数理解析研究所講究録
第223巻 1974年 114-120

functionalを用いた分布の特徴づけ

統計数理研究所 柳本武美

分布を特徴づけるのには，関数方程式を解くことに帰着することが多い。これをまともに解くのは大変なので，分布の上に定義されたfunctionalを用いるとうまく行くことが多い。特性函数とかエントロピーは代表的なものである。単に関数方程式が解けるだけでなく，与えられた性質がそのfunctionalにどう反影するか自体にも興味深いことが多い。

近年種々のfunctionalの性質を調べて，分布を特徴づける論文が多くみられる。本稿では田中ら[1]，[4]と清水[3]の結果を整理し，分布の特徴づけへの応用を試みる。

1. e[f]について.

確率分布 f をもつ確率変数 X に対するfunctionalとして田中は次のような e[f] を導入した[4]. f が分散 σ^2 をもつと仮定して，平均を 0 として，

$$e[f]\,(=e[X]) = \inf E[|X-Y|^2]$$

ここで inf は (X, Y) が2次元の確率変数で各々の周辺分布が f 及び $N(0, \sigma^2)$ であるものについてとる。$F(x)$ と $\Phi(y)$ を各々の分布関数とする。さて [4] では Weyl automorphism を用いて，inf を attain する (X, Y) が $X = F^{-1}(\Phi(Y))$ a.e. であることを示している。

ところが次のようにしても証明される。

$$e[X] = \inf\{2\sigma^2 - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)\}$$
$$= \inf\{2\sigma^2 - 2\int\{F(x,y) - F(x)\Phi(y)\}dx\,dy$$

ただし $F(x, y)$ は (X, Y) の分布関数である。ところが $F(x,y) \leqq F_0(x,y) = \mathrm{Min}\{F(x), \Phi(y)\}$ は常に成り立つ。inf を attain する $F(x,y)$ は $F(x,y) \equiv F_0(x,y)$ のときである。これから $X = F^{-1}(\Phi(Y))$ a.e. が得られる。

2、e[f] の多次元への拡張

多次元への拡張は [1] でもなされている。別に多次元の正規分布を特徴ずける為には次の functional を導入してもうまくいく。

X を n 次元確率変数とし，共分散行列 Σ が positive definite とする。一般性を失うことなく平均ベクトルは 0 とする。確率変数 X の functional $e(X)$ を

$$e(X) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\{e[\lambda X]\},\ ここで\ \Lambda=\{\lambda \mid \lambda\Sigma{}^t\lambda=1\}$$

で定義する。

次の性質が得られる。性質(iv)は良く知られた結果であるが，我々のアプローチでは見通し良く平易に証明される。

(i) $e(X)=0$ ならばXは正規である。

∵) 任意の$\lambda\in\Lambda$に対してλXが正規だから。

(ii) sup を attain する$\lambda_0\in\Lambda$が存在する。即ち $e(X) = e[\lambda_0 x]$

(iii) X_1, X_2が独立で共分散行列Σ_1, Σ_2をもつとする。適当な$\lambda_0\in\Lambda$に対して，

$$\begin{aligned} e(X_1+X_2) &= e[\lambda_0(X_1+X_2)] \\ &\le \lambda_0\Sigma_1{}^t\lambda_0\, e(X_1) + \lambda_0\Sigma_2{}^t\lambda_0\, e(X_2) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし等号が成立する為の必要十分条件はX_1, X_2が共に正規であることである。

(iv) X_1, X_2は独立とする。T_1, T_2, T_3, T_4は正則で且つ $T=$

$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ が正則となるような $n\times n$ 行列とする。Y_1, Y_2 を

$$Y_1 = T_1 X_1 + T_2 X_2$$
$$Y_2 = T_3 X_1 + T_4 X_2$$

としたとき、(Y_1, Y_2) が独立であれば、X_1, X_2 は正規分布をもつ。

∵) $e(X_1) \geq e(X_2)$ として一般性を失なわない。T は正則だから S_1, S_2, S_3, S_4 が存在して $X_1 = S_1 Y_1 + S_2 Y_2$, $X_2 = S_3 X_1 + S_4 X_2$ と書ける。(iii) を用いて $e(X_1) \leq c_1 e(X_1) + c_2 e(X_2)$ を示す。

(iv)′ $n=1$ とすると，結局 X_1 と X_2 が非退化な分布をもち，$Y_1 = \sin\theta X_1 + \cos\theta X_2$, $Y_2 = \cos\theta X_1 - \sin\theta X_2$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ としたとき，(Y_1, Y_2) が独立であれば X_1 と X_2 が正規分布をもつことを示している。

3. 指数分布を特徴づける *functional*

分散が一定のとき，エントロピーを最大にするのは正規分布である。$(0,\infty)$ 上の分布に制限した下で，平均を一定にしたとき，エントロピーを最大にするのは指数分布である[2]。清水[3]は Fisher の情報量を $I(\Lambda) = \int_0^\infty \{f'^2(x)/f(x)\}\,dx$

を用いて正規分布の特徴ヅけとさらに stability に関する結果を与えている。

我々は $(0,\infty)$ 上の分布に限って、指数分布の特徴ヅけと stability を検討しよう。

(i) $I(\Lambda)$ を用いた場合。$\lim_{x\to+0} f(x)=f(0)$ で且つ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ とする。以下 $f(0)$ は一定とする。$I(\Lambda)$ から誘導した functional J を

$$J=\int\frac{(f'(x)+f(0)f(x))^2}{f(x)}\,dx$$

とすると、$|f(x)-f(0)e^{-f(0)x}|\leq\sqrt{J}$ が得られる。

特に $I(\Lambda)$ を最大にする $f(x)$ は上式より指数分布の密度関数である。

(ii) $I(\Lambda)$ を修正した場合。$f(0)=0$ の制限にはやゝ違和感がある。そこで $I(\Lambda)$ を指数分布に適合するように修正して、$I'(\Lambda)$ を与える。

$$I'(\Lambda)=\int_0^\infty\frac{(1-F(x))^2}{f(x)}\,dx\text{。}$$

平均 μ を一定にした条件の下で $I'(\Lambda)$ は最小値 μ^2 をとる。これを attain する分布は指数分布である。次に J と同様

にJ′を

$$J' = \int_0^\infty \frac{(1-F(x)-\mu f(x))^2}{f(x)} dx$$

とおくと，$J' = I'(\Lambda) - \mu^2$ である．このとき

$$|1 - F(x) - e^{-(1/\mu)x}| \leq 2\sqrt{J}$$

が成り立つ．証明は[3]の方法になぞらえればよい。

参考文献

[1] Murata, H. and Tanaka, H (1973) An inequality for certain functional of multidimensional probability distribution, to be issued.

[2] Reza, F. M. (1961) An introduction to information theory, McGraw-Hill, New York.

[3] Shimizu, R (1974) On Fisher's amount of information for location family, An International Conference on Characterizations of Statistical Distribution and Their Applications to Theoritical Statistics and Applied Field, Calgary Canada.

[3] Tanaka, H (1972) An inequality for a functional of probability measures and its applications to Kac's one-dimensional model of a Maxwellian gas, to

appear in Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete.