数理解析研究所講究録
第 223 巻 1974 年 127-147



# 変換群による分布の特徴づけ（II）
## 指数型分布族と変換群

大阪市大　森本治樹

§1. 指数型分布族が含むパラメターが位置・尺度などの変換パラメターである場合，分布の型は極めて限られた範囲のものになる。このことは，すでに Koopman [1] において指摘され，その後も多くの人がこの問題を扱ってきた。本稿ではそれらのうち主要な結果を略述・紹介することとする。

$X$ を標本空間，$\mathcal{A}$ を $\sigma$-field，$\mu$ を $\mathcal{A}$ 上の $\sigma$-有界な測度とする。$\mathcal{P}$ を $\mathcal{A}$ 上の確率測度の族で，その各元 $P_\theta$（$\theta \in \Theta$）が $\mu$ に関して絶対連続であるとする。このとき

［定義 1］ $\mathcal{P}$ が $\mu$ に関して指数型分布族であるとは，

$$p_\theta(x) = \frac{dP_\theta}{d\mu}(x) = \exp\left[\alpha_0(\theta) + s_0(x) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\theta) s_j(x)\right] \quad (1)$$

と書けることをいう。ただし $s_0(x)$, $s_1(x)$, $\cdots$, $s_k(x)$ は実数値 $\mathcal{A}$-可測関数，$\alpha_0(\theta)$, $\alpha_1(\theta)$, $\cdots$, $\alpha_k(\theta)$ は実数値関数とする。

この定義に伴って，普通次のような仮定を設ける。

［仮定1］ (イ) $\{1, \alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_k(\theta)\}$ は $\Theta$ 上でたがいに1次独立。 (ロ) $\{1, S_1(x), \cdots, S_k(x)\}$ は $\mathcal{P}$ に関して殆ど確実に1次独立。

［仮定2］ すべての $\theta \in \Theta$ に対し，$\mu$ に関して殆ど至るところ $p_\theta(x) > 0$。

仮定1を付けた上で(1)を「k母数指数型分布族」という。仮定2は，$\mathcal{P}$ 全体と $\mu$ をたがいに同値（equivalent）とするものである。

§2. 以下しばらく $X$ を $R$ のボレル集合，$\mathcal{Q}$ を $X$ のボレル部分集合の全体とする。また $\mu$ をルベーグ測度とする。

［定義2］ $\mathcal{P}$ が位置母数族であるとは $X = \Theta = R$ で，かつすべての $\theta \in \Theta$, $A \in \mathcal{Q}$ に対して $P_\theta(A) = P_0(A - \theta)$ が成立つことをいう。

本稿の最初にふれた，Koopman の指摘とは，次のようなことである。

［定理1］ $\mathcal{P}$ が k母数指数型分布族で，かつ位置母数族であるとする。また $p_\theta(x)$ が $x$ に関して微分可能であるとする。すると，$p_\theta(x)$ は次の形に書ける：

$$p_\theta(x) = \exp\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(x-\theta)\, e^{\alpha_i(x-\theta)}\right]. \quad (4)$$

ただし $A_1, \cdots A_m$ は多項式，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ は定数である。

この結果の証明は次のように行われる。すなわち，$\mathcal{P}$が位置母数族であることから，$p_\theta(x) = p_0(x+\theta)$と書ける。したがって $\log p_\theta(x) = q_\theta(x)$ とおくと，$q_\theta(x) = q_0(x+\theta)$ である。一方，[定義 1] から $q_\theta(x) = [\alpha_0(\theta) + s_0(x) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(\theta)\, s_j(x)]$ である。そこで問題は

$$F(u+v) = \sum_{\mu=1}^{\omega} G_\mu(u)\, H_\mu(v) \qquad (2)$$

$(u, v \in R)$ を解くことに帰着する。Koopman はここで Stäckel [2] の結果を引用する。それは $F$ が微分可能であるとの仮定のもとで，(2) の解が

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{\kappa} P_\nu(u)\, e^{\tau_\nu u} \qquad (3)$$

