

# Milnor fiber, monodromy と characteristic polynomial について

東大理 松本幸夫

東大理 坂本幸一

$f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  を解析的写像の germ とすると、よく知られているように Milnor fibering  $\varphi(z) := \arg f(z) : S_\varepsilon^{2n+1} - f^{-1}(0) \rightarrow S^1$  が定義され、 $f$  の解析的な不変量となる。この小文では、Milnor fibering に関する、Topology の立場からの 2, 3 の結果を紹介する。

## 1. Join theorem と Product fibering theorem.

次に述べる 2 つの定理は応用上、しばしば極めて有効である [10], [7], [9].

定理 (Join theorem)  $f : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  (or  $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ) の Milnor fiber を  $F_f$  (or  $F_g$ ), 幾何学的な monodromy 写像を  $\alpha_f$  (or  $\alpha_g$ ) とし,  $h(x, y) = f(x) + g(y) : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  で定義された  $h$  の Milnor fiber, monodromy 写像をそれぞれ  $F_h, \alpha_h$  とすると, ホモトピー同値  $H : F_h \rightarrow F_f * F_g$  が存在して, 次の図式をホモトピーの意味で可換にする :

$$\begin{array}{ccc} F_h & \xrightarrow{H} & F_f * F_g \\ \alpha_f \downarrow & & \downarrow \alpha_f * \alpha_g \\ F_h & \xrightarrow{H} & F_f * F_g \end{array}$$

ここに  $F_f * F_g$  は  $F_f$  と  $F_g$  の join (結) をあらわす.

系 1.  $F_h$  の reduced homology は

$$\tilde{H}_p(F_h) \cong \sum_{i+j=p-1} \tilde{H}_i(F_f) \otimes \tilde{H}_j(F_g) + \sum_{i+j=p-2} \text{Tor}(\tilde{H}_i(F_f), \tilde{H}_j(F_g))$$

で与えられる. (ホモロジ-は整係数) とくに体係数ホモロジ-に関しては右辺は tensor 積の部分のみでよい.

系 2.  $f, g$  とともに孤立特異点の場合,  $h$  の monodromy の固有値は,  $f$  と  $g$  の monodromy の固有値の積で与えられる.

Example 1.  $f = z_1^p + z_2^q z_3^r$ .  $z_1^p$  の fiber は  $p$  個の点,  $z_2^q z_3^r$  の fiber は  $d = (q, r)$  個の  $S^1$  の disjoint union であるから  $F_f \cong \{p\text{-points}\} * \underbrace{\{S^1 \cup \dots \cup S^1\}}_{d}$ . ホモロジ-群

は  $H_0(F_f) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1(F_f) \cong (p-1)(d-1)\mathbb{Z}$ ,  $H_2(F_f) \cong (p-1)d\mathbb{Z}$ .

Monodromy  $(\alpha_f)_i : H_i(F_f) \rightarrow H_i(F_f)$  は  $(\alpha_f)_0 = \text{id}$ ,  $(\alpha_f)_1$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{p-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{d-1}, \quad (\alpha_f)_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & \\ & & 1, -1 \end{pmatrix}}_{p-1} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 1, 0 \end{pmatrix}}_d$$

で与えられる.

変数分離形の積で与えられる写像に関しては次の定理がある：  
3：

定理 (Product fibering theorem)  $f, g$  を前定理のような解析写像とし,  $h : (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  を  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  で定義される写像とする.  $F_h$  は, " $S^1$ 上の fiber bundle で, fiber を  $F_f \times F_g$ , 特性写像を  $\alpha_f \times \alpha_g^{-1}$  とするもの" の total space  $Z$  にホモトピー-同値である：

$$F_h \simeq Z \begin{array}{c} \downarrow F_f \times F_g \hookrightarrow \alpha_f \times \alpha_g^{-1} \\ S^1 \end{array}$$

また  $h$  の monodromy 写像  $\odot F_h$  は  $\alpha_f \times 1$  又は  $1 \times \alpha_g$  で与えられる.

