

多変数の Schwarz 微分について

東大・大学院 織田 為幸

Schwarz の微分はよく知られているように、一次分数変換  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$  を特徴づけざるに一次分数変換に関してある種の不変性をもっている。E. Picard は二変数の一次分数変換についても同様なものを考えることができることを示した。実は Picard が考えた微分は本質的に projective connection と一致することは容易な計算でわかる。以下ではもっと一般に、既約な有界対称領域の自己同型として表われる分数変換についても Schwarz の微分の類似物を構成することが、わりと簡単にできることを示す。

さて  $D$  を既約有界対称領域とする。  $j: D \hookrightarrow \mathbb{C}^n$  を canonical embedding とする。  $\bar{D}$  を  $D$  と dual な compact Hermitian symmetric space とする。  $k: \mathbb{C}^n \hookrightarrow \bar{D}$  なる embedding で  $k \circ j: D \hookrightarrow \bar{D}$  が所謂 Borel embedding となるようなものが存在する。さらに  $\bar{D}$  の上の ample line bundle  $L$  で  $\bar{D}$  の second cohomology group  $H^2(\bar{D}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  の generator になっているものが存在する。  $\dim \Gamma(\bar{D}, L) = N+1$ , とし  $\bar{D}$  の  $L$  に

よる  $\mathbb{P}^N$  の embedding を  $l: \bar{D} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  とする. この  $l$  を canonical embedding と呼ばれている.

さて  $\mathbb{P}^N$  の hyperplane  $H$  について  $l^{-1}(H) = H \cap \bar{D} = R(\mathbb{C}^n)$  となるものがある.  $p: \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^N$  を canonical projection とする. このとき holomorphic map  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\}$  を次の diagram を可換にするように構成する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\} \\ & \searrow \cong & \downarrow p \\ \bar{D} & \xrightarrow{l} & \mathbb{P}^N \end{array}$$

$F$  は  $\mathbb{C}^n$  から  $\mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\}$  の polynomial map として  $F(\mathbb{C}^n) \cap p^{-1}(H) = \emptyset$  となるように定めることができる. (座標を著くと  $\mathbb{A}^{N+1} = \mathbb{C}^{N+1}$  の座標を適当にとると,  $z \in \mathbb{C}^n$  に対して  $F(z) = (F_0(z), F_1(z), \dots, F_N(z))$  とするとき  $F_0(z) = \text{constant} \neq 0$ ,  $F_i(z)$  は  $z$  の polynomial にすることから,  $H$  は

$\mathbb{A}^{N+1}$  の点の座標を  $(z_0, z_1, \dots, z_N)$  とするとき,  $z_0 = 0$  で定まる超平面である)  $F$  は up to constant multiplication で一意に定まる.

ところで  $G$  を  $\bar{D}$  の双正則自己同型群のなす Lie 群の連結成分とする.  $G$  は複素 Lie 群になることが知られている.  $\bar{D}$  の同型は  $\mathbb{P}^N$  の linear transformation から induce されることが知られている.

よって表現  $\rho: G \hookrightarrow PGL(N)$  が構成できる.  $\pi: SL(N+1) \rightarrow PGL(N)$  を canonical projection とする.  $\bar{G} = \pi^{-1}(\rho(G))$  とする.  $L$  にはよく知られているように  $\bar{G}$  linearization が入る. つまり  $L$  に  $\bar{G}$  が act してそれは  $\bar{G}$  の  $\bar{D}$  上の action と, projection  $L \rightarrow \bar{D}$  によって compatible に

なるものがあるということである。さて  $K$  を  $\bar{D}$  の canonical bundle とすると、 $K$  は自然な  $G$ -linearization をもち、よって自然な  $\bar{G}$  linearization をもつ。Serre の定理と  $\bar{G}$  の character algebra がすべて trivial ということより、 $K$  と  $(L^*)^{\otimes M}$  が  $\bar{G}$ -linearized line bundle として同型なことがわかる。(ここで  $L^*$  は  $L$  の dual bundle,  $M$  は適当な自然数)

$n$  を上の  $n$  とする。  $U$  と  $V$  を  $\mathbb{C}^n$  の open domains とする。  $f$  を  $U$  から  $V$  への holomorphic local isomorphism とする。  $J(f)$  を  $f$  の Jacobian とする。これは  $U$  上の函数と見做す。  $U$  の coordinate を  $(u_i) (1 \leq i \leq n)$  とする。  $F$  を先に考えた morphism とする。  $F$  を  $V$  に制限したものを  $F$  と書き、  $F_j (0 \leq j \leq N)$  を上と同じく  $F$  の座標成分とする。  $U$  上の函数

$$\varphi_j(u) \stackrel{\text{def}}{=} J(f)^{-\frac{1}{M}} \cdot F_j(f(u)) \quad (u \in U, 0 \leq j \leq N)$$

を考える。ここで  $J(f)^{-\frac{1}{M}}$  は  $U$  上の多価函数と考えるか、あるいは  $U$  を小さく取りなおして一つの分枝をとることにする。

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  を multi-index とし  $\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_n^{\alpha_n}}$  ( $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ) とする。  $(\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)})$  を multi-index の長さ  $N+1$  の列とする。

これに対し、  $A = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)})$  とするとき

$$S_A(u; f) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left( \frac{\partial \varphi_j(u)}{\partial u^{\alpha^{(i)}}} \right)$$

と定める。  $S_A(u; f)$  は  $U$  上で 1 の  $M$  乗根だけ不定な多価函数で

ある.

さて  $V'$  をもう一つの  $\mathbb{C}$  の open domain とする.  $f' : U \rightarrow V'$  を holomorphic local isomorphism とする. 更に  $f' \circ f^{-1} : V \rightarrow V'$  は  $G = \text{Aut}^0(\bar{D})$  の  $\mathbb{C}^n$  に induce する. 双有理変換の  $V$  への制限にな, ているとする.

すると

定理 1:  $S_A(u; f) = S_A(u; f')$  up to multiplication  $M$ -th root of unity.

$\Gamma$  を  $D$  に act する arithmetic discontinuous group とする.  $n = \dim D$  であつた.  $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z)$  を独立な  $\Gamma$  に属する automorphic function とする.  $D \subset \mathbb{C}^n$  による  $z$  の coordinate を  $z = (z_i) (1 \leq i \leq n)$  とする.  $D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^n$ ,  $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z))$  の逆写像を  $f$  とする.  $f$  は無限多価. しかしこれを  $z$  の函数とみておくと

系:  $S_A(u; f)$  は up to multiplication of  $M$ -th root of unity で  $\Gamma$ -invariant.

定理 1 の系として容易に

定理 2,  $f : U \rightarrow V$  が  $G$  の element の  $U$  への制限にな, ているとする. すると  $S_A(u; f)$  はすべて constant である.

(この constant は有限個の  $A$  以外は 0 になる)

Remark. 定理 2 の逆も特殊な場合いえている.

(終)