数理解析研究所講究録
第 226 巻 1975 年 21-28

常微分方程式における岡村の定理の確率微分方程式への応用

名工大　　清水昭信
名大　　岡部靖憲

§1 確率微分方程式

$\sigma^i_j(t,x)$, $b^i(t,x)$ $\left(\substack{t\in[0,\infty),\, x\in\mathbb{R}^n \\ 1\le i,j\le n}\right)$ を有界な Borel 可測函数とする。確率微分方程式とは次の方程式のことである；

$$(1)\qquad dX^i_t(\omega)=\sum_{j=1}^{n}\sigma^i_j(t,X_t(\omega))\,dB^j_t(\omega)+b^i(t,X_t(\omega))\,dt \qquad (1\le i\le n)$$

ここで $(B^1_t(\omega),\cdots,B^n_t(\omega))$ は n 次元ブラウン運動であり、$X_t(\omega)=(X^1_t(\omega),\cdots,X^n_t(\omega))$ が (1) の解である。

我々が考える問題は一意性でそれは次の様に述べられる：

問題 $X_t(\omega)$, $Y_t(\omega)$ を (1) の解で、$X_0(\omega)=Y_0(\omega)$ ならば、$X_t(\omega)=Y_t(\omega)$ が成り立つ条件を求めよ.

§2 常微分方程式における丸村の定理

(1)において，$\sigma^i_j = 0$ のとき、即ち、次の常微分方程式

$$(2) \qquad dx^i_t = b^i(t, x_t)dt \qquad (1 \leq i \leq n)$$

に対して、解の一意性のための条件は、丸村博士によって、$[0,\infty)\times \mathbb{R}^n$ の中の任意の開集合 D に対して、$W = \{(t,x,y);\ (t,x)\in D, (t,y)\in D\}$ において定義された C^1 クラスの函数 $V(t,x,y)$ で次の条件を満たすことであることはよく知られている：

$$(3) \qquad V(t,x,y) \geq 0, \quad V(t,x,x) = 0, \quad V(t,x,y) > 0 \quad x \neq y$$

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} b^i(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} b^i(t,y) \leq 0 \qquad (t,x,y) \in W.$$

この様な V の存在が十分であることは、初期値が等しい解 x_t, y_t に対して、$V(t, x_t, y_t)$ を微分すれば(4)より $V(t, x_t, y_t) \downarrow_t$ が従い、(3)より $x_t = y_t$ が成り立つ、の如く仕掛けは簡単である。我々は、(1)に対して、(3)をみたす函数 V で(4)に代わる条件を探すことを目的とするのであるが、(2)と異なって、(1)の解は一般には t に関して微分不可能（☺ブラウン運動が t について微分不可能）のため、$V(t, x_t(\omega), y_t(\omega))$ を微分することはできない。しかし いわば合成函数の微分の公式にあたる、

伊藤の公式という強力なものがある。以下において分る様に、(2)の解が一意でなくても、(1)の解が一意であることがあることを注意しておく。

§3. 伊藤の公式

(1)よりもやや一般な次の確率微分方程式(5)

$$(5)\qquad dX_t^i = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^i(t, X_t)\, dB_t^j(\omega) + b^i(t, X_t)\, dt \qquad (1 \le i \le n)$$

を考える。rはnより大きくてもよいが、$(B_t^1, \cdots, B_t^r)$はr次元ブラウン運動である。このとき、伊藤の公式とは、任意の$C^{1,2}_{t,x}$クラスの函数$f(t,x)$に対して、

$$df(t, X_t) \left(= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)\, dX_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)\, dX_i(t)\, dX_j(t) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} b^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a^{ij} \right) dt + \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_j^i\, dB_t^j$$

そこで $a^{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^i(t,x)\, \sigma_k^j(t,x)$.

上の計算において、symbolicな計算"$dB^i dt = 0$, $dB^i \cdot dB^j = \delta_{ij}\, dt$, $dt \cdot dt = 0$"を使った。この正当性を与えることは確率論において重要な、大切なことの様に思える。

§4 結果

定理 任意の $T>0$, $r>0$ に対して、次の条件をみたす函数列 $V_{T,r}^m(t,x,y)$ $(m\in\mathbb{N})$ が存在すれば、(1) の解は唯ひとつである;

(6) $V_{T,r}^m$ は $[0,T]\times\{x; |x|\leq r\}\times\{y; |y|\leq r\}$ において定義されて、t について C^1, x, y について C^2 クラスの函数で、

$$V_{T,r}^m \geq 0, \qquad V_{T,r}^m(t,x,x)=0$$

(7) $\lim\limits_{m\to\infty} V_{T,r}^m(t,x,y) = V_{T,r}(t,x,y)$ が存在して、

$$V_{T,r}(t,x,y)\neq 0 \qquad x\neq y$$

(8) $$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, LV_{T,r}^m(t,x,y)\leq 0, \quad LV_{T,r}^m \text{ 一様有界}$$

そこで、L は次の微分作用素である

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^n b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n b^i(t,y)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t,y)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}$$

$$+2\Big(\sum_{k=1}^n \sigma_k^i(t,x)\sigma_k^j(t,y)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}\Big\}$$

この定理の証明は、(1) の解を x_t, y_t とするとき、$2n$ 次元の (x_t, y_t) が満たす確率微分方程式に対して、伊藤の公式を $V_{T,r}^m$ に対して使うと、

$$E(V^m_{T,r}(t\wedge\tau_r, X_{t\wedge\tau_r}, Y_{t\wedge\tau_r}))$$
$$= E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r} LV^m_{T,r}(s, X_s, Y_s)\,ds\right]$$