Example 2.  $f = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_{n+1}^{a_{n+1}}$ .  $d$  を最大公約数  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  とすれば,  $F_f \simeq d$  個の  $n$ -次元 tori  $T^n$  の disjoint union.

## 2. 解析写像の "deformation".

実変数  $t$  でパラメトライズされた解析写像の family  $f_t : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  が与えられたとき,  $f_{t_0}$  と  $f_{t_1}$  は同型な Milnor fibering を持つかという問題を考える. これに関してはいくつかの十分条件が知られている. 例えは次の観察は簡単ではあるが有用である. [8]

定理  $t \in [0, 1]$  に解析的に依存する族  $\{f_t\}$  が次の 2 条件をみたせば,  $f_0, f_1$  は smooth に同型な Milnor fibering を持つ. (1)  $\exists \varepsilon > 0$ , s.t.  $\forall (z, t) \in D_\varepsilon \times [0, 1] - \{0\} \times [0, 1]$ ,  $\text{grad } f_t(z) \neq 0$  (2)  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $f_t^{-1}(0)$  は  $S_\varepsilon$  に transversal に交わる.

Example 3. 孤立特異点をもつ weighted homogeneous  $f, g$  が共通の weight  $(w_1, \dots, w_{n+1})$  をもつば, 両者の Milnor fibering は smooth に同型である. とくに整数の weight  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  をもつ多項式は Brieskorn type  $z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$  の多項式に deform 出来る.

Example 4.  $f_t = x^5 + y^5 + x^2y^2 + t x^3y^3$ ,  $t \in [0, 1]$  とおくと  $f_0, f_1$  は (原点  $z=0$ ) 同型な Milnor fibering を持つ. とくに  $f_0 = x^5 + y^5 + x^2y^2$  の monodromy は  $f_1 = (x^2+y^3)(x^3+y^2)$  のそれに等しく, A'Campo により periodic である.

特異点が必ずしも孤立してはいない場合については [5] を参照されたい.

### 3. Seifert matrix について.

Seifert matrix は元来結び目の理論に由来するものであるが ([4], [6]), 最近それらが孤立特異点のまわりの topological な状況を完全に記述することが見出された [2]. そのことを正確

に述べるには spinnable structure [11] の概念が便利であるか。  
 ここでは省略する。( [11] 参照 )

まず、孤立特異点の Milnor fibering  $\varphi: S^{2n+1} - K \rightarrow S^1$  ( $K = S^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ ) の場合に即して Seifert matrix を定義しよう。 $\varphi$  の fiber  $F_\theta$  は  $S^n$  の有限個 (Milnor 数  $\mu$ ) の bouquet であるから  $H_n(F_\theta) \cong \mu\mathbb{Z}$ 。その basis を適当に選んで  $e_1, \dots, e_\mu$  とする。(ここで  $F_\theta$  は  $\varphi(F_\theta) = e^{i\theta} \in S^1$  なる fiber を表わしていい。) fibering  $\varphi$  の local triviality から、 $S^1$  の正の向き of vector field を  $F_\theta$  の近傍の、 $S^{2n+1} - K$  内の vector field として、局所的にひきあげる事ができ、この vector 場に沿って“流す”ことにより  $e_1, \dots, e_\mu$  に対応する  $F_{\theta+\varepsilon}$  の basis  $e'_1, \dots, e'_\mu$  が得られる。Seifert matrix  $\Gamma = (\gamma_{ij})$  は

$$\gamma_{ij} = L(e_i, e'_j)$$

で定義される。ここに  $L$  は  $S^{2n+1}$  における linking number である。勿論  $\Gamma$  は congruence class を除いて well-defined である。

定理 (1)  $\Gamma$  は unimodular である。(2) 孤立特異点の Milnor fiberings  $\varphi_i: S^{2n+1} - K_i \rightarrow S^1$  ( $i=1, 2$ ) が spinnable structure として同型、(すなわち diffeomorphism  $h: (S^{2n+1}, K_1) \rightarrow (S^{2n+1}, K_2)$ ) が存在して diagram

$$\begin{array}{ccc} S - K_1 & \xrightarrow{h} & S - K_2 \\ \varphi_1 \searrow & & \swarrow \varphi_2 \\ & S^1 & \end{array}$$

可換となる) 爲の必要十分条件は, 対応する Seifert matrices の congruence class が一致することである. 但し  $n \geq 3$ .