(たゞし $P_\nu$ は多項式で $\tau_\nu$ は定数)に限られるというものである。これは，すでに殆ど[定理 1] そのものである。

(2) から (3) を導くことは，実は微分可能性の仮定を必要とせず，$F$の可測性だけを用いて行えるもののようである[1]。このことと，[定理 1] を $p_\theta(x)$ の微分可能性を用いず可測性だけによって証明することとは同じことである。実際後述するように，この後者は Ferguson [4] によって行われている。

---

1) ここでは適当な引用文献をあげることができないが，かなりよく知られた事実である。

Dynkin [3] の結果は，位置母数を扱う限りにおいては，この Koopman の結果とあまり変りがない。ただ1つ，Dynkin は，$\mathcal{P}$ が指数型分布族であるという仮定を弱めて，$\{P_\theta \mid a < \theta < a+\delta\}$ が，ある $a$ と $\delta(>0)$ に対して指数型分布族であるという条件を用い，$p_\theta$ の微分可能性と併用して，それから［定理1］と同じ結論を導くのである。これは方程式(2)を解く際に $\theta$ の値がある区間に限られることを意味するが，そこから大きな困難は起らない。

§3. 前節に用いた条件をゆるめて，

① $\mu$ はルベーグ測度と限らず，任意の $\sigma$－有界測度であるとし，また

② $p_\theta$ の微分可能性の仮定をすてて，$S_0(x), S_1(x), \cdots; S_k(x)$ の可測性だけを仮定する。

こうしても［定理1］の結果はそのまま成立つことを，FERGUSON [4] が明かにした。

まず①については，次のことが示される：

［補題1］ $l$ をルベーグ測度，$\mu$ を $\sigma$－有界測度とする。$\mathcal{P}$ が位置母数族で $\mathcal{P} \ll \mu$ なら，$\mathcal{P} \ll l$。

［略証］ 結論を否定すると $^{\exists}A \in \mathfrak{A}$ ; $P_0(A) > 0$, $l(A)$

$= 0$ となる。このAに対し $\forall\theta$ $P_\theta(A+\theta) > 0$ となるから，$\forall\theta$ $\mu(A+\theta) > 0$ となる。一般性を失わずに $\mu(R) < \infty$ とし，$\nu = \mu * \ell$ (convolution) とする。勿論 $\nu \ll \ell$ だから $\nu(A) = 0$。しかるに $\nu(A) = \int \mu(A-\theta)\, d\ell(\theta) > 0$。

したがって「$\mathcal{P}$ が $\mu$ に関して指数型分布族なら，$\ell$ に関しても指数型分布族となり，$\frac{dP_\theta}{d\ell} = p_\theta$ が[定理1]の形にあらわせる」のである。

また ◎ は，次の補題によって示される：

[補題2] $\mathcal{P}$ が~~母数~~指数型分布族で，位置~~母~~数族ならば，$dP_\theta/d\ell$ を(1)の形にあらわしたとき，$\alpha_0(\theta), \cdots \alpha_k(\theta)$, $S_0(x), \cdots, S_k(x)$ がすべて無限回微分可能であるようにとれる。

この補題の証明は，原理は単純で式は長大といった態のもので，次の事実が決定的な役割を演ずる。それは

[補題3] $\mathcal{P}$ が位置~~母~~数族で，$\mathcal{P} \ll \ell$ なら，すべての $A \in \mathcal{A}$ に対して $P_\theta(A)$ は $\theta$ の連続関数である。

ということである。この証明は簡単で，$\theta_n \to \theta_0$ に対して

$$|P_{\theta_n}(A) - P_{\theta_0}(A)| = |P(A-\theta_n) - P(A-\theta_0)| \leqq$$

$$P((A-\theta_n) \ominus (A-\theta_0)) \ll \ell((A-\theta_n) \ominus (A-\theta_0)) \to 0$$

