(1) linear statistic に対する non-linear statistic の regression。

sample mean と sample variance に関する定理は，M.C.K. Tweedie (1946) によって示され，その一般化が次のいくつかの定理である。

定理 3.1 (Laha 1953)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $\mathrm{Var}\, X_1 < \infty$

$$L = X_1 + \cdots + X_n$$

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j \quad ; \quad \sum_i a_{ii} \neq 0 \ , \ \sum_{i,j} a_{ij} = 0$$

$$E(Q \mid L) = EQ \quad \Rightarrow \quad X_1 : \text{normal}$$

定理 3.2 (Laha-Lukacs 1960)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $\mathrm{Var}\, X_1 < \infty$

$$L = X_1 + \cdots + X_n$$

$$Q = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j + \sum l_i X_i$$

$$A \equiv \sum_{i,j} a_{ij} \ , \ A' \equiv \sum_i a_{ii} \ . \ B \equiv \sum_i l_i$$

$$nA' \neq A \quad ; \quad \alpha \equiv A/n^2 \ , \ \beta \equiv B/n$$

$$E(Q \mid L) = c + \beta L + \alpha L^2 \ (c : \text{const.}) \quad \Rightarrow \quad X_1 : \text{normal}$$

定理 3.3

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $E|X_1|^p < \infty$

$L = X_1 + \cdots + X_n$

$P = P(X_1, \cdots, X_n)$: homog. poly. statistic deg. $p \geq 2$

: p次 cumulant κ_p の unbiased estimator

$E(P|L) = E(P) \Rightarrow X_1$: normal

定理 3.4 (Cacoullos 1967)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $\mathrm{Var}\, X_1 < \infty$

$L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$; a_i : 同符号 (X_i : sym. なら $\forall i, a_i \neq 0$ でよい)

$L_2 = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$; $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0$

$E(L_2^2 | L_1) = E(L_2^2) \Rightarrow X_1$: normal

(2) linear statistic に対する linear statistic の regression

定理 3.5 (Kagan - Linnik - Rao 1965)

$X_1, \cdots, X_n$ $(n \geq 3)$: i.i.d. , $EX_1 = 0$

$E(\bar{X} | X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_1) = 0 \Rightarrow X_1$: normal

上の K-L-R 定理の一般化が以下の諸定理であるが，その証明は，定理 2.2 の証明において用いられる Linnik の函数方程式

に関するlemmaなど，函数方程式の問題に帰着されている。

定理 3.6 (Rao 1967 ; Pathak - Pillai 1968)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $EX_1 = 0$

$$L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \quad ; \quad |l_n| > \max(|l_1|, \cdots, |l_{n-1}|)$$
$$L_2 = l_1X_1 + \cdots + l_nX_n \qquad a_n \neq 0, \quad a_il_i / a_nl_n < 0 \ (i=1,\cdots,n-1)$$

$\sum_i a_il_i = 0$, $E(L_1 | L_2) = 0 \Rightarrow X_1$: normal

Cor. $E(\overline{X} | X_i - \overline{X}) = 0$ for any $i \Rightarrow X_1$: normal

定理3.6において，Raoが初め仮定したVarianceの存在の仮定は不要であった。しかし，l_nに関する仮定ははずせない。

例. ($n=2$の場合，$|l_1| \neq |l_2|$ がはずせないこと)

$E(X_1 - X_2 | X_1 + X_2) = 0 \Rightarrow$ (何もわからない)

$E(X_1 + X_2 | X_1 - X_2) = 0 \Rightarrow$ symmetric

(c.f. $X_1 - X_2 \perp\!\!\!\perp X_1 + X_2 \Rightarrow$ normal)

定理 3.7 (Rao 1967)

$X_1, \cdots, X_n$ ($n \geq 3$) ; indep. (not nec. i.d.) $EX_i = 0$

$$L_1 = a_1X_1 + \cdots + a_sX_s + a_{s+1}X_{s+1} + \cdots + a_{s+k}X_{s+k} + a_{s+k+1}X_{s+k+1} + \cdots + a_nX_n$$

$$L_2 = e_1X_1 + \cdots + e_sX_s \qquad\qquad + e_{s+k+1}X_{s+k+1} + \cdots + e_nX_n$$

$$L_3 = c_1X_1 + \cdots + c_sX_s + c_{s+1}X_{s+1} + \cdots + c_{s+k}X_{s+k}$$

- $a_i \neq 0$ ($i = 1, \cdots, n$) , $e_ic_i \neq 0$ ($i = 1, \cdots, s$)
- $c_i/e_i \neq c_j/e_j$ ($i, j = 1, \cdots, s$; $i \neq j$)
- c_i/a_i ($i = s+1, \cdots, s+k$) は 同符号
- e_i/a_i ($i = s+k+1, \cdots, n$) は 同符号

$E(L_1 \mid L_2, L_3) = 0 \Rightarrow X_1, \cdots, X_n$: normal .