ここで、 $\tau_r = \inf\{t>0;\ |X_t|=r, |Y_t|=r\}$

あとは、Fatou's lemma を用いればよい．

§5　例

§4の定理によって cover できる (1)の例を与える．

例1　$\sigma^i_j(t,x)$, $b^i(t,x)$: x について局所的にリプシッツ
(tについて一様)

例2　$\sigma^i_j(t,x)$: x について局所的にリプシッツ (tについて一様)

$b^i(t,x)$: $(x-y, b(t,x)-b(t,y)) \leq 0$

例3　$n=1$　$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq \rho_{T,r}(|x-y|)$

$0\leq \rho_{T,r}(\cdot)\ \uparrow$,　$\displaystyle\int_{0+}\frac{1}{\rho_{T,r}(t)^2}dt=\infty$

$$\frac{b(t,x)-b(t,y)}{x-y} \leq C_{T,r}$$

例4　$n=1$　$\sigma(x)\neq 0$ $(\forall x)$

$|\sigma(x)-\sigma(y)| \leq \rho_r(|x-y|)$

$0\leq \rho_r\uparrow$,　$\displaystyle\int_{0+}\frac{1}{\rho_r^2(t)+t^2}\,dt=\infty$

$b(x)$　任意

例5　　$\sigma^i_j(t,x)$: x について局所的に Lipschitz、
（t については一様）

$(\sigma^i_j(t,x))_{i,j}$ は一様に楕円型

$b^i(t,x)$:　Dini－連続.

上の例において、定理を適用する際の $V^m_{T,r}$, $V_{T,r}$ は次の通りである：

例1, 2　　$V^m_{T,r}(t,x,y) = V_{T,r}(t,x,y) = e^{-Kt}|x-y|^2$

例3　　$V^m_{T,r}(t,x,y) = e^{-Kt} g_m(x-y)$,

$$g_m(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \varphi_m(\eta)d\eta$$

$$\left(\begin{array}{l} \varphi_m \geq 0,\ \text{symmetric},\ \text{continuous},\ \varphi_m(0)=0, \\ \operatorname{supp}\varphi_m \subset \{x; |x| < \frac{1}{m}\},\quad \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi_m dx = 1, \\ |\varphi_m(x)|\,\rho_{T,r}(|x|)^2 \leq C_{T,r}. \end{array}\right)$$

$$V_{T,r}(t,x,y) = e^{-Kt}|x-y|$$

例4　　$V^m_{T,r}(x,y) = g_m\left(\int_y^x e^{f_m(z)}dz\right)$,

g_m は 例3で $\rho_{T,r}(t) \equiv t$ に対してとったもの

$$f_m(x) = -2\int_0^x \frac{b_m(y)}{\sigma^2(y)}dy,\quad b_m(y) = m\int_y^{y+\frac{1}{m}} b(z)dz.$$

$$V(x,y) = \left| \int_y^x e^{f(z)} dz \right|$$

$$f(z) = -2 \int_0^z \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} dX$$

例15　次の性質をみたす "調和座標系" を構成する.

$$(9)\quad \begin{cases} c_1 \cdot |x-y| \leq |u_{T,r}(t,x) - u_{T,r}(t,y)| \leq c_2 |x-y| \\ u_{T,r} = (u^1_{T,r}, \cdots, u^n_{T,r}) \quad u^l_{T,r} \in W^{1,2}_p\{[0,T]\times\{|x|\leq r\}\} \\ \qquad\qquad (\forall p>1) \\ \dfrac{\partial u^l_{T,r}}{\partial x_i} \quad x \text{ について局所的にリプシッツ} \\ \dfrac{\partial u^l_{T,r}}{\partial t} + \displaystyle\sum_1^n \frac{\partial u^l_{T,r}}{\partial x_i} b^i(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u^l_{T,r}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \end{cases}$$

このとき、$\varphi^l_m \in C^{1,2}$ を $\varphi^l_m \xrightarrow[m\to\infty]{} u^l_{T,r}$ in $W^{1,2}_p$ (p 十分大)

の様にとり、

$$V^m_{T,r}(t,x,y) = e^{-kt}\left(\sum_{l=1}^n (\varphi^l_m(t,x) - \varphi^l_m(t,y))^2\right)$$

$$V_{T,r}(t,x,y) = e^{-kt} \sum_{l=1}^n (u^l(t,x) - u^l(t,y))^2$$

この調和座標系の存在は、A.K. Zvonkin による。この例においては、実は、定理はそのままでは適用できないので、(8)をもっと一般にした次の(8)′ を check して示す.

$$(8)' \quad \overline{\lim_{m\to\infty}}\ E\left[\int_0^{t\wedge\tau_r} L V^m_{T,r}(s,x_s,y_s)\, ds\right] \leq 0.$$

§4の定理がこの(8)'におきかえても成り立つことは、その証明をみれば明らかである。そして、例5において、(8)'のcheckは、N.V. Krylovによる次の不等式を用いる。

$$(10)\qquad E\left[\int_0^{T\wedge\tau_r} |f(s, x_s)|\,ds\right] \le C\cdot \|f\|_{L_p([0,T]\times\{|x|\le r\})}$$

(p 十分大)

文献

[1] H. Okamura　Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A. 17 (1934), 319–328

[2] A.K. Zvonkin　Sbornik, 35 (1974), 129–149

[3] N.V. Krylov　Izv. Akad. Nauk. 38 (1974), 228–248

[4] T. Yamada & S. Watanabe　J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), 155–167, 553–563.