を確認するだけでよい。このことを利用して，例えば $\alpha_1(\theta)$ の連続性は次のように証明される。

$\theta_n \to \theta_0$ とし，簡単のためここでは $\alpha_1(\theta_0)=0$ とする。[仮定1] の (ロ) によれば $S_1(x)$ の値域に $t^1 \neq t^2$ が存在し，すべての $\varepsilon>0$ に対して $A_i=\{x \mid (S_1(x)-t^i)^2 \leq \varepsilon\}$ ($i=1, 2$) が正の $l$ 測度をもつ。また平均値の定理によれば，$(t_0^1-t^1)^2 \leqq \varepsilon$，$(t_0^2-t^2)^2 \leqq \varepsilon$ なる $(t_0^1, t_0^2)$ が存在して，

$$P_{\theta_n}(A_i) - P_{\theta_0}(A_i) = \exp\left[(\alpha_0(\theta_n)+t_0^i\alpha_1(\theta_n))-1\right] l(A_i)$$

である。[補題3] によりこれが $n\to\infty$ とともに0に収束するから，$\alpha_0(\theta_n)+t_0^i\alpha_1(\theta_n)\to 0$ ($i=1, 2$) であり，従って $\alpha_1(\theta_n)\to 0=\alpha_1(\theta_0)$ である。

次に Ferguson は [定理1] を $k=1$ の場合に特殊化して，下の結果を導く；

[定理2] $\mathcal{P}$ が1母数指数型分布族で，かつ位置母数族ならば，

$$p_\theta(x) = \frac{|\gamma|\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp\left\{-\alpha e^{\gamma(x-\theta)}+\alpha\gamma(x-\theta)\right\}。$$

たゞし $\alpha$, $\gamma$ は実の定数で $\alpha>0$, $\gamma\neq 0$。

証明は殆ど明かであろう。この分布は，確率変数 $X$ がガンマ分布にしたがうとき，$(1/\gamma)\log X$ の分布としてあらわれるものである。

§4．この節では尺度母数をも考えに入れる。まず

［定義3］ $\mathcal{P}$ が尺度母数族であるとは $\Theta = R^+$ で，かつすべての $\theta \in \Theta$，$A \in \mathcal{A}$ に対して $P_\theta(A) = P_0(A/\theta)$ となっていることをいう（$X$ は $R$ 全体，$R^+ \cup R^-$，$R^+$，$R^-$ の4つの場合が考えられる）。

［定義4］ $\mathcal{P}$ が位置・尺度母数族であるとは，

（イ） $\Theta = R^2$ の上半平面 $= \{(\tau, \sigma) \mid \sigma > 0,\ -\infty < \tau < \infty\}$

（ロ） $X = R$

（ハ） すべての $\theta = (\tau, \sigma)$，$A \in \mathcal{A}$ に対し

$$P_\theta(A) = P_{(0,1)}\left(\frac{A-\tau}{\sigma}\right)$$

が成立つことをいう。

尺度母数についての定理は，すべて位置母数についての定理の直訳にすぎない。すなわち，もしも確率変数 $X$ の分布が尺度母数 $\theta$ をもつなら，$\log X$ の分布は $\log\theta$ を位置母数としてもつ。だから「$\mathcal{P}$ が尺度母数族なら，それにしたがう $X$ を対数変換した確率変数の密度は定理1の形に書ける」のである。たゞそれだけのことである。しかし位置母数と組合わされると，興味ある結果が出てくる。それは：

［定理3］（これも Dynkin と Ferguson） $\mathcal{P}$ が $k$ 母数指数型分布族で，かつ位置・尺度母数族であるとする。

すると，$\log p_\theta(x)$ は $x$ の多項式である。

［略証］ $\mathcal{P}$ の部分族 $\mathcal{P}_\sigma = \{ p_\theta \mid \theta = (\tau, \sigma),\ -\infty < \tau < \infty \}$ は指数型分布族で，位置母数族である。ゆえに［定理1］により

$$\log \frac{1}{\sigma} p_{(0,1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \log p_{(0,\sigma)}(x) = \sum A_i(x) e^{\alpha_i x}$$

と書ける。たゞし $A_i$ の係数は $\sigma$ に関係する（$\alpha_i$ は $\sigma$ に無関係である。そうでないと，$\mathcal{P}$ が指数型でなくなってしまう）。