注意 [2]. 実は任意の unimodular 行列  $\Gamma \in \mathbb{Z}$  に対して, それを Seifert matrix に持つような (高次元) 球面上の spinnable str. の存在が知られている.

Seifert matrix は fiber  $F$  の intersection matrix  $I$ ,  $\varphi$  の monodromy  $\alpha_*$  を次のように決める [2].

定理 (1)  $-I = \Gamma + (-1)^n \Gamma^t$  ( $\Gamma^t$ : transposed  $\Gamma$ )

(2)  $\alpha_* = (-1)^{n+1} \Gamma^t \Gamma^{-1}$

Example 5 [9]. Brieskorn polynomial  $f = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$  ( $a_i \geq 2$ ) の Milnor fibering に対応する Seifert matrix  $\Gamma$  は

$$\Gamma = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} A_{a_1} \otimes \dots \otimes A_{a_n}$$

となる. ここで

$$A_a = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}}_{a-1} \quad \text{である.}$$

Seifert matrix が具体的多項式について計算された例は, いくつかあるが, 他には, [3] に於て, Newton polynomial  $f_d$  (i.e.  $f_d(\sigma_1, \dots, \sigma_d) = z_1^d + \dots + z_n^d$ ,  $\sigma_i$ :  $i$  次初等対称式) に対する Seifert 行列が計算されている.

4.  $\zeta$ -函数と characteristic polynomials.

$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  の Milnor fibering の, monodromy 写像を  $\alpha_f: F_f \rightarrow F_f$  とする.  $\alpha_f$  を  $k$  回 iterate したものの Lefschetz number を  $\chi_k$  と書く:  $\chi_k := \Lambda(\alpha_f^k)$

定理 (A'Campo-Deligne)  $\chi_k = 0$  for  $0 < k < \text{multiplicity of } f^{-1}(0) \text{ at } 0.$

系  $\widehat{H}_*(F_f; \mathbb{C}) = 0$  なら  $f$  は原点で non-singular. (なぜなら,  $\mathbb{C}$ -acyclic な空間上に  $\Lambda(\alpha) = 0$  なる連続写像  $\alpha$  は存在しない.)

さて超曲面  $f^{-1}(0)$  の原点における  $\zeta$ -函数を次のように定義する:

$$\zeta(t) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k t^k / k.$$

$\zeta$ -函数の具体的な計算に関して A'Campo は次のような美しい結果を得た.  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  を proper modification とし,  $S = \pi^{-1}(0)$  の任意の点で  $\pi^{-1}(f^{-1}(0))$  が normal crossing になっているものとする. 整数  $m \geq 1$  について

$$S_m = \{s \in S \mid s \text{ の近傍で } \pi^{-1}(f^{-1}(0)) \text{ が } z^m = 0 \text{ と書ける}\}.$$

とおく.  $\chi(S_m)$  を  $S_m$  の Euler 数とする.

定理[1]

$$(1) \quad \chi_k = \sum_{m|k} m \chi(S_m),$$

$$(2) \quad \text{Milnor fiber の Euler 数 } \chi(F_f) = \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m).$$

$$(3) \quad \zeta(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{-\chi(S_m)}$$

(4) とくに 0 が  $f^{-1}(0)$  の孤立特異点のとき.

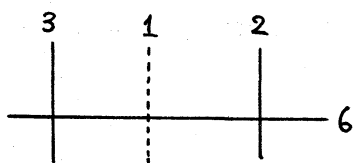
characteristic polynomial  $\Delta(t)$

$$= [(t-1)^{-1} \prod_{m \geq 1} (t^m - 1)^{\chi(S_m)}] (-1)^n$$

$$\text{Milnor 数 } \mu = (-1)^n [-1 + \sum_{m \geq 1} m \chi(S_m)]$$

注意: A'Campo の preprint [1] には公式 (3) の指数が  $\chi(S_m)$  と  
なっているがミスであろう.