Cor. $X_1, \cdots, X_n$: not nec. i.d. で $E(\overline{X} \mid X_1 - \overline{X}, X_2 - \overline{X}) = 0 \Rightarrow X_1, \cdots, X_n$: normal

定理 3.8 (K-L-R 定理の一般化 — Rao 1967)

$X_1, \cdots, X_n$ ($n \geq 3$) ; indep. (not nec. i.d.) $EX_i = 0$

$$L_i = a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n \ ; \ a_{1j} \neq 0 \ (j = 1, \cdots, n), \ \det(a_{ij}) \neq 0$$

$E(L_1 \mid L_2, \cdots, L_n) = 0 \Rightarrow X_1, \cdots, X_n$: normal

定理 3.9 (Ramachandran - Rao 1968)

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. , $EX_1 = 0$

$$L_1 = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \qquad ; \qquad c_j = \begin{cases} a_j / \ell_j & \ell_j \neq 0 \\ 0 & \ell_j = 0 \end{cases}$$
$$L_2 = \ell_1 X_1 + \cdots + \ell_n X_n$$

$$\max(|\ell_j| ; c_j > 0) \neq \max(|\ell_j| ; c_j < 0)$$

γ を $G(\lambda) = \sum_j c_j |\ell_j|^\lambda$ の maximal real zero とする.

X_1 が $2[\frac{\gamma}{2}+1]$ 次の moment をもち, $E(L_1 | L_2) = 0 \Rightarrow X_1$: normal

定理 3.10 (Khatri - Rao 1968)

$X_1, \cdots, X_n$: indep. (not nec. i.d.) , $EX_i = 0$

$$L = X_1 + \cdots + X_n$$

$$\begin{matrix} M_1 = X_1 + \cdots & & + c_{11} X_{p+1} + \cdots & + c_{1n} X_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_p = & X_p & + c_{p1} X_{p+1} + \cdots & + c_{pn} X_n \end{matrix} \qquad \begin{matrix} p \geq 2 \\ ; \mathbb{C} = (\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_{n-p}) \\ = (c_{ij}) \end{matrix}$$

$\forall i$; $\mathbb{C}_i$ は $\mathbb{C}_j$ $(i \neq j)$ にも $\mathbb{C}_j^{(p)}$ にも比例しない.

$E(L | M_1, \cdots, M_p) = 0 \Rightarrow X_1, \cdots, X_n$: normal

可算個の $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ の場合にも, K-L-R の本では扱っている.

§ 4. その他の主な特徴づけ（I）

<u>定理 4.1</u>（Kagan - Shalaevskii　1967）

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d. $(n \geq 2)$

$\chi^2 = \sum_i (X_i + a_i)^2$ が $\sum_i a_i^2$ (a_i : real) にのみ依存 ⇒ X_1 : normal

<u>定理 4.2</u>（Seshadri　1969）

X_1, X_2 : i.i.d.

$U = X_1 / X_2$: Cauchy symmetric $(u = 0)$

$V = X_1^2 + X_2^2$

$U \perp\!\!\!\perp V$ ⇒ X_1 : normal

<u>定理 4.3</u>（Heyde　1970）

$X_1, \cdots, X_n$: i.i.d.

$$L_1 = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \qquad a_i \ell_i \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$;$$

$$L_2 = \ell_1 X_1 + \cdots + \ell_n X_n \qquad a_i/\ell_i \neq a_j/\ell_j \quad (i, j = 1, \cdots, n;\ i \neq j)$$

L_2 を与えた時の L_1 の条件付分布が symmetric ⇒ X_1 : normal

§5. その他の主な特徴づけ（II）

<u>定理 5.1</u>

分散有限な安定分布は normal.（Polya）

<u>定理 5.2</u>

$p(x)$: p.d., cont'ly diff'ble, variance σ^2（一定）, $|x|p(x) \longrightarrow 0$ $(|x| \to \infty)$ なるもののうち Fisher 情報量を最小にする分布は normal.