これを次のように書きかえる；

$$\log \frac{1}{\sigma} p_{(0,1)}\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \sum_{i=1}^{t} B_i(x, \sigma) e^{\beta_i x} + B_0(x, \sigma).$$

ここで $B_0, B_1, \cdots B_t$ は $\underline{x\text{ に関する}}$多項式，$\beta_1, \cdots, \beta_t$ はたがいに相異なる定数である。$\sigma = 1$ とおけば

$$\log p(x) = \sum_{i=1}^{t} B_i(x, 1) e^{\beta_i x} + B_0(x, 1),$$

（$p_{(0,1)} = p$ と略記する）。ゆえに

$$\log p\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \sum_{i=1}^{t} B_i\left(\frac{x}{\sigma}, 1\right) e^{\beta_i x/\sigma} + B_0\left(\frac{x}{\sigma}, 1\right).$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{t} B_i(x, \sigma) e^{\beta_i x} + B_0(x, \sigma)$$
$$= \sum_{i=1}^{t} B_i\left(\frac{x}{\sigma}, 1\right) e^{\beta_i x/\sigma} + B_0\left(\frac{x}{\sigma}, 1\right) - \log \sigma.$$

ゆえに下記の［補題4］より，すべての $\beta_i$ と異なる $\sigma$ に対して

$$B_i(x, \sigma) = 0,\ B_i(x/\sigma, 1) = 0,\ (i = 1, \cdots, t)$$
$$B_0(x, \sigma) = B_0(x/\sigma, 1) - \log \sigma.$$

ゆえに $\log p(x/\sigma) = B_0(x/\sigma, 1)$。［略証終］。

［補題 4］（Dynkin［3］の補題 2）$\beta_1, \cdots \beta_t$ がたがいに相異なる複素数で，$B_1(x), \cdots, B_t(x)$ が複素係数の多項式であるとする。$x$のある実数区間で

$$\sum_{i=1}^{t} B_i(x)\, e^{\beta_i x} = 0$$

ならば，$B_1(x)$，…，$B_t(x)$ は恒等的に 0 である。

証明は簡単であるから，ここに転記しない。これが，［定理 3］の証明を［略証］と名付けた所以である。

この結果を $k=2$ の場合に特殊化すると：

［定理 4］ $\mathcal{P}$ が 2母数指数型分布族で，かつ位置・尺度母数族なら，$\mathcal{P}$ は正規分布の全体である。

§5．(イ) 前節までは一貫して「constant carrier の仮定」（(1)と［仮定 2］）を前提としてきたが，Dynkin はこの仮定を除いた場合の議論をも行っている。すなわち［仮定 2］のかわりに

［仮定 2′］ ある区間 I が存在して，すべての $\theta \in \Theta$ に対して

$$p_\theta(x) \begin{cases} > 0 & x \in I+\theta \\ = 0 & x \notin I+\theta \end{cases}.$$

を採用する。そのもとで

［定理5］ $\mathcal{P}$は位置母数族で，しかもすべての$I+\theta$上で(1)が成立つとする。すると$p_\theta(x)$は$I+\theta$上で(4)の形に書ける。

この証明は［定理1］と殆ど変らない。実際，§2の末尾に述べたDynkinの方法を用いれば，容易に証明されるので尺度・位置尺度母数族についても，同様の結果が得られる。

ロ いくつかの論文は，本稿で$\theta$と記した母数以外のnuisance parameterのようなものを含んだ結果を述べている。例えばDynkin［3］は［定義2］のかわりに：

［定義2′］ $\mathcal{P}$がある母数$\theta_1$に関して位置母数族であるとは，$\theta \in \Theta$が$\theta=(\theta_1, \theta_2)$と書けて，任意の$\theta_2$を固定したときできる$\mathcal{P}$の部分族 $\mathcal{P}_{\theta_2}=\{P_{(\theta_1,\theta_2)} \mid -\infty<\theta_1<\infty\}$が位置母数族となることである。