Example 6.  $f = x^2 + y^3$



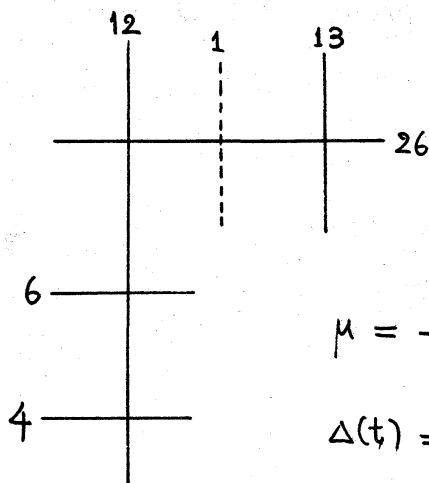
$$S_2 = P^1 - 1 \text{ point}, \quad S_3 = P^1 - 1 \text{ point}$$

$$S_6 = P^1 - 3 \text{ points.}$$

$$\text{characteristic polynomial } \Delta(t) = \frac{(t-1)(t^6-1)}{(t^2-1)(t^3-1)} = (t - e^{\frac{2\pi i}{6}})(t - e^{\frac{4\pi i}{6}})$$

$$\text{Milnor 数 } \mu = -[-1 + 2 + 3 - 6] = 2.$$

Example 7.  $f = (x^3 - y^2)^2 - x^2 y^3$



$$\chi(S_4) = 1, \quad \chi(S_6) = 1, \quad \chi(S_{12}) = -1$$

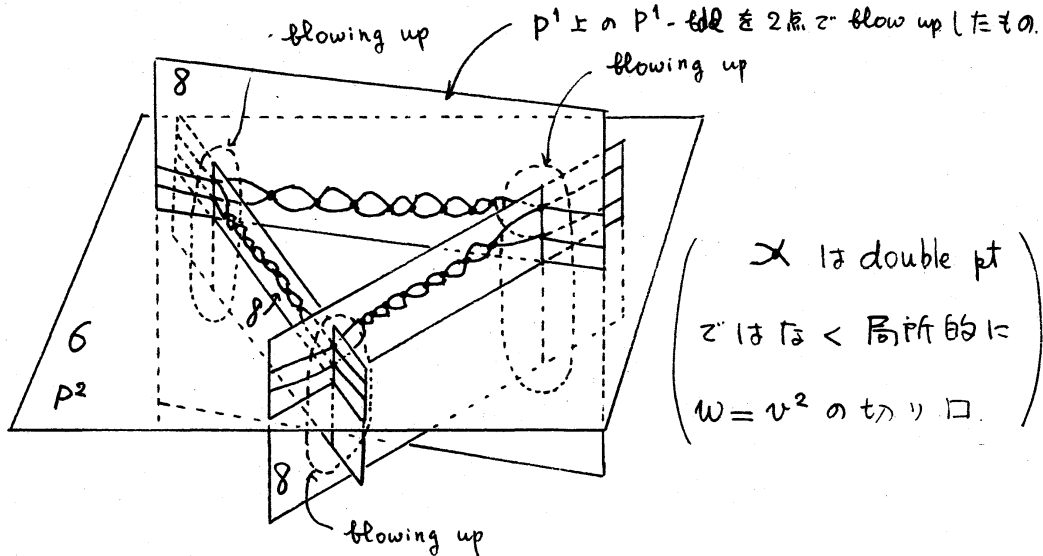
$$\chi(S_{13}) = 1, \quad \chi(S_{26}) = -1.$$

