数理解析研究所講究録
第 223 巻 1974 年 121-126

順序統計量を用いた指数分布の特徴づけ

統計数理研究所　柳本武美

指数分布は待ち行列、寿命試験等でしばしば用いられる分布である。これは指数分布が記憶忘れの分布と呼ばれるような特徴的な性質をもつことによる。

指数分布の特徴づけは正規分布の特徴づけとある程度平行的に結果が得られる。もう少し具体的に言うと，正規分布の特徴づけでは二つの独立な確率変数 X_1, X_2 の convolution $Y_1 = \sin\theta X_1 + \cos\theta X_2$ と $Y_2 = \cos\theta X_1 - \sin\theta X_2$ を考えて、その独立性あるいは Y_1 と Y_2 が同一分布に従う性質から X_1, X_2 が正規であることを示す。指数分布の特徴づけでは順序統計量を用いる。

$X_1, \cdots, X_n$ を分布関数が $F(x)$ である確率変数 X からの大きさ n のサンプルとする。$X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}$ を（小さい方からの）順序統計量とする。$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$ のとき，即ち X が位置母数 0 の指数分布に従うとき，$nX_{(1)}$, $(n-1)(X_{(2)} - X_{(1)})$

，- - -，$(X_{(n)}-X_{(n-1)})$は互いに独立で同一分布に従い，その分布関数は元の$F(x)$と一致する。逆にこの性質は指数分布を特徴づけるだろうか。

本稿では$n=2$の場合について新しい結果を含めて紹介する。この問題の周辺には興味ある問題が山積しているが，正規分布の特徴づけにおける特性関数のような有力な手段も見いだせないままに，解かれていない。

以下では$X\sim Y$はXとYが同一分布に従うことを，$X \perp\!\!\!\perp Y$はXとYが独立であることを示す。

(1)　$X_{(2)}-X_{(1)}\sim X$

Puri ら[4]の結果を少し拡張して次の結果を得る。

定理 1.　$X_{(2)}-X_{(1)}\sim X$であれば，次の4つの性質のうちいずれか一つを満たす。

(i)　$F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (\lambda>0)$

(ii)　ある$\tau>0$に対して$P(X=k\tau)=2p_0(1-p_0)(1-2p_0)^{k-1}$ for $k\geq 1$

$$P(X=0)=p_0$$

(iii)　ある$\tau>0$に対して，$P(X=\tau)=P(X=0)=1/2$

(iv)　$P(X=0)=0$　（これは自明の場合で，以降ではこの場合を除く）

証明、[4]で殆んど証明されているので完結させればよい。残っている場合は絶対連続でなくて有界でなく、$x' > x > 0$ で $F(x') = F(x)$ が成り立たない場合である。この場合も X は任意次のモーメントをもつ。

state space を $[0, \infty)$ で transition probability を $K(x, \Gamma)$ として、

$$K(x, \Gamma_x) = \int_{y \in \Gamma_x^+} (dF(x+y) + dF(x-y)) + \int_{y \in \Gamma_x^-} dF(x+y)$$

$$+ \int_{y \in \Gamma_x^0} dF(x+y)$$

ここで $\Gamma_x^+ = \{y \mid x \geq y > 0,\ y \in \Gamma\}$, $\Gamma_x^-\ \{y \mid x < y,\ y \in \Gamma\}$, $\Gamma^0 = \{0\}$ である。条件が $dF(x)$ は stationary probability である。また密度関数が

$$g(x) = 1 - F(x-0) \qquad \text{for } x > 0$$
$$= 1/2 \qquad \text{for } x = 0$$

で表わされる確率分布も stationary である。従って上で定義したマルコフチェインが ergodic であることを示せばよい。この為には Feller [3] の p266 定理2を用いれば容易に示される。

(2) $2X_{(1)} \sim X$

この条件は分布関数を用いて表わすと

$$(1-F(\tfrac{x}{2}))^2 = 1-F(x) \quad \text{for any } x$$

と一致する。Xが0に退化した場合を除くと，$P(X>0)=1$。

だから，$\varphi(y)$を

$$\varphi(y) = \log(-\log(1-F(e^y))) - y$$

と定義すると上の条件は$\varphi(y)$が周期$\log 2$をもつことと一致する。従って$2X_{(1)} \sim X$は指数分布を特徴づけない。

$X_{(1),n}$を大きさnの標本の最小順序統計量とすると，次の定理が成りたつ。

定理．$\log n/\log 2$が無理数とする。$2X_{(1)} \sim nX_{(1),n} \sim X$であれば，$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$である。

系．[2] すべてのnに対して，$nX_{(1),n} \sim X$が成り立てば$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0)$である。

(3) $2X_{(1)} \sim X_{(2)}-X_{(1)}$

open problem である。

(4) $2X_{(1)} \perp\!\!\!\perp X_{(2)}-X_{(1)}$

この条件については多くの結果が得られた。様々な拡張もなされた。[1]で上の条件を満たすのは指数分布か幾何分布のいずれかであることを示している。

Schanbhag [5]は平均の存在を仮定して，$E(X_{(2)}-X_{(1)}$

$|_{X_{(1)}=x}$)が一定である為の条件を求めた。F(x) が連続であれば指数分布であり，マスポイントが適当なて，μ に対して $\{kT+\mu \mid k$ は整数$\}$ に含まれる場合は幾何分布である。

この条件は[6] の記号を使うと $(2X_{(1)}, X_{(2)}-X_{(1)}) \in \mathcal{P}(3, E) \cap \mathcal{H}(3, E)$ と殆んど同じになる。一般にはこの条件を満たす分布は数多く存在する。

上では平均を扱ったが，$X_{(2)}-X_{(1)}|_{X_{(1)}=x}$ と X との間に，

$$P(X_{(2)}-X_{(1)}|_{X_{(1)}=x} > X) = P(X_{(2)}-X_{(1)}|_{X_{(1)}} < X)$$

が成り立つ場合を考える。ただし X_1, X_2, X は互いに独立であるとする。この条件はやはり[6]での記号を使うと $(2X_{(1)}, X_{(2)}-X_{(1)}) \in \mathcal{P}(3, 0) \cap \mathcal{H}(3, 0)$ で表わされる．次の定理は最初の定理の系として得られる。

定理．F(x)が連続とする。$(2X_{(1)}, X_{(2)}-X_{(1)}) \in \mathcal{P}(3, 0) \cap \mathcal{H}(3, 0)$ であれば，$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$ である。

REFERENCES

[1] Crawford, G. B. (1966). Characterization of geometric and exponential distributions, Ann. Math. Statist., 37, 1790-1795.

[2] Desu, M. M. (1971). A characlerization of the exponential distribution by order statistics, Ann. Math. Statist., 42, 837-838.

[3] Feller, W. (1966). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Wiley, New York.

[4] Puri, P. S. and Rubin, H. (1970). A characterization based on the absolute difference of two i. i. d. random variables, Ann. Math. Statist., 41, 2113-2122.

[5] Shanbhag, D. N. (1970). The characterizations for exponential and geometric distributions, J. Amer. Statist. Assoc., 65, 1256-1259.

[6] Yanagimoto, T. (1972). Families of positively dependent random variables, Ann. Inst. Math. Statist., 24, 559-573.