を用いる。その結果(4)において多項式$A_i$の係数は$\theta_2$に関係することとなる（$\theta$はもちろん$\theta_1$と読みかえる）。Koopman［1］においても同様のことが行われている。

しかし，$\theta_2$を固定して，$\mathcal{P}_{\theta_2}$に対して［定理1］を証明するなら，そうして証明した「$\theta_2$に関係する［定理1］」の全体はDynkinの証明する結果と同値なのである。

(八)　位置母数族の定義に際して $X=R^n$，$\mathfrak{A}$＝ボレル集合の全体，$\Theta=R$ として，［定義2］において $A-\theta$ を $\{(x_1,\cdots,x_n) \mid (x_1+\theta,\cdots x_n+\theta)\in A\}$ であると解釋することも考えられる。しかしそのような定義を用いている人は従来ないようである。

その理由としては，「$R^n$上の分布がこのページにおける意味で位置母数族ならば，$n$コの周辺分布はすべて［定義2］の意味で位置母数族である」ということを用いて，問題を$R^1$に帰着せしめられる，ということが考えられる。

しかし筆者の考えによれば，この命題の逆は各成分が互いに独立な場合にしか成立たないので，そこにいささかの隙間があるように思われる。例えば2次元正規分布 $N(\theta,\theta;1^2,1^2;0.321)$（記号は想像に御まかせる）は$R^2$において位置母数族になっていて，しかも指数型である。しかしこの分布は［定理1］の結果には含まれないのではあるまいか。

(二)　Ferguson［4］は，次のような興味ある問題を提出している。すなわち，指数型分布族から離れ，「constant carrier の仮定」をすて，さらに domination の仮定をもすてて，一般に

"完備十分統計量をもつ位置母数族は何か？"

と問うのである。そして1つの例として $\Theta = R$，$X = R$ として，$0 < p < 1$ を固定して，

$$P_\theta(\{x\}) = (1-p)\,p^{x-\theta} \qquad x = \theta, \theta+1, \cdots$$

という分布 $P_\theta$ の全体を与えている。大きさ $n$ の標本に対して，$\min x_i$ が完備十分統計量である。

尺度母数族，位置尺度母数族に対しても同様な問題が当然考えられるわけである。

§6. 以上においては母数空間 $\Theta$ が位置もしくは尺度というような特別の変換群となっていたが，BORGES - PFANZAGL [5] はさらに一般に，次の定義から出発する：

[定義5] $\mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ が群によって生成されるとは，次の条件がみたされることをいう；

① $\Theta$ は $\mathcal{X}$ 上の変換の作る群で，$\forall x \in \mathcal{X}$，$\forall \theta_1, \forall \theta_2 \in \Theta$ に対して $(\theta_1 \theta_2)x = \theta_1(\theta_2 x)$。

② $\forall A \in \mathcal{A}$ $\forall \theta \in \Theta$ に対して $P_\theta(\theta A) = P_e(A)$
(たゞし $e$ は $\Theta$ の単位元)

一旦このようにすれば，もはや $X$ を $R$ またはその部分集合とする必要もなくなる。そこでこの節ではあらためて [定義

1]にかえり，$\mathcal{P}$が1母数指数型分布族でかつ群によって生成されるとすれば，どのような分布族であるかを問うのである。条件として[仮定1]，[仮定2]を採用し，かつ

[仮定3]　$\mathcal{P}$は3個以上の測度を含む

とする。$\mathcal{P}$の要素が1個ヵ2個ならば"群によって生成される指数型分族"などありふれたものになってしまうから，この仮定は当然であるが，"3個"という仮定からすでに下記のような結果が出てくることは興味深い。

このことからもわかるように，$\theta$が$\Theta$全体を動いたときに$\alpha_1(\theta)$がとる値の全体は，(1)式であらわされる指数型分布のnatural parameter space全体を占めるとは限らない。その部分集合で，点の個数が3以上となることだけが仮定される。これが[5]の設定の，[1]，[3]，[4]と最も異なる点である。