$$\mu = -[-1 + 4 + 6 - 12 + 13 - 26] = 16$$

$$\Delta(t) = \frac{(t-1)(t^{12}-1)(t^{26}-1)}{(t^4-1)(t^6-1)(t^{13}-1)}$$



Example 8  $f = (xyz)^2 + x^8 + y^8 + z^8$



$$\chi(S_6) = 0$$

$$\chi(S_8) = 27.$$

$$\Delta(t) = (t-1)^{-1} (t^8-1)^{27}$$

$$\mu = 215.$$

Example 8の計算に際して中村, 堀川両氏から色々教えていただいたのでここに両氏に感謝します。

### References

- [1] N. A'Campo, La fonction zêta d'une monodromie (appear<sup>to</sup>)
- [2] M. Kato, A classification of simple spinnable structures on  $S^{2n+1}$ , 数理解析研究所講究録 170. (1973)
- [3] T. Kawasaki, Symmetric quotients of Fermat-type

hypersurfaces. to appear.

- [4] J. Levine, Knot cobordism in codimension two, *Comment. Math. Helv.* 44, 229-244 (1969)
- [5] Y. Matsumoto, On a class of deformations of holomorphic functions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 20, 239-251 (1973)
- [6] ———, Knot cobordism groups and surgery in codimension two. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 20, 253-317 (1973)
- [7] M. Oka, On the homotopy types of hypersurfaces defined by weighted homogeneous polynomials. *Topology*, 12, 19-32 (1973)
- [8] ———, Local deformation of polynomials with isolated singularities. (to appear in *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*)
- [9] K. Sakamoto, Milnor fiberings and their characteristic maps. (to appear in *Proceedings of Conference on Manifolds.*)
- [10] M. Sebastiani-R. Thom, Un résultat sur la monodromie, *Invent. Math.* 13 (1971) 90-96
- [11] I. Tamura, Spinnable structures on differentiable manifolds, *Proc. Japan. Acad.* 48 (1972) 293-296.

### Appendix 1. Milnor fiber の connectivity について.

$f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  を解析的写像の germ とし,  $\Sigma$  を  $f$  の critical set とする。  $\Sigma$  の原点における次元  $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma$  と Milnor fiber の connectivity に関し次の定理が成り立つ。

(M. Kato - Y. Matsumoto, "On the connectivity of the Milnor fiber of a holomorphic function at a critical point." to appear in Proceedings of Conference on Manifolds.)

定理  $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = s$  とすると,  $f$  の原点における Milnor fiber  $F$  は少くとも  $(n-s-1)$  連結である。すなわち  $\pi_i(F) = 0 \quad i \leq n-s-1$ 。  $\hookrightarrow$   $H_i(F) = 0 \quad i \leq n-s-1$ 。

例 1.  $f = (z_1 z_2)^2 + \dots + (z_{2k-1} z_{2k})^2 + z_{2k+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2$  とすると  $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = k$  で,  $\pi_i(F) = 0 \quad (i \leq n-s-1)$  から  $\pi_{n-k}(F) \neq 0$ 。 実際, Join theorem により,  $F$  は  $\underbrace{(S^1 \vee S^1) + \dots + (S^1 \vee S^1)}_{k \text{ 個}} + S^{n-2k}$  とホモトピー同値である。

例 2.  $f = z_1 z_2^{p_1} + \dots + z_{2k-1} z_{2k}^{p_k} + z_{2k+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2$  (但し,  $p_1, \dots, p_k \geq 2$ ) とおくと  $\dim_{\mathbb{C},0} \Sigma = k$  で  $F$  は  $S^n$  とホモトピー同値, したがって  $\pi_i(F) = 0 \quad i \leq n-1$ 。

### Appendix 2. Milnor fibering and local triviality

$f: U \subset (\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}$ , ( $f(0) = 0$ ) を正則関数で定義される超曲面  $V = f^{-1}(0)$  上には bonne stratification が存在する (F. Pham)。すなわち, Whitney condition a) b) をみたし,

$V$  の任意の点  $x$  と,  $x$  に収束する  $U-V$  の系列  $\{x_n\}$  に対し  
て,  $T_{x_n} f^{-1}(f(x_n))$  がある超平面  $T$  に収束するとき,  $T \supset T_x X$   
である。ここは  $X$  は  $x$  を含む strata とする。