<u>定理 5.3</u>

$(-\infty, \infty)$ に density をもち，平均・分散一定で，エントロピー最大の分布は normal.

<u>定理 5.4</u>（Borgers 1966）

inf. div. で $E(X-EX)^4 = 3(\mathrm{Var}\ X)^2$ なる分布は normal.

inf. div. で $\dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}} \log f(t) \Big|_{t=0} = 0$ (for some $n > 1$) なる分布は normal.

<u>定理 5.5</u>（Ruegg 1970）

inf. div. (non-deg.) で，$\exists a > 0$, α $(0 < \alpha \leq 1)$: consts. ;

$1 - F(x) + F(-x) = O[\exp(-ax^{1+\alpha})]$ $(x \to \infty)$ なる分布は normal.

inf. div. (non-deg.) で, $\exists a>0,\ \delta>1$: consts :

$1-F(x)+F(-x)=O[\exp(-a(\log x)^{\delta})]$ $(x\to\infty)$ なる分布は normal

定理 5.6 (Horn 1972)

inf. div. で $1-F(x)+F(-x)=O[\exp(-xM(x))]$ $(x\to\infty)$

($M(x)$: non-deg. m'ble) としたとき, $M(x)/\log x \longrightarrow \infty$ $(x\to\infty)$ で,

$M(x)$: conti. strictly increasing for all suff. large x なる分布は normal.

参考文献

Cacoullos, T. "Some characterizations of normality" Sankhya Ser. A 29 (1967)

Darmois, G. "Analyse générale des liaisons stochastiques" Rev. Inst. Internationale Statist. 21 (1953)

Geary, R.C. "Distribution of 'Student's' ratios for non-normal samples" J. Roy. Stat. Soc. Suppl., Ser. B 3 (1936)

Geisser, S., "A note on the normal distribution" Ann. Math. Statist. 27 (1956)

Heyde, C.C. "Characterizations of the normal law by the symmetry of a certain conditional distribution." Sankhya, Ser. A 32 (1970)

Horn, R.A. "On necessary and sufficient conditions for an infinitely divisible distribution to be normal or degenerate" Z.W. 21 (1972)

Kagan, A.M.; Linnik, Yu.V.; Rao, C.R. "On a characterization of the normal law based on a property of the sample average," Sankhya, Ser. A 27 (1965)

Kagan, A.M; Shalaevskii, O.V. "Characterization of the normal law by a property of the non-central chi-square distribution" Litovskii Matem. Sbornik 7 (1967)

Kawata, T.; Sakamoto, H. "On the characterization of the independence of the sample mean and the sample variance," J. Math. Soc. Japan 1 (1949)

Khatri, C.G.; Rao, C.R. "Solutions to some functional equations and their applications to characterizations of probability distributions" Sankhya, Ser. A 30 (1968)

Laha, R.G., "On an extension of Geary's theorem" Biometrika 40 (1953)

———, "On the stochastic independence of a homogeneous quadratic statistic and the sample mean," Vestnik Leningrad. Univ. 1 (1956)

Laha, R.G.; Lukacs, E. "On a problem connected with quadratic regression" Biometrika 47 (1960)

Lancaster, H.O., "The characterization of the normal distribution"
J. Aust. Math. Soc. 1 (1960)

Linnik, Yu.V., "Linear forms and statistical criteria. I, II" Ukrain Math. Zurnal, 5 (1953)

Marcinkiewicz, J. "Sur une propriete de la loi de Gauss," Math. Zeitschrift 44 (1938)

Pathak, P.K. ; Pillai, R.N. "On a characterization of the normal law" Sankhya, Ser. A 30 (1968)

Ramachandran, B. ; Rao, C.R. "Some results on characteristic functions and characterizations of the normal and generalized stable laws" Sankhya, Ser. A 30 (1968)

Rao, C.R. "On some characterizations of the normal law." Sankhya, Ser. A 29 (1967)

Ruegg, A. "A characterization of certain infinitely divisible laws." Ann. Math. Statist. 41 (1970)

Seshadri, V. "A characterization of the normal and Weibull distributions" Canad. Math. Bull. 12 (1968)

Skitovich, V.P. "Linear forms in independent random variables and the normal distribution law." Izvestiia AN SSSR, Ser. Matem 18 (1954)

Tweedie, M.C.K., "The regression of the sample variance on the sample mean." J. Lond. Math. Soc. 21 (1946)

Zinger, A.A., "On independent samples from a normal population"
Uspekhi Matem. Nauk 6 (1951)