さて，[5]に得られている結果は，次の定理である：

[定理6]　$\mathcal{P}$が群によって生成される1母数指数型分布族であるとする。すると$\mathcal{X}$上の$\Theta$－不変な$\sigma$－有界測度$\lambda$が存在して，$\forall P_\theta \in \mathcal{P}$　$P_\theta \ll \lambda$となり，しかも$dP_\theta/d\lambda$は次のどちらかの形に書ける：

(イ)　$\exp\left[\frac{-1}{2}\left(t(x)-w(\theta)\right)^2\right]$，

(ロ)　$\left(a(\theta)\,t(x)\right)^p \exp\left(-a(\theta)\,t(x)\right)$　。

たゞし $w(\theta)$, $a(\theta)$ は後出の定数で, $p$ は正なる定数である。

この定理の証明のあらすじだけを紹介する。[定義5]から直ちに

$$\frac{p_{\tau\theta}(x)}{p_{\tau}(x)} = \frac{p_{\theta}(\tau^{-1}x)}{p_{e}(\tau^{-1}x)} \qquad \begin{array}{l}\tau, \theta \in \Theta \\ x \in X\end{array}$$

が得られるから, これと(1)によって

$$s_1(\tau^{-1}x) = a(\tau)\, s_1(x) + b(\tau) \qquad (5)$$

という基本的関係が導かれる。ここで $a(\tau)$, $b(\tau)$ は

$$a(\tau) = \frac{\alpha_1(\tau\theta) - \alpha_1(\tau)}{\alpha_1(\theta) - \alpha_1(e)} \qquad (6)$$

$$b(\tau) = \frac{(\alpha_0(\tau\theta) - \alpha_0(\tau)) - (\alpha_0(\theta) - \alpha_0(e))}{\alpha_1(\theta) - \alpha_1(e)} \qquad (6')$$

である。ここで $\theta$ としては $\alpha_1(\theta) \neq \alpha_1(e)$ なるもの(存在する!!)を取らねばならぬが, そのような $\theta$ なら何をとっても右辺の値は変らない。この $a$, $b$ に対して

$$a(\tau\theta) = a(\theta\tau)$$

$$b(\tau\theta) = a(\theta)\, b(\tau) + b(\theta)$$

が得られるが, これは工藤氏の報告(この本の p. 工藤氏の2ページ目のことです。)にあらわれている式そのものである。

なお後で用いるために, すべての $\theta$ ( $a(\theta) > 0$ ) に対して

$$b(\theta) = -k\,\alpha_1(\theta) \qquad (6'')$$

となるような $k$ が存在することを注意しておく。それは実は $\alpha_0(\tau\theta) = \alpha_0(\theta\tau)$ が示されること，及び"$\exists\theta$, $a(\theta) > 0$, $\alpha_1(\theta) \neq 0$"が示されることを用いれば (6') から

$$b_\tau = [b_\theta / \alpha_1(\theta)]\ \alpha_1(\tau)$$

が導けることによるのである。上の2つの事実の証明は省略するが，後者は［仮定3］を用いて行われる。

以上は"群によって生成される"ことの結果であるが，次に"指数型"ということについて考える。(1)式で $k=1$ の場合（それが現在扱っているもの）を，下のように少し異なる形に書く：

$$\frac{dP_\xi}{d\mu}(x) = \int \exp[\eta + s_0(x) + \xi s_1(x)] \qquad (7)$$

このとき $P_\xi$ は $\Xi = \{\xi \mid \int \exp[s_0(x) + \xi s_1(x)]\,d\mu(x) < \infty\}$ に属する $\xi$ に対して確率測度として定義される。この $\Xi$ が natural parameter space である。この $\Xi$ の上に