各 strata  $X$  に対し,  $X$  の tubular nbd.  $T_x$ , projection map  $\pi_x : T_x \rightarrow X$ ,  $X$  との間  
の距離を表わす函数  $\rho_x : T_x \rightarrow \mathbb{R}^+$  が存在して, 次の性質をみたす。2つの strata  $X, Y$  に対し,  $T_x \cap Y \neq \emptyset$   
 $\Leftrightarrow Y \supset X$ . このような strata の pair  $(Y, X)$  に対し

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= \pi_x \circ \pi_y, \quad \rho_x = \rho_x \circ \pi_y \\ \pi_x \times \rho_x |_{T_x \cap Y} : T_x \cap Y &\rightarrow X \times \mathbb{R} \text{ is submersion.} \end{aligned} \right) (*)$$

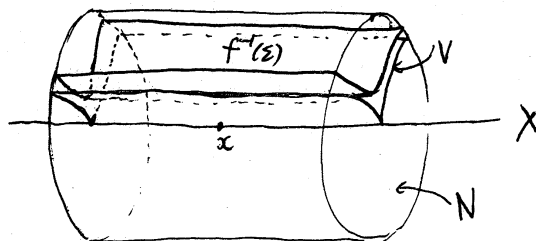
これは bonne stratification という仮定から,  $T_x \varepsilon$  十分小さくとると

$$\pi_x \times f |_{T_x - f^{-1}(0)} : T_x - f^{-1}(0) \rightarrow X \times \mathbb{C} \text{ is submersion (**)}$$

定理  $X$  を  $V$  の strata,  $x$  を  $X$  の任意の点とする。  $x$  の近傍  $N \subset T_x$  および  
連続写像  $\phi : N \rightarrow H_x$  が存在して次が成り立つ。ここは  $H_x = \pi_x^{-1}(x) \cap N$ 。

$$i) \pi_x(N) = N \cap X, \quad ii) f \circ \phi = f$$

iii)  $\varphi = \pi_x \times \phi : N \rightarrow (N \cap X) \times H_x$  は位相同型。とくと  
十分小さい  $\varepsilon \neq 0$  に対し  $N \cap f^{-1}(\varepsilon) \cong (N \cap X) \times (H_x \cap f^{-1}(\varepsilon))$ .



系  $x \in U$  における  $f$  の Milnor fiber を  $F_x$  とし,  $\mathcal{H}_x^i = H^i(F_x; \mathbb{Z})$  とおくと,  $\mathcal{H}^i = \bigcup_{x \in U} \mathcal{H}_x^i$  は  $U$  上の sheaf となる。  $\mathcal{H}^i$  を (bonne stratification の) 1つの strata 上に制限すると locally trivial になる。

定理の証明の概略は次のようになる。 (\*) より,  $X$  上の任意の vector field  $V = V_x$  に対し,  $X \subset \bar{Y}$  なる各 strata に対し,  $T_x \cap Y$  上の vector field  $V_Y$  が存在して,  $X \subset \bar{Y} \subset \bar{Z}$  のとき,  $(\pi_Y)_* V_Z = V_Y$ ,  $(\rho_Y)_* V_Z = 0$  となる。 同様に (\*\*) から,  $T_x - V$  上の vector field  $U$  が存在して,  $f_* U = 0$  かつ  $X \subset \bar{Y} \subset \bar{Z}$  なる  $Y, Z$  に対し,  $T_x \cap T_Y - V$  上で  $(\pi_Y)_* U = V_Y$ ,  $T_x \cap T_Y \cap T_Z - V$  上で  $(\rho_Y)_* U = (\rho_Y \circ \pi_Z)_* U = (\rho_Y)_* V_Z = 0$  となる。

$x \in X^R$  に対し,  $x$  の  $X$  での disc nbd.  $B (\cong \mathbb{R}^{2k})$  とし,  $B$  上の一次独立な  $2k$  個の vector field に対し, 上の  $f_* U, V_Y$  を構成し, それらの積分曲線を考察すれば, 定理の成立することがわかる。