$$\exp[-c(\xi)] = \int \exp[s_0(x) + \xi s_1(x)]\,d\mu(x)$$

によって関数 $c(\xi)$ を定義する。そして $c(\xi)$ に関する関数方程式を作ろうとするのである。

よく知られているように，$c$ は $\Xi$ の内部で何回でも微分可

能で，$c''(\xi) < 0$ である。そして(7)における $\xi$ と $\eta$ との間には

$$\eta = c(\xi) \tag{8}$$

という関係がある。

ここで簡単のため，次のことが成立っていると仮定する：

[仮定4] ⓘ $E_e(S_1(x)) = 0 \quad V_e(S_1(x)) = 1$

ⓡ $\alpha_0(e) = \alpha_1(e) = 0$

ⓗ $c(0) = c'(0) = 0 \quad ; \quad c''(0) = -1$

ⓝ $dP_\theta(x) = \exp[\alpha_1(\theta)S_1(x) + \alpha_0(\theta)]\, dP_0(x)$.

このうち実質上の仮定はⓘ，ⓡだけであって，前者は $S_1(x)$ に適当な1次変換を行えば達成できるし，また後者は単位元 $e$ のえらび方を指定しているだけである。そしてⓗ，ⓝはそれぞれⓘ，ⓡの結果である。

このような準備のもとに，$c(*)$ についての基本的な関係式：すべての $\xi \in \Xi$，$\tau \in \Theta$ に対して

$$c(a(\tau)\xi + \alpha_1(\tau)) = b(\tau)\xi + c(\xi) + c(\alpha_1(\tau)) \tag{9}$$

に到達する。実際，(8)によって

$$1 = \int_{\tau^{-1}X} \exp[c(\xi) + \xi S_1(x)]\, dP_e(x)$$

$$= \int_X \exp[c(\xi) + \xi S_1(\tau^{-1}x)]\, dP_\tau(x)$$

であり，(5) によって

$$= \int_X \exp\left[(a(\tau)\xi + \alpha_1(\tau))\, s_1(x) + \right.$$
$$\left. + b(\tau)\xi + c(\xi) + c(\alpha_1(\tau))\right] dP_e(x)$$

であるから，再び (8) を用いて (9) が示されるのである。この過程で

$$\xi \in \Xi,\ \tau \in \Theta \ \Rightarrow\ (a(\tau)\xi + \alpha_1(\tau)) \in \Xi \qquad (10)$$

がわかることを注意しておく。

以下，2つの場合に分ける；

[ I ] $\quad {}^{\forall}\theta \in \Theta \quad |a(\theta)| = 1$

[ II ] $\quad {}^{\exists}\theta \in \Theta \quad |a(\theta)| \neq 1$ .

[ I ] の場合。(10) により $\Xi = R$ である。また

$$\alpha_1(\tau\theta) = \alpha_1(\tau) \pm \alpha_1(\theta)$$

である。$\Theta$ の中で $\{\theta \mid a(\theta) = 1\}$ は部分群をなすので，当面その中に考察を限り，(6") と (9) から

$$c(\alpha_1(\tau) + \alpha_1(\theta)) = c(\alpha_1(\tau)) + c(\alpha_1(\theta)) - k\alpha_1(\theta)\alpha_1(\tau)$$

を導くのである。$\{\alpha_1(\theta) \mid \theta \in \Theta\}$ は $\Xi$ 全体ではないが $R$ の部分加群ではあるので，その上でこの方程式を解くと

$$c(\alpha_1(\theta)) = \frac{-k}{2}\alpha_1(\theta)^2 + l\,\alpha_1(\theta)$$

という解を得る（ここで BORGES - PFANZAGL は [6] を引用している）。これを $a(\theta) = -1$ の場合にまで拡張する

ことは，やはり［仮定３］を用いて簡単にできる。

最後に

$$t(x) = k^{-\frac{1}{2}}(s_1(x) + l)$$
$$w(\theta) = k^{\frac{1}{2}}\ \alpha_1(\theta)$$
$$d\lambda(x) = \exp\left[\frac{1}{2}t^2(x)\right]\ dP_\theta(x)$$

とおくことにより［定理６］イを得る。$\lambda$ の不変性の証明も困難ではない。

［II］の場合。［I］と同様な考え方であるが，余計な補題が必要なので詳しくは述べない。ともかく $\Xi \neq R^1$ が示されるので，一般性を失うことなく $\sup \Xi = \xi_0 < \infty$ とすると，この $\xi_0$ が

$$\alpha_1(\theta) = \xi_0(1 - a(\theta)) \qquad (11)$$

をみたすことが証明される。(6″) と (11) とを (9) に代入し，また

$$d(\xi) = c(\xi_0(1-\xi)) - k\,\xi_0^2(1-\xi)$$

とおけば，$d(*)$ に関する方程式：

$$d(a(\theta)\,a(\tau)) = d(a(\theta)) + d(a(\tau))$$

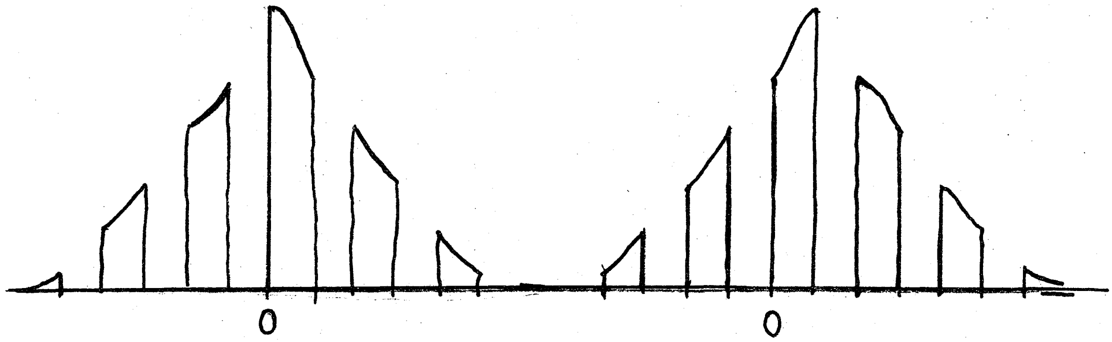
が導かれ，ロが得られるのである。

最後に，[5]に含まれて[1]，[3]，[4]には含まれない分布の例が[5]に与えてあるので，それをここに転記する。

母数空間$\Theta = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$とし，$X = R$，$\mathfrak{A}$＝ボレル集合体，$\mu$＝ルベーグ測度として，

$$p_\theta(x) = \begin{cases} C \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\right\} & 2n \leq x \leq 2n+1 \\ & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ 0 & \text{その他の } x \end{cases}$$

とする。すると，下のようなグラフが得られる（わかりやすくするため，わざと下手な図を画いてある）。これは明かに位置~~母~~数族ではない。しかしこれは式の形から指数型分布族



$\theta = 0$
（$\theta$＝偶数の場合は，これを左右にずらしたもの。）

$\theta = 1$
（$\theta$＝奇数の場合は，これを左右にずらしたもの）

である。また$\theta \in \Theta$は，次のような変換をあらわすと考えられる：

$\theta$＝偶数のとき　右への$\theta$ cmの移動。

$\theta$＝奇数のとき　原点に関する反射ののち，右への$\theta$ cmの移動。

そして $a(\theta) = 1$ （$\theta$ = 偶数） $a(\theta) = -1$ （$\theta$ = 奇数）となっているのである。

## 参考文献

[1] Koopman, B. O.
On distributions admitting a sufficient statistic: Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 39 (1936) 399-409.

[2] Stäckel, P.
Sulla equazione funzionale $f(x+y) = \sum X_i(x) Y_i(y)$ Atti Reale Accad. Lincei, Rend. Vol. $22_2$, 392-3

[3] Dynkin, E. B.
Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions. (1951) Selected Trans. Math. Stat. & Prob. Vol 1, 17-40.

[4] Ferguson, T. S.,
Location and scale parameters in exponential families of distributions. Ann. Math. Stat., Vol. 33 (1962) 986-1001; Vol. 34, 1603.

[5] Borges, R. & J. PFANZAGL
One-parameter exponential families generated by transformation groups., Ann. Math. Stat., Vol. 36

(1965) 261 - 271.

[6] ACZÉL, J.
Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen (1961)

[以上]